1. Mondja ki a Boole-egyenlőtlenséget!

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{A_i})$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, akkor $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$!

$B = A + \bar{A} \cdot B$ és $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$, így $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$. Mivel $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, már következik az állítás.

3. Bizonyítsa be, hogyha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ függetlenek, akkor $\boldsymbol{A}$ és $\overline{\boldsymbol{B}}$ is függetlenek!

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}) \Longrightarrow \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$
$$= \mathbf{P}(A)\big(1 - \mathbf{P}(B)\big) =$$
$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Longrightarrow A, \bar{B}$ függetlenek.

4. Bizonyítsa be, hogyha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ függetlenek, akkor $\overline{\boldsymbol{A}}$ és $\overline{\boldsymbol{B}}$ is függetlenek!

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Longrightarrow \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(\bar{A}) - \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(B)$$
$$= \mathbf{P}(\bar{A})\big(1 - \mathbf{P}(B)\big) =$$
$= \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{P}(\bar{B}) \Longrightarrow \bar{A}, \bar{B}$ függetlenek.

5. Bizonyítsa be, ha $\mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, akkor *A* minden eseménytől független!

Ha $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $A = \emptyset \Longrightarrow$ lásd 6. kérdés.

Ha $\mathbf{P}(A) = 1$, akkor $A = \Omega \Longrightarrow$ lásd 7. kérdés.

6. Bizonyítsa be, hogy a lehetetlen esemény minden eseménytől független!

$\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Longrightarrow \emptyset$ és A függetlenek.

7. Bizonyítsa be, hogy a biztos esemény minden eseménytől független!

$\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Longrightarrow \Omega$ és A függetlenek.

8. Mit nevezünk eseménytérnek?

Az eseménytér (Ω) a $\mathcal{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmaza.

9. Mit nevezünk elemi eseménynek?

Az elemi események (ω) a $\mathcal{K}$ véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni.

10. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B})$!

Ez az 1. Boole-egyenlőtlenség.

$A + B = A + A\backslash B$. Ez egy diszjunkt felbontás, és $A\backslash B \subseteq A \Longrightarrow \mathbf{P}(A\backslash B) \leq \mathbf{P}(A)$.

A valószínűség σ-additivitása miatt:

$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A\backslash B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

11. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{AB}) \geq \mathbf{1} - \mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{A}}) - \mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{B}})$!

Ez a 2. Boole-egyenlőtlenség. A De Morgan azonosságból következik, hogy

$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}\big(\overline{\bar{A} + \bar{B}}\big) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A} + \bar{B}) \geq 1 - \big(\mathbf{P}(\bar{A}) + \mathbf{P}(\bar{B})\big)$

Ezt átalakítva az első Boole-egyenlőtlenséget kapjuk, tehát az állítás igaz.

12. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{AB})$!

Könnyen belátható, hogy $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \Longrightarrow \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$, illetve hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B)$

Ebből már kijön, hogy $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

13. Mi az esemény?

Az esemény elemi események halmaza, az eseménytér részhalmaza.

14. $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = ?$

$\mathbf{P}(A + B + C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC)$

15. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ha $\forall i, j$-re:

1) $A_i \cdot A_j = \emptyset$
2) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

16. Mikor páronként független egy eseményrendszer?

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események páronként függetlenek, ha $\forall i \neq j$-re:

$\mathbf{P}\big(A_i \cdot A_j\big) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}\big(A_j\big)$

17. Mik az axiómái az $\mathcal{F}$-eseményrendszernek? (A σ-algebra definíciója.)

A $\mathcal{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események $\mathcal{F}$ rendszere a σ-algebra (eseményalgebra), ami kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

18. Mikor zárja ki az *A* esemény a *B* eseményt?

Az *A* és *B* esemény egymást kizáróak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

19. Mondja ki a Bayes-tételt!

Ha $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, $\mathbf{P}(A_i) > 0$ és $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) > 0$, akkor:

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B|A_k)\,\mathbf{P}(A_k)}$$

20. Definiálja az események teljes függetlenségének fogalmát!

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események teljesen függetlenek, ha $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ és $\forall 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ indexkombinációra $\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cdots A_{i_k}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right) \cdots \mathbf{P}\left(A_{i_k}\right)$.

21. Adja meg a valószínűség axiómáit!

A valószínűség egy $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ halmazfüggvény, mely kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
2) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként egymást kizárják, akkor $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

22. Mikor vonja maga után az *A* esemény bekövetkezése a *B* eseményt?

Az *A* esemény maga után vonja *B* eseményt, ha az *A* esemény részhalmaza a *B* eseménynek. Jelölés: $A \subseteq B$

23. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik minden eseménytől független!

Az ∅ és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek.

24. Mondja ki a Poincare-formulát!

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tetszőlegesek, akkor:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_i \le n} \mathbf{P}\left(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \ldots \cdot A_{j_i}\right)\right)$$

25. Mondja ki a folytonossági tételt!

1) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ olyan események, hogy: $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$, akkor: $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.
2) Ha $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$, akkor: $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

26. Mondjon példát olyan eseményre, amelyik független a komplemensétől!

Az ∅ és Ω események minden $A \in \mathcal{F}$ eseménytől függetlenek, és mivel ezek egymás komplemensei, ezért egymástól is.

27. Definiálja az események függetlenségének fogalmát!

Az $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges események függetlenek, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

28. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{ABC}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{AB})$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathbf{P}(C \mid AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \frac{\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(AB)} = \mathbf{P}(ABC)$$

29. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{A})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{A}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{B} \mid \bar{\boldsymbol{A}}) \cdot \mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{A}})}$!

A jobb oldalt átalakítjuk úgy, hogy kijöjjön belőle a bal oldal:

$$\frac{\mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathbf{P}(B \mid \bar{A}) \cdot \mathrm{P}(\bar{A})} = \frac{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathbf{P}(A)}{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \cdot \mathrm{P}(A) + \frac{\mathbf{P}(\bar{A}B)}{\mathbf{P}(\bar{A})} \cdot \mathrm{P}(\bar{A})} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A \mid B)$$

30. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!

Legyen $A, B \in \mathcal{F}$ olyan események, hogy A tetszőleges és $\mathbf{P}(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B-re vonatkoztatott feltételes valószínűségén a $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ számot értjük.