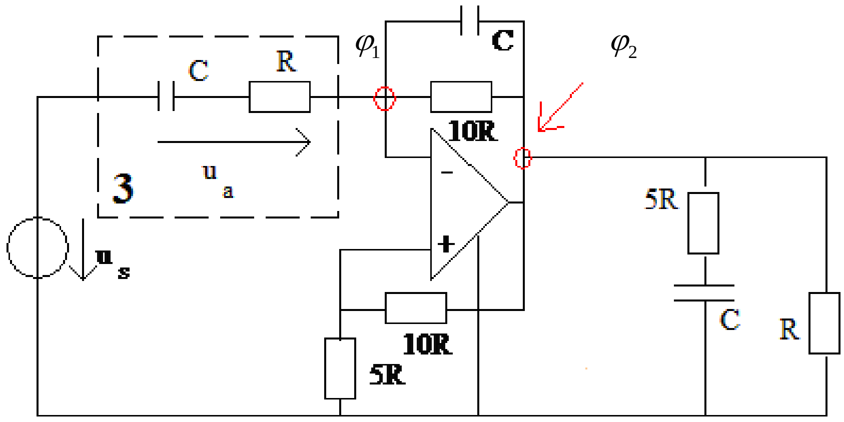
H34

Válaszjel: u, u_a, i, i_1 A vizsgált kétpólus: 1, 2, 3

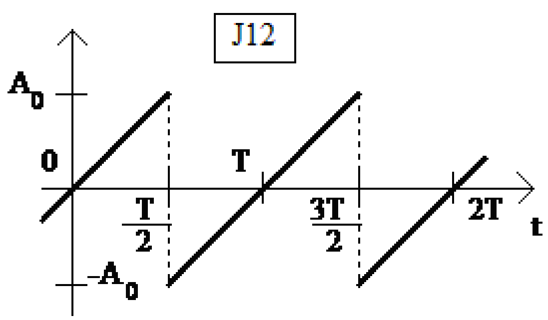


R = 25 $k\Omega$ C =0.001 μF

1.feladat

1.1 Fourier polinom meghatározása

A jelalak:



A gerjesztés időfüggvénye: $u(t) = \frac{2A_0}{T} \cdot t$, ha $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

Megjegyzés: Igazából a függvényt 0 és T/2 illetve T/2 és T között külön-külön kellene integrálni, de így is ugyanazt kapjuk. A megoldás így egyszerűbb, mert nem kell két részre bontani a függvényt.

A komplex Fourier-sor definíció szerint

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_k^C e^{-jk\omega t} \quad \text{,ahol } U_k^C = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) e^{-jk\omega t} dt$$

U_k^C számítása Matlab segítségével:

```
>> syms k
```

```
>> syms T
>> syms A0
>> syms t
>> ut=2.*A0./T.*t
>> Ukc=1./T.*int(ut.*exp(-j.*k.*t.*(2.*pi./T)),t,-T/2,T/2)

Ukc =


1/2*A0*(i*k*pi+1+i*exp(i*k*pi)^2*k*pi-exp(i*k*pi)^2)/exp(i*k*pi)/k^2/pi^2
```

Szebb alakban leírva:

$$U_k^C = \frac{1}{2} A_0 \frac{jk\pi + 1 + j \cdot \left(e^{jk\pi}\right)^2 \cdot k \cdot \pi - \left(e^{jk\pi}\right)^2}{\left(e^{jk\pi}\right) \cdot k^2 \cdot \pi^2}$$

$e^{jk\pi} = (-1)^k$ -nak felel meg, mivel ez koszinusz függvénynek felel meg k.*pi helyeken

$\left(e^{jk\pi}\right)^2 = 1$ nek felel meg

Mindezek alapján a kifejezést leegyszerűsítve a következő adódik:

$$U_k^C = A_0 \cdot \frac{j}{(-1)^k \cdot k \cdot \pi}$$

k=1,2,3,4-re kiszámítva:

```
>> k=1:1:4;
>> Ukc=A0.*j./((-1).^k.*k.*pi)

Ukc =

     0 - 6.3662i       0 + 3.1831i       0 - 2.1221i       0 + 1.5915i
>> T=0.15625
```

$k\omega$ -k számytása:

```
>> kw=k.*2.*pi./T

  kw =

    40.2124   80.4248  120.6372  160.8495
```

Ezek alapján a komplex Fourier-sor felíhrató:

$$\mathrm{u}(t) = 6.3662 \cdot e^{j\cdot\left(40.2124t - \frac{\pi}{2}\right)} + 3.1831 \cdot e^{j\cdot\left(80.4248t + \frac{\pi}{2}\right)} + 2.1221 \cdot e^{j\cdot\left(120.6372t - \frac{\pi}{2}\right)} + 1.5915 \cdot e^{j\cdot\left(160.8495t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

A valós együtthatós alak általános alakja:

$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot \cos(k\omega t + \rho_k)$, ahol $U_k = 2\left|U_k^C\right|$ $\rho_k = \arg U_k^C$

```
>> Uk=2.*abs(Ukc)

Uk =

   12.7324    6.3662    4.2441    3.1831

>> rhok=angle(Ukc)

rhok =

   -1.5708    1.5708   -1.5708    1.5708
```

$U_0 = 0$, mert a függvény páratlan

Tehát a valós együtthatós alak:

$$\mathrm{u}(t) = 12.7324 \cdot \cos\left(40.2124t - \frac{\pi}{2}\right) + 6.3662 \cdot \cos\left(80.4248t + \frac{\pi}{2}\right) + 4.2441 \cdot \cos\left(120.6372t - \frac{\pi}{2}\right) + 3.1831 \cdot \cos\left(160.8495t + \frac{\pi}{2}\right)$$

1.2

A jel effektív értéke pontosan:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2A_0}{T} t\right)^2 dt} = 11.5470$$

A számítások:

```
>> ueff=sqrt(1./T.*int((2.*t.*A0./T).^2,t,-T/2,T/2))
```

ueff =

11.5470 V

Közelítéssel:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{(12.7324)^2}{2} + \frac{(6.3662)^2}{2} + \frac{(4.2441)^2}{2} + \frac{(3.1831)^2}{2}} = 10.7421\,\mathrm{V}$$

A közelítés relatív hibája(százalékban):

$$\frac{11{,}547 - 10.7421}{11{,}547} \cdot 100\% = 6.97\%$$

1.3 Az átviteli karakterisztika meghatározása

Gerjesztés: Us

Válasz: Ua

(1) $u_a = u_s - \varphi_1$

– bemenetre (2) $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cdot j\omega C + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{10R} + \frac{\varphi_1 - u_s}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 0$

+ bemenetre (3) $\frac{\varphi_1}{5R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{10R} = 0 \quad \rightarrow \quad 3\varphi_1 = \varphi_2$

(1) $u_a = u_s - \varphi_1$

(3)-as egyenletet a (2)-esbe:

$$\left(\varphi_1 - 3\varphi_1\right) \cdot j\omega C + \frac{\varphi_1 - 3\varphi_1}{10R} + \frac{\varphi_1 - u_s}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 0$$

Ezt φ_1 -re rendezve aztán (1)-be, és rendezzzük $\frac{u_a}{u_s}$-re:

$$\frac{U_a\left(j\omega\right)}{U_s\left(j\omega\right)} = \frac{10R^2C^2\left(j\omega\right)^2 + 11RC\left(j\omega\right) + 1}{10R^2C^2\left(j\omega\right)^2 + 6RC\left(j\omega\right) + 1}$$

Számokkal: $H\left(j\omega\right) = \frac{0.006250\left(j\omega\right)^2 + 0.275\left(j\omega\right) + 1}{0.006250\left(j\omega\right)^2 + 0.150\left(j\omega\right) + 1}$

1.4 A válasz Fourier-polinomja

Az átviteli karakterisztika abszolút értékei és szögei az egyes k értékekre:

k	$k\omega_0$	$H\left(jk\omega_0\right)$
1	40.2124	$1.3115e^{-j0.2969}$
2	80.4248	$1.0964e^{-j0.2143}$
3	120.6372	$1.0449e^{-j0.1548}$
4	160.8495	$1.0257e^{-j0.1196}$

```
>>
Habs=abs((0.006250.*(j.*k.*w0).^2+0.275.*(j.*k.*w0)+1)./(0.006250.*(j.*k.*w0).^2+0.150.*(j.*k.*w0)+1))
Habs =

   1.3115    1.0964    1.0449    1.0257

>>
Harg=angle((0.006250.*(j.*k.*w0).^2+0.275.*(j.*k.*w0)+1)./(0.006250.*(j.*k.*w0).^2+0.150.*(j.*k.*w0)+1))
```

Harg =

-0.2969 -0.2143 -0.1548 -0.1196

A válasz a számításához a szuperpozíció elvét alkalmaztam:
A gerjesztés adatai táblázatban:

k	$k\omega_0$	$U_k \cdot e^{j\rho_k}$
1	40.2124	$12.7324e^{-j1.5708}$
2	80.4248	$6.3662e^{j1.5708}$
3	120.6372	$4.2441e^{-j1.5708}$
4	160.8495	$3.1831e^{j1.5708}$

A válasz kifejezése:

$$\underline{y(t) = 16.6985\cos(40.2124t - 1.8677) + 6.9799\cos(80.4248t + 1.3565) + 4.4347\cos(120.6372t - 1.7256) +}$$
$$\underline{+3.2649\cos(160.8495t + 1.4512)\ V}$$

A válasz effektív értéke:pö

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{(16.6985)^2}{2} + \frac{(6.9799)^2}{2} + \frac{(4.4347)^2}{2} + \frac{(3.2649)^2}{2}} = 13.3769\ V$$

<u>2.feladat</u>

2.1

$$u_s(t) = \frac{2A_0}{T}t\left(\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right)\right) + \left(\tfrac{2A_0}{T}t - 2A_0\right)\left(\varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right) - \varepsilon(t - T)\right) = \frac{2A_0}{T}t\varepsilon(t) - \frac{2A_0}{T}t\varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right) + \frac{2A_0}{T}t\varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right) -$$
$$-2A_0\varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right) - \frac{2A_0}{T}t\varepsilon(t - T) + 2A_0\varepsilon(t - T) = \ldots = \frac{2A_0}{T}t\varepsilon(t) - 2A_0\varepsilon\left(t - \tfrac{T}{2}\right) - \frac{2A_0}{T}(t - T)\varepsilon(t - T)$$

Mivel a jel belépő, ezért a definíció szerint:

$$F\{u_s(t)\} = U_s(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u_s(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{j\omega = s} = \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-st}dt\Big|_{s = j\omega} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} u_s(t)e^{-st}dt \stackrel{\Delta}{=} U_s(s) = L\{u_s(t)\}$$

Tehát $s = j\omega$ esetén a jel Fourier-transzformáltja és Laplace-transzformáltja megegyezik, így a következő azonosságokat használva: $L\{t\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2}$; $L\{x(t - T)\} = X(s)e^{-sT}$, valamint ’s’ helyére ’$j\omega$’-t helyettesítve megkapjuk a Fourier-transzformáltat. A komplex spektrum:

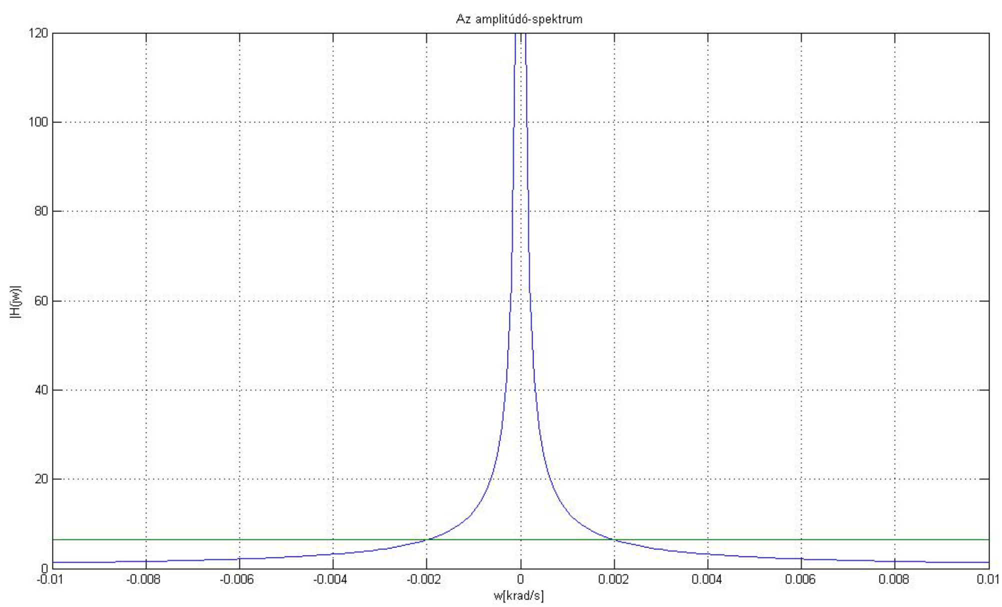
$$U_s(j\omega)=\frac{2A_0}{T}\frac{1}{\left(j\omega\right)^2}-2A_0\frac{1}{j\omega}e^{-(j\omega)\frac{T}{2}}-\frac{2A_0}{T}\frac{1}{\left(j\omega\right)^2}e^{-(j\omega)T}=$$

$$=\frac{256}{(j\omega)^2}-\frac{40}{j\omega}e^{-(j\omega)0.0781}-\frac{256}{(j\omega)^2}e^{-(j\omega)0.1563}$$

2.2 Amplitúdó-spektrum ábrázolása

```
w=-0.01:0.0001:0.01;
>> H=256./((j.*w).^2)-40./(j.*w).*exp(-j.*w.*0.0781)-256./((j.*w).^2).*exp(-j.*w.*0.1563);
>> Habs=abs(H);
>> Hmax=max(Habs);
>> eps=0.05.*Hmax;
>> plot(w, Habs, [-0.01 0.01], [eps eps]);  %rajzolas
>> grid
>> title('Az amplitúdó-spektrum');
>> xlabel('w[krad/s]')
>> ylabel('|H(jw)|')
```

Az ábrázolt spektrum:



$\Delta\omega=2\cdot 0.002$ krad/s=0.004 krad/s

2.3 A válasz komplex spektruma

$$Y\left(j\omega\right)=U_S\left(j\omega\right)\cdot H\left(j\omega\right)=$$

$$=\left(\frac{256}{(j\omega)^2}-\frac{40}{j\omega}e^{-(j\omega)0.0781}-\frac{256}{(j\omega)^2}e^{-(j\omega)0.1563}\right)\cdot\left(\frac{0.006250\left(j\omega\right)^2+0.275\left(j\omega\right)+1}{0.006250\left(j\omega\right)^2+0.150\left(j\omega\right)+1}\right)=$$

$$= \frac{1.6(j\omega)^2 + 70.4(j\omega) + 256}{0.006250(j\omega)^4 + 0.150(j\omega)^3 + (j\omega)^2} - \frac{0.25(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 40}{0.006250(j\omega)^3 + 0.150(j\omega)^2 + (j\omega)} e^{-(j\omega)0.0781} -$$

$$- \frac{1600(j\omega)^2 + 70.4(j\omega) + 256}{0.006250(j\omega)^4 + 0.150(j\omega)^3 + (j\omega)^2} e^{-(j\omega)0.1563}$$

3.1

2.1-ben már meghatároztuk az átviteli karakterisztikát és mivel a rendszer GV-stabilis ezért átviteli függvény:

$$\boxed{H(j\omega)\Big|_{j\omega=s} = H(s)\Big|_{s=j\omega} \Rightarrow H(s) = \frac{0.006250s^2 + 0.275s + 1}{0.006250s^2 + 0.150s + 1}}$$

Zérusok és pólusok számítása:

```
>> num=[0.006250 0.275 1];
>> den=[0.006250 0.150 1];

>> z=roots(num)

z =

   -40
    -4
```

Pólusok:

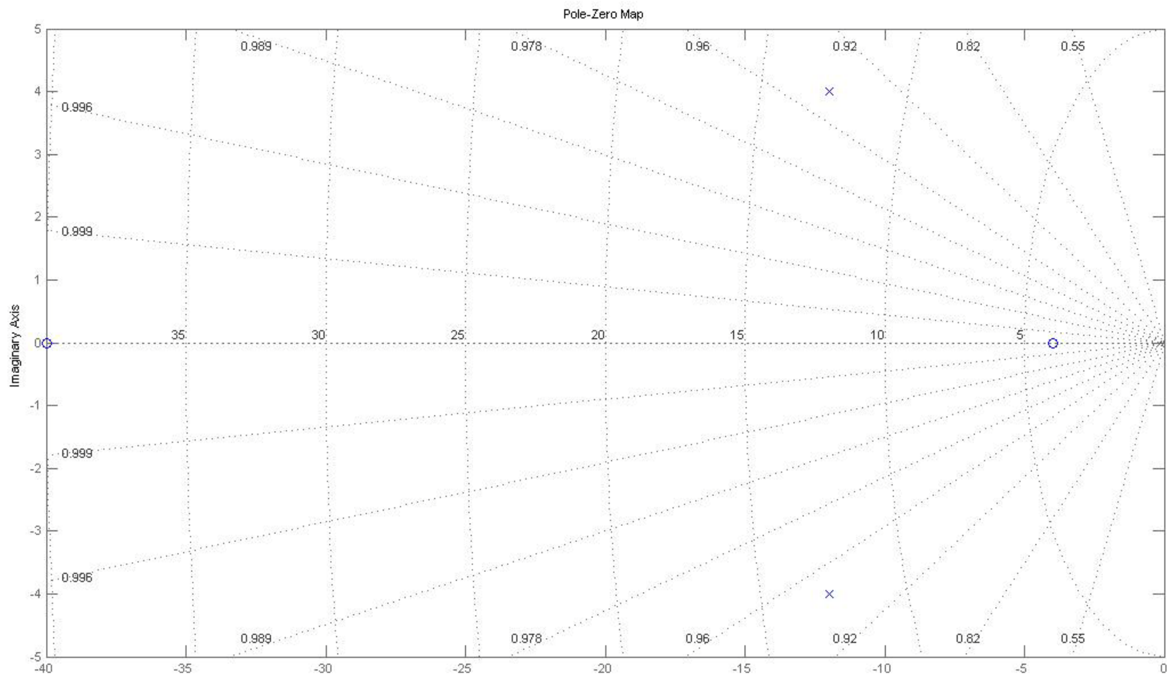
```
>> p=roots(den)

p =

 -12.0000 + 4.0000i
 -12.0000 - 4.0000i
```

Pólus-zérus ábra:

```
>> pzmap(num,den)
```



3.2 Impulzusválasz számítása

Az impulzusválasz az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja.

```
>> [r,p,k]=residue(num,den)

r =

  10.0000 +30.0000i
  10.0000 -30.0000i

p =

 -12.0000 + 4.0000i
 -12.0000 - 4.0000i


k =

     1
```

Az impulzusválasz alakja:

$$h(t)=L^{-1}\left\{H(s)\right\}=k\delta(t)+r_1e^{p_1t}\varepsilon(t)+r_2e^{p_2t}\varepsilon(t)=\delta(t)+\left((10+30j)e^{-(12-4j)t}+(10-30j)e^{-(12+4j)t}\right)\varepsilon(t)$$

Zárójelfelbontásokat és az Euler-formulát alkalmazva:

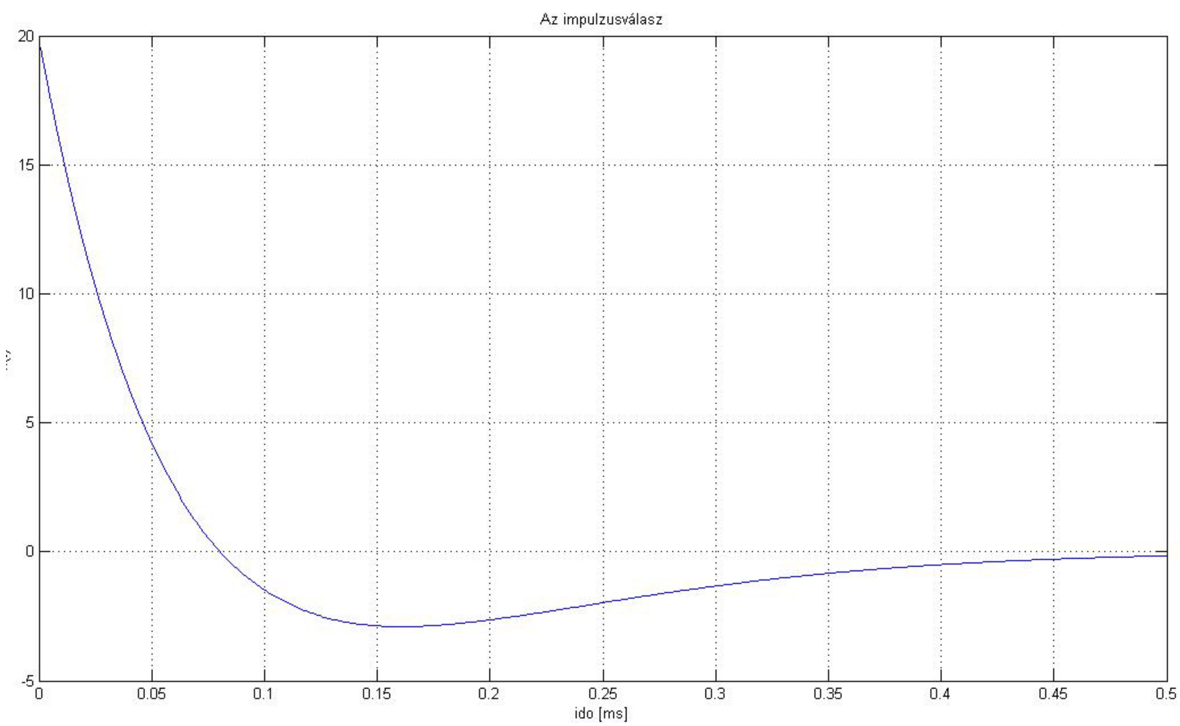
$$h(t)=\delta(t)+10e^{-(12-4j)t}+30je^{-(12-4j)t}+10e^{-(12+4j)t}-30je^{-(12+4j)t}=\delta(t)+10e^{-12t}e^{4jt}+30je^{-12t}e^{4jt}+10e^{-12t}e^{-4jt}-30je^{-12t}e^{-4jt}=$$

$$=\delta(t)+2e^{-12t}\left(10\left(\frac{e^{4jt}+e^{-4jt}}{2}\right)+30j\left(\frac{e^{4jt}-e^{-4jt}}{2}\right)\right)\varepsilon(t)=\delta(t)+2e^{-12t}\left(10\left(\frac{e^{4jt}+e^{-4jt}}{2}\right)-30\left(\frac{e^{4jt}-e^{-4jt}}{2j}\right)\right)\varepsilon(t)$$

$$\underline{=\delta(t)+2e^{-12t}\left[10\cos(4t)-30\sin(4t)\right]\varepsilon(t)}$$

Ábrázolása:

```
t=0:0.001:0.5;
ht=dirac(t)+2.*exp(-12.*t).*(10.*cos(4.*t)-30.*sin(4.*t));
plot(t,ht);
grid;
xlabel('ido [ms]');
ylabel('h(t)');
title('Az impulzusválasz');
```



3.3.

A gerjesztőjel: $A_0\ \varepsilon(t)\ (t / T)\ e^{-(t/T)}$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a válaszjelet ki kell számolnunk a gerjesztőjel Laplace-transzformáltját

$$\left.\begin{array}{l} t\cdot\varepsilon(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{s^2} \\ C\cdot x(t)\cdot e^{-\alpha t}\xrightarrow{L} C\cdot X(s+\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow L\{U_s(t)\}=128\frac{1}{(s+6.4)^2}$$

$$Y(s)=U_s(s)\cdot H(s)$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{0.8s^2+35.2s+128}{0.0063s^4+0.2300s^3+3.1760s^2+18.9440s+40.9600}$$

```
>> den2=conv([0.006250 0.150 1],conv([1 6.4],[1 6.4]))

den2 =

    0.0063    0.2300    3.1760   18.9440   40.9600

>> num2=128.*[0.00625 0.275 1]

num2 =

        0.8000   35.2000  128.0000
```

C=0.001.uF
T=0.15625 ms

Részlettörtekre bontás MATLAB-bal:

```
>> [r,p,k]=residue(num2,den2)

r=

  1.0e+002 *

  -0.6793 + 0.5186i
  -0.6793 - 0.5186i
   1.3587
  -2.1795


p =

 -12.0000 + 4.0000i
 -12.0000 - 4.0000i
  -6.4000
  -6.4000


k=

     []
```

$$Y(s)=\frac{-67.93\ +\ 51.86j}{s+(12-4j)}+\frac{-67.93\ -\ 51.86j}{s+(12+4j)}+\frac{135.87}{s+6.4}-\frac{217.95}{(s+6.4)^2}$$

Ez a kifejezés már könnyen inverz Laplace-transzformálható:

$$y(t)=(-67.93+51.86j)e^{-(12-4j)t}\varepsilon(t)+(-67.93-51.86j)e^{-(12+4j)t}\varepsilon(t)+135.87e^{-6.4t}\varepsilon(t)-217.95te^{-6.4t}\varepsilon(t)$$

Ez a kifejezés az elöző feladathoz hasonlóan átalakítható:

$$\underline{y(t)=\left[2\cdot e^{-12t}\left(51.86\sin(4t)-67.93\cos(4t)\right)+135.87e^{-6.4t}-217.95te^{-6.4t}\right]\varepsilon(t)}$$

A függvény ábrázolása Matlab-bal:

```
>> t=0:0.001:1.6;
>> yt=2.*exp(-12.*t).*(51.86.*sin(4.*t)-67.93.*cos(4.*t))+135.87.*exp(-6.4.*t)-217.95.*t.*exp(-
6.4.*t);
>> plot(t,yt)
>> grid;
>> xlabel('ido [ms]')
>> ylabel('y(t)');
>> title(’A válasz függvénye’)
```