Valószínűségszámítás pótzárthelyi megoldások

2009. április 29.

1. *Egy dobozban 1 piros 1 fehér és 4 zöld színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!*

Megoldás. A keresett valószínűségek a következőképp kaphatók meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=3) &= \mathbf{P}(pfz) = 6\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{4}{4} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15} \\
\mathbf{P}(X=4) &= \mathbf{P}(zzfp \vee zzpf) \\
&= 3\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}2 = \frac{3}{15} \\
\mathbf{P}(X=5) &= \mathbf{P}(zzzfp \vee zzzpf) \\
&= 4\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}2 = \frac{4}{15} \\
\mathbf{P}(X=6) &= \mathbf{P}(zzzzfp \vee zzzzpf) \\
&= 5\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}2 = \frac{5}{15}
\end{aligned}$$

A várható érték, a második momentum és a szórás az alábbi módon számolhatók:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \frac{1}{15}(3\cdot 3 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5) = \frac{71}{15} \\
\mathbf{E}X^2 &= \frac{1}{5}(9\cdot 3 + 16\cdot 3 + 25\cdot 4 + 36\cdot 5) = \frac{355}{15} \\
\sigma^2 X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{284}{225} \\
\sigma X &\approx 1.12
\end{aligned}$$

2. *Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x^2+xy+2y^2) & \text{, ha } 0 < x,y < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Mennyi az a értéke? Függetlenek-e X és Y?

Megoldás. Az egységre normáltsági feltételből számítható a értéke:

$$\begin{aligned}
1 &= a\int_0^1\int_0^1 x^2+xy+2y^2 dxdy = a\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2y+2xy^2\right]_0^1 dy \\
&= a\int_0^1 \frac{1}{3}+\frac{1}{2}y+2y^2 dy = a\left[\frac{y}{3}+\frac{1}{4}y^2+\frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = a\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

A fentiek alapján tehát $a = \frac{4}{5}$. A sűrűségfüggvények az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{4}{5}\int_0^1 x^2+xy+2y^2 dy = \frac{4}{5}\left[x^2+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right] \\
f_Y(y) &= \frac{4}{5}\int_0^1 x^2+xy+2y^2 dx = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y+2y^2\right]
\end{aligned}$$

Mivel $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, X és Y nem függetlenek.

3. *Egy szabályos dobókockával addig dobok, amíg ötöst vagy vagy nem kapok. Jelölje X a dobássorozat közben dobott egyesek számát! Mennyi X várható értéke? $\mathbf{P}(X=0)=$?*

Megoldás. Jelölje Y a dobásszámot. Ekkor

$$\mathbf{P}(X=k|Y=n)=\frac{\binom{n-1}{k}3^{n-1-k}}{4^{n-1}}, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

azaz X feltételes eloszlása az $Y=n$ feltétel mellett binomiális, konkrétan $B(n-1,\frac{1}{4})$. Ezt felhasználva a keresett várható érték a következő:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(X=k|Y=n)\mathbf{P}(Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbf{P}(X=k|Y=n)\mathbf{P}(Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(Y=n)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbf{P}(X=k|Y=n)}_{(n-1)\frac{1}{4}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{4}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\frac{2}{6} = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{36}\frac{1}{(1-\frac{4}{6})^2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

A $\mathbf{P}(X=0)$ valószínűség szintén a teljes valószínűség tételének felhasználásával kapható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=0|Y=n)P(Y=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\frac{2}{6} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

4. *X és Y független valószínűségi változók. Számolja ki az $f_X(x)=1$, $x\in[0,1]$ és az $f_Y(y)=\frac{2y}{5}$, $y\in[2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!*

Megoldás. A keresett sűrűségfüggvény értelmezési tartománya $R_{X+Y}=[2,4]$, a függvény maga pedig a következő képlettel kapható:

$$f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(t-u)du = \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{2(t-u)}{5}du,$$

ahol az integrálási határok változása miatt a következő két esetet különböztetjük meg:

$$\begin{aligned}
t\in[2,3]: &\quad f_{X+Y}(t)=\int_0^{t-2}\frac{2(t-u)}{5}du=\frac{1}{5}\left[2tu-u^2\right]_0^{t-2}=\frac{2}{5}t(t-2)-\frac{1}{5}(t-2)^2 \\
t\in[3,4]: &\quad f_{X+Y}(t)=\int_{t-3}^{1}\frac{2(t-u)}{5}du=\frac{1}{5}\left[2tu-u^2\right]_{t-3}^{1}=\frac{2}{5}t-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t(t-3)+\frac{1}{5}(t-3)^2
\end{aligned}$$

5. *Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény.* $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$. $\mathbf{P}(A + \bar{B} + C) =?$

Megoldás.

$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{[}B])+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(\bar{B}C)-\mathbf{P}(A\bar{B})+\mathbf{P}(A\bar{B}C) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{[}B])+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$