**Analízis 1.** **2. ZH** **2020.11.20.**

## 1. feladat — 18 pont

Adja meg a legbővebb intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 3x - 3\right) \mathrm{e}^x$$

függvény monoton!

**Megoldás:** $f'(x) = \mathrm{e}^x x(x+3)^2$, zérushelyei $x_1 = 0$ és $x_2 = -3$ $\boxed{\textbf{6p.}}$

| | $]-\infty,-3[$ | $-3$ | $]-3,0[$ | $0$ | $]0,\infty[$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ | $\boxed{\textbf{8p.}}$ |
| $f'$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, 0]$ intervallumon;
szigorúan monoton növő a $[0, \infty[$ intervallumon; $\boxed{\textbf{4p.}}$

## 2. feladat — 24 pont

Határozza meg a következő határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^x$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\operatorname{sh}(3x)}{4\operatorname{ch}(5x)}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin(2x)\ln x)$;

**Megoldás:**

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^x = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln\operatorname{ctg} x} = \mathrm{e}^0 = 1$, mert $\mathrm{e}^x$ folytonos 0-ban, és $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\operatorname{ctg} x =$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\sin x\cos x} = \cdots = 0 \;\boxed{\textbf{8p.}}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2\operatorname{sh}(3x)}{4\operatorname{ch}(5x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}}{2\mathrm{e}^{5x} + 2\mathrm{e}^{-5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-8x}}{2 + 2\mathrm{e}^{-10x}} = 0 \;\boxed{\textbf{7p.}}$$

(c) $$\lim_{x\to 0+} (\sin(2x)\ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin(2x)}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2(2x)} 2\cos x} = =$$

$$\lim_{x\to 0+} \left( \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2x)}{-\cos x}}_{\to 0} \right) = 0 \;\boxed{\textbf{9p.}}$$

**3. feladat** **22 pont**

Hol és milyen szakadása van az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x) - 2^x}{x}, & \text{ha } x < 1 \text{ és } x \neq 0; \\[2ex] 3\dfrac{2+x}{x^2-4}, & \text{ha } 1 \leq x \text{ és } x \neq 2 \end{cases}$$

függvénynek?

**Megoldás:** A 0, 1, 2 pontok kivételével $f$ mindenütt folytonos. $\boxed{\textbf{4p.}}$
$x = 0$-ban biztosan van szakadás, mert $0 \notin D_f$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi x) - 2^x}{x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\pi\sin(\pi x) - 2^x \ln 2}{1} = -\ln 2$, ezért itt megszüntethető szakadás van. $\boxed{\textbf{6p.}}$
$x = 1$-ben $f(1) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 3\dfrac{2+x}{x^2-4} = -3$ és $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x) - 2^x}{x} = -3$ így itt nincs szakadás. $\boxed{\textbf{6p.}}$
$x = 2$-ben $\lim\limits_{x\to 2\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 2\pm} 3\dfrac{2+x}{x^2-4} = \pm\infty$ így itt másodfajú szakadás van. $\boxed{\textbf{6p.}}$

IMSC **feladat** **8 pont**

Mutassa meg, hogy az $f(x) = x^3 + \operatorname{sh}(3x)$ függvény invertálható, és adja meg az inverzfüggvény 0-beli deriváltját, ha létezik!

**Megoldás:** $f'(x) = 3x^2 + 3\operatorname{ch}(3x) \geq 3$ miatt $f$ szigorúan monoton növő mindenhol, ezért invertálható. $\boxed{\textbf{2p.}}$
Az inverzfüggvény deriváltjáról szóló tételből tudjuk, hogy inverze is deriválható, és $f^{-1\prime}(0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$
Mivel $f(0) = 0$ ezért $f^{-1}(0) = 0$ és így $f^{-1\prime}(0) = \dfrac{1}{3}$. $\boxed{\textbf{4p.}}$