Analízis 1. **2. vizsga** **2021.01.08.**

Eredmények, részeredmények, pontok

1. feladat — 12 pont

Keresse meg az

$$f(x) = \sqrt{(12+4x-x^2)\cdot|x-1|}$$

függvény legnagyobb és legkisebb értékét, ha létezik!

Megoldás: $12+4x-x^2 \geq 0$ kell hogy teljesüljön, azaz $-2 \leq x \leq 6$. $\boxed{\mathbf{2p.}}$
Kompakt intervallumon keressük folytonos függvény szélsőértékeit, melyek Weierstrass-tételei szerint biztosan léteznek. $\boxed{\mathbf{2p.}}$

Lehet a végpontokban: $x_1 = -2$ és $x_2 = 6$; $\boxed{\mathbf{1p.}}$

Ahol nem deriválható f: $x_3 = 1$ (és $x_{1,2}$); $\boxed{\mathbf{2p.}}$

f' zérushelyei: $x_4 = -\frac{2}{3}$ és $x_5 = 4$; $\boxed{\mathbf{3p.}}$

$f(-2) = f(6) = f(1) = 0$ a minimum;

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3\sqrt{3}}$

$f(4) = 6$ a maximum. $\boxed{\mathbf{2p.}}$

2. feladat — 14 pont

Számolja ki a következő integrálokat!

(a) $\displaystyle\int (3x-1)\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x =$

(b) $\displaystyle\int_1^2 3x^5\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ ($t = x^3-1$ helyettesítés)

Megoldás:

(a) $$= (3x-1)\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3} - \int 3\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\mathbf{4p.}} = (3x-1)\frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3} + c = (x-\frac{2}{3})\mathrm{e}^{3x-1} + c\ \boxed{\mathbf{2p.}}$$

(b) $$= \int_{t=1^3-1}^{2^3-1} 3\left(\sqrt[3]{t+1}\right)^5 \sqrt{t}\frac{1}{3\sqrt[3]{t+1}^2}\,\mathrm{d}t\ \boxed{\mathbf{5p.}} = \int_0^7 (t+1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^7 t^{3/2} + t^{1/2}\,\mathrm{d}t =$$
$$\left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^7 = \left(\frac{98}{5} + \frac{14}{3}\right)\sqrt{7} = \frac{224}{15}\sqrt{7}\ \boxed{\mathbf{3p.}}$$

3. feladat — 12 pont

Számolja ki a következő integrált!

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^2} \left|\frac{\ln x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$$

Megoldás: $$= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} -\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\ \boxed{\mathbf{6p.}} = \left[-\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} + \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{\mathrm{e}^2} = \frac{5}{2}\ \boxed{\mathbf{6p.}}$$

4. feladat **12 pont**

Számolja ki a következő integrált!

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás: $= \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^{-2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\,\boxed{\textbf{6p.}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_a^{-2} = \frac{\ln 3}{2}\,\boxed{\textbf{6p.}}$