Algoritmuselmélet ZH

2015. április 8.

1. Tekintsük az $f(n) = 10n^2 \log n + 7n\sqrt{n} + 2000 \log n + 1000$ függvényt. Adjon olyan c konstanst és olyan n_0 küszöbértéket, ami a definíció szerint mutatja, hogy az $f(n)$ függvény $O(n^3)$-ben van.

2. (a) Építsen kupacot az órán tanult lineáris idejű módszerrel a $7, 3, 5, 8, 10, 1, 6, 4$ tömbből. Minden lényegi lépés után rajzolja fel az aktuális állapotot.
(b) Szúrja be a kapott kupacba a 2-t az órán tanult algoritmussal.

3. Van-e olyan 10 belső csúcsot tartalmazó piros-fekete fa, amire a tárolt számokat az inorder és a preorder bejárás ugyanabban a sorrendben adja vissza?

4. A $h(x)$ hashfüggvénnyel, nyílt címzéssel beszúrjuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat (ebben a sorrendben) egy $M > n$ méretű (kezdetben üres) hash táblába, először lineáris próbával, majd kvadratikus maradék próbával. A lineáris próba esetén ℓ darab ütközés történik, a kvadratikus maradék próbánál pedig k darab. (Ha egy elem több lépésben ütközik, akkor az több ütközésnek számít.)
(a) Lehetséges-e, hogy $k = 0$ és $\ell = n - 1$? (b) Lehetséges-e, hogy $k = 1$ és $\ell = n - 1$?

5. Egy országban nagy hagyománya van a tollaslabdázásnak, ezért az ország számos városában készülnek tollaslabda-csarnokot építeni. Ha egy városban új tollaslabda-csarnok épül, akkor ott mindenki boldog. Ismert, hogy a csarnoképítésre összesen legfeljebb M petákot akarnak költeni és ismert a szóba jövő n város mindegyikére az, hogy mennyibe kerül ott a helyi adottságoknak megfelelő csarnok (az i. városban ez m_i peták) és hogy hányan élnek az egyes városokban (p_i lakos az i. városban). Adjon algoritmust ami az M, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ egész számok ismeretében $O(Mn)$ lépésben meghatározza, hogy mely városokban épüljenek meg a tollaslabda-csarnokok, ha azt akarjuk hogy a lehető legtöbb ember legyen az építkezések miatt boldog.

6. Éllistájával adott egy irányított G gráf, melynek minden csúcsa színes: piros, fehér vagy zöld színű. Adott a gráfban egy A csúcs, ami piros és egy B csúcs, ami zöld. Adjon $O(n + e)$ lépésszámú algoritmust. ami megtalálja a legkevesebb élből álló olyan utat A-ból B-be, amiben az első néhány csúcs piros, majd néhány (legalább egy) fehér csúcs után csupa zöld csúcs következik.

7. Egy középkori királyság úthálózata egy n csúcsú irányítatlan gráffal adott (a csúcsok a városok, az élek a köztük vezető utak). Az A városból szeretnénk a B városba árut vinni, de bizonyos városok csak akkor engednek át minket a terményünkkel ha vámot fizetünk nekik (az A és B városban nem kell vámot fizetnünk). A vám összege fix, nem függ az áru mennyiségétől, de a vám városonként más és más lehet. Adjon algoritmust, ami a városonkénti vámok és a gráf szomszédossági mátrixának ismeretében $O(n^2)$ lépésben meghatároz egy olyan útvonalat, amin a legkevesebb sarcot szedik be tőlünk.

8. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami egy n különböző egész számot tartalmazó tömbről eldönti, hogy van-e benne három olyan szám, amik közül az egyik a másik kettő átlaga. (Lassabb algoritmus maximum 4 pontot ér).

Algoritmuselmélet vizsga

2015. május 27.

1. (a) Írja le a 2-3 fa definícióját! (A műveleteket nem kell leírnia.)
(b) Milyen korlátok között lehet egy olyan 2-3 fa magassága, melyben n kulcsot tárolunk? Ne O-jelölést használjon, adjon pontos korlátokat. A korlátok helyességét nem kell bebizonyítania.

2. Írja le, hogy hogyan kell végrehajtani a keresést és a törlést, ha kettős hash-elést használunk.

3. Szemléltesse a Karp-redukció definícióját a 3-SZÍN$\prec$ MAXFTLEN visszavezetésen. Adja meg magát a visszavezetést és mutassa meg, hogy miért teljesülnek a redukció definíciójában levő feltételek.

4. Egy algoritmus lépésszámát az n hosszú bemeneteken jelölje $T(n)$.
Tudjuk, hogy $T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + 4$, ha $n \geq 3$ és $T(n) \leq 10$ ha $n < 3$.
Bizonyítsa be, hogy a fentiekből nem következik, hogy $T(n) = O(n)$.

5. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Egy X eldöntési problémáról tudjuk azt, hogy $MAXKLIKK \prec X$ fennáll.
(a) Lehetséges-e, hogy $X =$ 3-SZÍN?
(b) Lehetséges-e, hogy $X =$ 2-SZÍN?

6. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat:
Input: egy összefüggő, irányítatlan G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy vagy van G-ben kör vagy van G-ben Hamilton-út (a két dolog együtt is teljesülhet, a körnek nem kell Hamilton-körnek lennie).

7. Egy éllistájával adott, élsúlyozott DAG-ban néhány csúcsra sört tettünk (a többire nem). Az élsúlyok pozitívak és azt mutatják, hogy milyen távolságra vannak a csúcsok egymástól. Adjon algoritmust, ami $O(n + e)$ lépésben meghatározza a gráf mindegyik csúcsára, hogy mekkora távolságra van a csúcstól a legközelebbi elérhető sör. (A gráfban csak az élek irányításának megfelelően tudunk haladni. Egy sör elérhető egy csúcsból, ha irányított úton oda lehet jutni, az ilyen út hossza az élsúlyok összege.)

8. Fizetésünk egy részét Erzsébet-utalványban kapjuk, a lehetséges címletek: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Amikor fizetni szeretnénk a boltban 123456 forintot, akkor látjuk, hogy készpénz és bankkártya nincs nálunk, Erzsébet-utalványból viszont nem tudnak visszaadni. Szeretnénk eldönteni, hogy milyen címletű utalványból mennyit használjunk, hogy kifizessük a 123456 forintot és a lehető legkevesebbet bukjuk (azaz a fizetett összeg minél közelebb legyen 123456-höz.) 200000 forintnál többet nem fizetünk, akkor inkább nem vásárolunk most. Adjon $O(n)$-es algoritmust a legjobb megoldás megkeresésére. (Az egyes címletekből sok példánnyal rendelkezünk, mindegyikből van legalább 200000 értékű utalványunk.)

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 10.

1. (a) Írja le, hogy irányított gráf mélységi bejárásánál mit jelentenek az alábbi fogalmak: faél, előreél, visszaél, keresztél.
(b) Hogyan lehet a mélységi és befejezési számok segítségével a mélységi bejárás közben eldönteni, hogy az éppen vizsgált él a fenti négy kategória közül melyikbe esik? (Indoklás nem szükséges.)

2. (a) Írja le az euklideszi utazóügynök feladatot!
(b) Írja le az órán tanult c-közelítő algoritmust erre a feladatra és nevezze meg, hogy mi a c konstans értéke. (Azt nem kell igazolni, hogy a leírt algoritmus c-közelítő.)

3. Az órán tanult Bellman-Ford algoritmus úgy határozza meg egy pontból az összes többibe a legrövidebb út hosszát egy n csúcsú gráfban, hogy eközben egy $n - 1$ soros és n oszlopos táblázatot tölt ki.
(a) Hogyan kell kitölteni az első sort? Miért?
(b) Írja le az általános képletet, amivel az i. ($i \geq 2$) sort ki lehet tölteni. Magyarázza el a használt jelöléseket és indokolja meg, hogy miért helyes a képlet.

4. Egy 2-3 fában az első 81 pozitív egész számot tároljuk (azaz 1-től 81-ig), a fában minden nem-levél csúcsnak három gyereke van. Mik a gyökérben levő kulcsok?

5. Egy irányítatlan, élsúlyozott, összefüggő, egyszerű gráfban az élsúlyozást a $c : E \to \mathbb{R}$ függvény adja meg.
(a) Igaz-e, hogy ha egy $c(e)$ élsúly egyedi (nincs másik él, aminek ugyanekkora a súlya), akkor ez az e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van?
(b) Igaz-e, hogy ha egy e él a gráf minden minimális súlyú feszítőfájában benne van, akkor $c(e)$ egyedi?

6. Az X eldöntési feladatról annyit tudunk, hogy $coNP$-ben van. Mely(ek) igaz(ak) az alábbi állítások közül? ($\overline{H}$ a Hamilton-kör eldöntési probléma komplementerét jelöli.)
(a) Lehetséges, hogy $X \prec \overline{H}$.
(b) Biztosan igaz, hogy $X \prec \overline{H}$.

7. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat: az inputként kapott n darab $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egész számról azt kell eldönteni, hogy ki lehet-e választani közülük legfeljebb 2015-öt úgy, hogy ezek összege 2^{2015} legyen.

8. Egy élsúlyozott DAG-ban minden csúcs vagy piros vagy fehér. Adott két kijelölt piros csúcs, s és t, szeretnénk megtalálni a legrövidebb olyan utat s-ből t-be, amin legfeljebb egy fehér csúcs szerepel. Adjon olyan algoritmust, ami $O(n+e)$ lépésben meghatározza egy ilyen legrövidebb út hosszát.

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 17.

1. (a) Ha egy kupacot fával reprezentálunk, akkor mi az előírás a fa alakjára? Mi a kupactulajdonság?
(b) Mennyi egy n csúcsot tartalmazó kupac magassága? (Bizonyítani nem kell).
(c) Írja le, hogy hogyan kell a beszúrást végrehajtani egy fával reprezentált kupacban.

2. Írja le a radixrendezés algoritmusát. Milyen alakú inputokra lehet használni? Mennyi az eljárás lépésszáma? A ládarendezést nem kell részetesen leírnia, az eljárás jóságát nem kell indokolni, de a használt jelöléseket magyarázza el.

3. (a) Írja le a Ládapakolás feladatot és megoldására tanult 2-közelítő algoritmust.
(b) Amikor azt bizonyítottuk, hogy ez az algoritmus 2-közelítő, akkor az optimális megoldásra (OPT) adtunk egy alsó becslést. Mi ez és miért igaz?

4. Az alábbi hash-táblában kitöröljük a 11-et, majd beszúrunk egy számot, eközben k ütközés történik. Mekkora lehet k legnagyobb értéke, ha lineáris próbát használunk?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	2		4	16	6			9	10

5. Bizonyítsa be, hogy az alábbi eldöntési probléma $coNP$-ben van.
Input: egy irányítatlan, élsúlyozott, egyszerű G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G minden körének összsúlya legalább 2015?

6. Egy város térképe egy n csúcsú, irányítatlan, élsúlyozott gráffal adott. A gráf pontjai csomópontokat reprezentálnak, az élek ezek között vezető közvetlen utakat, az élsúlyok pedig a megfelelő útszakasz hosszát adják meg méterben. Egy operációs rendszer új verzióját ablakokat ábrázoló óriásplakátokon hirdetik a városban, a plakátok a város néhány csomópontjában vannak. Az operációs rendszert gyártó cég megneszelte, hogy egyesek pingvineket akarnak a plakátokra festeni, ezért őrizni szeretné a plakátokat, de csak k egységet tudnak felállítani ($n \geq k \geq 2$). (Ez kevesebb, mint ahány plakát van.) Azt szeretnék elérni, hogy úgy helyezzék el az egységeket k csomópontba, hogy mindegyik plakátjuktól legfeljebb 500 méterre legyen figyelő egység. (Két csomópont távolsága a köztük vezető legrövidebb gráfbeli út hossza.) Adjon $O(n^{k+2})$ lépésszámú algoritmust, ami talál egy jó elhelyezést vagy szól, ha nincs ilyen.

7. Igazolja, hogy vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes a PARTÍCIÓ feladat alábbi változata: inputként adott $n \geq 2$ darab pozitív egész számokból álló $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ halmazról kell eldönteni, hogy van-e olyan partíciója S-nek S_1 és S_2 részhalmazra, melyre igaz, hogy $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, és az S_1-beli és S_2-beli számok összege megegyezik.

8. Egy $2n \times 2n$-es táblázat minden mezőjében egy egész szám van. Adjon $O(n^3)$-ös algoritmust, ami megkeresi a legnagyobb összsúlyú $n \times n$-es, négyzet alakú részt a táblázatban. Egy résztáblázat összsúlya a benne szereplő számok összege.

Algoritmuselmélet vizsga

2015. június 19.

1. (a) Írja le a piros-fekete fa definícióját!
   (b) Adjon felső korlátot egy n kulcsot tároló piros-fekete fában való keresés lépésszámára, használja az O jelölést. (A korlát helyességét nem kell belátnia.)

2. (a) Írja le Prim algoritmusát, amivel minimális súlyú feszítőfát lehet keresni.
   (b) A Prim algoritmus kupacos-éllistás implementációjában mit tárolunk a kupacban? A kupacépítésen kívül milyen és legfeljebb hány kupacműveletet hajtunk végre egy n csúcsú, e élű gráfon való futtatáskor?
   (c) Mennyi a kupacos-éllistás implementáció teljes lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Ebben a kérdésben a Floyd algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia (ez az algoritmus az összes pontpárra meghatározza a legrövidebb utak hosszát).
   (a) Írja le, hogy mit jelölnek az algoritmus k. ciklusában kiszámolt $F_k[i, j]$ mennyiségek.
   (b) Írja le, hogy milyen képlettel lehet az F_k értékeket kiszámolni az F_{k-1}-es értékekből és magyarázza el, hogy miért helyes ez a képlet.

4. Egy város úthálózata szomszédossági mátrixával adott, n csúcsú irányított gráffal írható le. Az élek súlyozottak és azt adják meg, hogy átlagosan mennyi idő alatt lehet az élnek megfelelő útszakaszon autóval végigmenni. A város egy kijelölt A pontjából egy másik kijelölt B pontjába szeretnénk gyors eljutást biztosítani. 2015 útszakasz kivételével az útszakaszok kétirányúak (ekkor mindkét irányban van egy-egy él, ugyanazon élsúllyal), de van 2015 egyirányú szakasz, ezek közül szeretnénk most egyet kétirányúvá tenni. Melyik legyen ez az él, ha azt szeretnénk, hogy az A-ból B-be eljutás a lehető leggyorsabbá váljon? (Az új kétirányú útszakasz élsúlya mindkét irányban ugyanaz lesz, ami az egyirányúé volt.) Adjon algoritmust, ami meghatározza ezt az élet $O(n^2)$ idő alatt.

5. Adott három rendezett tömb, A_1, A_2, és A_3. Mindhárom tömb n elemet tartalmaz, az elemek mind különbözőek. Adjon olyan csak összehasonlításokat használó algoritmust, ami e három rendezett tömbből felépít egy bináris keresőfát $O(n)$ összehasonlítással vagy lássa be, hogy nem létezik ilyen.

6. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$ és legyen IP az egészértékű lineáris programozás probléma és X az az eldöntési probléma, amikor egy gráfról azt kell eldönteni, hogy legfeljebb 7 összefüggő komponensből áll-e. Az alábbi Karp-redukciók közül melyek lehetségesek?
   (a) IP$\prec$ SAT   (b) $X \prec$ SAT

7. Igazolja vagy azt, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes az alábbi eldöntési feladat: egy irányítatlan G gráfról azt kell eldönteni, hogy két diszjunkt V_1 és V_2 részre osztható-e a csúcshalmaza úgy, hogy mind a V_1, mind a V_2 csúcshalmaz által feszített részgráfban van Hamilton-kör. (Egy V_i csúcshalmaz által feszített részgráf az eredeti gráfnak pontosan azokat az éleit tartalmazza, melyek mindkét végpontja V_i-ben van.)

8. Egy online kurzusokat kínáló oldalon n darab minket érdeklő kurzus van. Minden kurzusra ismert, hogy melyik napon kezdődik és melyik napig tart. Egyszerre csak egy kurzust szeretnénk hallgatni (az még lehetséges, hogy az egyik kurzus utolsó napja egybe esik egy másik választott kurzus kezdőnapjával). Szeretnénk a lehető legtöbb kurzust kiválasztani így, de van egy kétrészes kurzus is (a második rész később van, mint az első), amit mindenképpen fel akarunk venni (mindkét részét). Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben kiválasztja a lehető legtöbb kurzust a fenti feltételekkel.

Algoritmuselmélet zárthelyi

2014. március 31.

1. Legyen $f(x) = \max(x^3 - 10x^2 + 110x; x^2 + 100x)$ és $g(x) = 2^{3\log_2(x)} + x^2$.
   a) Igaz-e, hogy $f = O(g)$? b) Igaz-e, hogy $g = O(f)$?

2. Két teherautóval n darab ládát szeretnénk elszállítani. A ládák súlyai $s_1, s_2, \ldots, s_n$ egész számok. Adj olyan algoritmust, ami meghatározza, hogyan kell elhelyezni a ládákat úgy, hogy a két teherautóra rakott összsúly különbsége minimális legyen! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \cdot w)$, ahol $w = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

3. Legyenek a G gráf pontjai a háromdimenziós tér azon rácspontjai, amelyeknek minden koordinátája 0 és m között van. Két pont pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik koordinátájuk pontosan 1-gyel tér el, a másik két koordinátájuk megegyezik. (Például $(2,3,4)$ és $(2,4,4)$ szomszédosak, de $(2,7,4)$-el nem szomszédos egyik sem.) Mekkora lesz a $(0,0,0)$ pontból indított szélességi keresőfa mélysége?

4. A Dijkstra és a Bellman-Ford algoritmus is úgy működik, hogy amikor meghatározza az adott pontba mutató legrövidebb út hosszát, akkor valójában felfedezett egy ekkora hosszúságú legrövidebb utat. Adj példát olyan irányított gráfra, melyben minden élen különböző, egész, pozitív súlyok vannak, és a Dijsktra illetve Bellman-Ford két különböző legrövidebb utat talál az x pontból az y pontba!

5. Az $A[1:2n]$ tömb egy kupacot reprezentál.
   a) Igaz-e, hogy az $A[1:n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?
   b) Igaz-e, hogy az $A[n+1:2n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?

6. A $B[1:n]$ tömb különböző egészeket tartalmaz. A $B[i]$ elem *lokális minimum*, ha $B[i-1] > B[i]$ és $B[i] < B[i+1]$ teljesül ($B[1]$ ill. $B[n]$ elég, ha az egy szomszédjánál kisebb). Adj algoritmust egy lokális minimum megkeresésére, mely legrosszabb esetben $O(\log n)$ összehasonlítást használ! (Ha több lokális minimum van, ezek közül mindegy melyiket találjuk meg.)

7. Az $1,2,3,4,5,8,10,9,7,6$ tömböt gyorsrendezéssel rendezzük, amit kétféleképpen is végrehajtunk. Az egyik futtattatás során mindig az éppen rendezendő tömb első elemét választjuk véletlen elemnek a partíciós lépéshez, a másik futtatás során mindig a tömb utolsó elemét. Melyik esetben fogunk kevesebb összehasonlítást végezni?

8. Egy piros-fekete fában 13 elemet tárolunk. Minimálisan hány piros csúcs van a fában? (A teljes megoldáshoz be kell látni egy megfelelő k-ra, hogy lehet k piros, és azt is, hogy nem lehet $k-1$ piros.)

Algoritmuselmélet vizsga

2014. május 29.

1. Milyen elemek rendezésére használható a radixrendezés? Írja le a radixrendezés algoritmusát! Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Sem az algoritmus helyességét, sem a lépésszámot nem kell indokolni.)

2. Írja le a bináris keresőfa definícióját! Milyen értékek között változhat egy n csúcsú bináris keresőfa magassága? (Nem kell indokolni a korlátokat.) Írja le, hogy hogyan kell keresni és törölni egy bináris keresőfában!

3. Adja meg az alábbi, a minimális feszítőfák keresésére szolgáló piros-kék algoritmusban szereplő fogalmak definícióját: takaros színezés, kék szabály. Bizonyítsa be, hogy a kék szabály alkalmazásával takaros színezésből takaros színezést kapunk.

4. Egy hosszú-hosszú nyári szünet alatt több munkát szeretnénk elvállalni. Minden potenciális munkáról tudjuk, hogy mely egymást követő napokon kell azzal dolgoznunk (ha elvállaljuk az adott feladatot) és azt is tudjuk, hogy mekkora bevételünk származik a munka teljesítéséből. Egyszerre csak egy munkát tudunk végezni, azaz az elvállalt munkák intervallumai nem lehetnek átfedőek. Adjon algoritmust, ami eldönti, hogy mely munkákat vállaljuk el, ha az összbevételünket maximalizálni akarjuk. Az algoritmus lépésszáma n potenciális munka esetén legyen $O(n^2)$.

5. Kvadratikus maradék próbával hash-elünk egy $M = 127$ méretű hash-táblába, a $K \bmod M$ hash függvényt használva. A kulcsok a következő sorrendben érkeznek: $M, 2M, 3M, \ldots M \cdot M$, ezzel a tábla meg is telik. Igaz-e, hogy az így kapott tömb egy kupacot reprezentál?

6. Egy 5 csúcsú gráfon futtatva a Floyd-algoritmust, az utolsó frissítés előtt a következő mátrixunk van. Hogyan néz ki az utolsó frissítés után a mátrix?

$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ \infty & 0 & 1 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ -3 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

7. Bizonyítsa be, hogy ha a MAXKLIKK eldöntési probléma komplementere NP-teljes, akkor $NP \subseteq coNP$.

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pozitív egész számok

   Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz, melyre $|\sum_{i \in I} s_i - \sum_{i \notin I} s_i| \leq 1$ fennáll?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 5.

1. Adja meg a topologikus sorrend definícióját! Hogyan lehet a mélységi bejárással találni egy topologikus sorrendet?

2. Mi a Ládapakolás eldöntési feladat? Hogyan működik a First Fit közelítő algoritmus? Bizonyítsa be, hogy ez az algoritmus 2-közelítő!

3. Írja le a kupacos rendezést. Mennyi a kupacos rendezés lépésszáma n rendezendő elem esetén és miért? (A kupacműveleteket nem kell részletesznie, ezek lépésszámát nem kell belátnia.)

4. Éllistájával adott egy irányított, élsúlyozott gráf, melyben nincsen negatív kör. Adjon $O(n^4)$ lépésszámú algoritmust egy olyan kör megkeresésére, ami a legalább három élből álló körök között a legrövidebb összsúlyú.

5. Egy város úthálózata egy élsúlyozott irányítatlan gráf írja le, ami mátrixos formában adott. Az élek súlyai a csomópontok között vezető közvetlen utak felújítási költségét adják meg. A város polgármestere fel szeretné újítani a házától a városházára vezető legrövidebb utat, de hogy ez ne legyen nagyon feltűnő, ezért egy nagyobb útfelújítást tervez. Mely éleknek megfelelő szakaszokat kellene felújítani, ha annak kell teljesülnie, hogy:
   (i) bárhonnan bárhova el lehet jutni felújított úton (hogy mindenki örüljön a városban)
   (ii) a polgármester házától a városházára vezető legrövidebb út minden része fel lesz újítva
   (iii) a fenti két feltételt betartva a legkisebb költségű felújítást szeretnénk.
   Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ahol n a gráf pontjainak száma. (Az ismert, hogy a felújítandó legrövidebb út mely élekből ál össze, ezt nem kell megkeresnünk).

6. Kettős hash-elést használva akarunk beszúrni elemeket egy kezdetben üres, 11 elemű hash táblába. Első hash függvénynek a K mod 11 függvényt, második hash-függvénynek az
1+(K mod 6) függvényt választjuk. Hogyan változik a tábla a $3, 6, 14, 9, 25$ kulcsok ezen sorrendben történő beszúrása során?

7. Magyarázza el, hogy melyik ismert NP-teljes feladat egészértékű lineáris programozási feladatként való megfogalmazása a következő:
Adott $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n, C$ egész számok esetén maximalizáljuk $(x_1a_1+x_2a_2+\ldots x_na_n)$-t a következő feltételek mellett: $0 \leq x_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén, továbbá $\sum_{i=1}^{n} x_ib_i \leq C$.

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Van-e olyan 2014 olyan csúcsa G-nek, melyre igaz, hogy a G-ből ezen csúcsok elhagyásával keletkező gráfban van Hamilton-kör?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 12.

1. Ebben a feladatban kupacokkal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mi a kupactulajdonság? Mi a kapcsolat egy kupac fás és tömbös reprezentációja között? Hogyan kell megvalósítani a MINTÖR műveletet fás reprezentáció esetén?

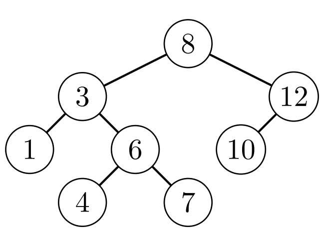
2. Írja le a Bellman-Ford algoritmus (legkisebb összsúlyú utak megtalálása egy pontból mindenhova) lényegét alkotó rekurziós formulát, magyarázza el a benne szereplő jelöléseket és indokolja meg, hogy a formula miért helyes.

3. Adja meg az alábbi eldöntési problémák pontos definícióját: MAXKLIKK, PARTÍCIÓ, PRÍM. Lássa be egyikükről, hogy NP-beli és lássa be egyikükről, hogy $coNP$-beli!

4. Egy n-szer n-es táblázat minden mezője egy egész számot tartalmaz (negatív számok is lehetnek). A bal felső sarokból szeretnénk a jobb alsó sarokba eljutni úgy, hogy egy lépésben vagy egy sorral lejjebb vagy egy oszloppal jobbra lépünk. Egy ilyen út értéke az úton szereplő számok szorzata. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust a legnagyobb értékű út megkeresésére.

5. Adott két, egész számokat tartalmazó tömb: $A[1:n]$ és $B[1:m]$, ahol $n \leq m$. (Az egyes tömbökön belül nincs ismétlődés.) Adjon $O(m \log n)$ lépést használó algoritmust, ami meghatározza, hogy hány olyan szám van, ami mindkét tömbben benne van!

6. Az alábbi bináris keresőfából a bináris keresőfáknál tanult eljárással kitöröljük a 12-es kulcsot. Igaz-e, hogy a szükséges üres levelek beszúrása után a fa csúcsai piros és fekete színnel kiszínezhetők úgy, hogy egy piros-fekete fát kapjunk?



7. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi eldöntési probléma NP-teljességéből következne, hogy $P = NP$.

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G összefüggő komponenseinek száma legalább 17?

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G_1, G_2, G_3 irányítatlan gráfok

   Kérdés: Igaz-e, hogy G_1-nek van G_2-vel és G_3-mal izomorf részgráfja is?

Algoritmuselmélet vizsga

2014. június 19.

1. Mi a 2-3 fa definíciója? Milyen korlátok között mozoghat egy n kulcsot tároló 2-3 fa magassága? (Bizonyítani nem kell.)

2. Mondja ki és bizonyítsa be az összehasonlítás-alapú rendezések lépészámának alsó korlátjáról szóló tételt!

3. Írja le részletesen, hogy hogyan kell megvalósítani a beszúrást és a keresést kettős hash esetén!

4. Dijkstra algoritmusa nem feltétlenül találja meg a legrövidebb utat, ha van a gráfban negatív súlyú él. Bizonyítsa be, hogy ha egy irányított, élsúlyozott gráfban csak egyetlen negatív súlyú él van, ami ráadásul elvágóél (azaz elhagyásával nem minden pont érhető el az s kiindulópontból), akkor Dijsktra algoritmusa minden pontba helyesen találja meg a legrövidebb utakat az s kiindulópontból!

5. Az univerzumban számos helyen találhatók csillagkapuk, melyek között féregjáratokon lehet közlekedni. Bármely két csillagkapu között létesíthető kapcsolat, de ehhez energiára van szükség annál a kapunál, ahonnan a járatot indítjuk. Ismerjük tetszőleges két csillagkapura, hogy mekkora energia szükséges egy köztük vezető féregjárat indításához és azt is ismerjük, hogy az egyes csillagkapuknál mekkora energiaforrások állnak rendelkezésünkre. Ezen ismeretek birtokában határozzuk meg, hogy a Földön levő kettő csillagkapu valamelyikétől el tudunk-e jutni az Atlantiszon levő csillagkapuhoz és ha igen, akkor legalább hány féregjáratot kell ehhez használnunk egymás után.

6. Az alábbi szomszédossági listával adott gráfon (ahol x és y ismeretelen, nem feltétlenül egész élsúlyok) Prim algoritmusát futtattuk.
   $\mathbf{A}: B(1), C(x); \mathbf{B}: A(1), C(2), D(x); \mathbf{C}: A(x), B(2), D(y), E(y); \mathbf{D}: B(x), C(y), E(1);$
   $\mathbf{E}: D(1), C(y)$
   Mik lehetnek x és y lehetséges értékei, ha tudjuk, hogy az A csúcsból indított algoritmus az AB, BD, DE, BC éleket választotta ki, ebben a sorrendben.

7. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi eldöntési probléma NP-teljességéből következne, hogy $P = NP$.

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van 2014 független csúcs, úgy, hogy a gráf minden más csúcsa legfeljebb két éllel elérhető valamelyikből?

8. Igazolja, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-teljes:

   Input: G_1, G_2 irányítatlan gráfok és k pozitív egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy a két gráfnak van közös (egymással izomorf) k csúcsú részgráfja?

Algoritmuselmélet zárthelyi

2013. április 3.

1. Mi az a legkisebb r racionális szám, melyre teljesül, hogy $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}=O(n^r)$?

2. Egy $A[i,j]$ $n\times n$-es táblázat minden mezőjébe egy egész szám van írva (nem feltétlenül csak pozitívak). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a téglalap alakú része a táblázatnak, melynek bal felső sarka egybe esik a nagy táblázat bal felső sarkával és benne az elemek összege az (egyik) legnagyobb. (Vagyis olyan k,l-t keresünk, amire $\sum_{\substack{i\le k,\\ j\le l}} A[i,j]$ maximális.)
(Feltételezzük, hogy az alapműveletek bármekkora számokkal 1 lépésben elvégezhetőek.)

3. Kaphatjuk-e az $1,7,3,6,11,15,22,17,14,12,9$ számsorozatot úgy, hogy egy (a szokásos rendezést használó) bináris keresőfában tárolt elemeket posztorder sorrendben kiolvasunk?

4. Adjacencia-mátrixával adott n csúcsú, irányított gráfként ismerjük egy város úthálózatát. El szeretnénk jutni A pontból B pontba, de sajnos minden csomópontban várnunk kell a nagy hóesés miatt, a várakozás hossza minden csomópontra ismert és független attól, hogy merre akarunk továbbmenni. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy merre menjünk, hogy a lehető legkevesebbet kelljen várni összességében. *(A csómópontok közötti utak hosszának megtétele a várakozáshoz képest elhanyagolható időbe telik, tekintsük 0-nak. A-ban és B-ben nem kell várakozni.)*

5. Adjacencia-mátrixával adott n csúcsú, élsúlyozott, irányítatlan gráfként ismerjük egy ország úthálózatát (a csomópontok a városok, az élek a közvetlen összeköttetések a városok között). Az élek súlya a városok közti távolságot adja meg. (Feltehetjük, hogy a távolságok egészek.) Adjon $O(n^6)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e úgy kiválasztani öt várost, hogy ezektől bármely más város legfeljebb 50 kilométerre van. *(Ezekbe a városokba lenne érdemes hókotrókat telepíteni.)*

6. Egy tömbben adott n darab 0-tól különböző egész szám (lehetnek negatívak is köztük) és adott egy k egész szám is. Adjon $O(n\log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy melyik az a k elem a tömbben, melyek szorzata maximális.

7. Az $A[1..2013]$ tömbben egy kupac adatstruktúrát tárolunk, minden tárolt elem különböző. Tudjuk, hogy ebben a kupacban a legnagyobb elem $A[i]$. Határozza meg i összes lehetséges értékét!

8. Igaz-e, hogy egy piros-fekete fa tetszőleges belső fekete csúcsához tartozó részfa (az a részfa, aminek ez a fekete csúcs a gyökere) is egy piros-fekete fa? Igaz-e ugyanez egy tetszőleges belső piros csúcshoz tartozó részfára?

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2013. május 23.

1. Tudjuk, hogy az $f(n),g(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n)=\Omega(\log n)$ és $g(n)=\Theta(n^4)$. Lehetséges-e, hogy
(a) $f(n)=\Theta(g(n))$?
(b) $g(n)=O(f(n))$?
(Ez két, egymástól függetlenül megválaszolandó kérdés.)

2. Távmunkában fogunk dolgozni mostantól n napon át. Nem kell minden nap bejárnunk, de az alábbi három feltételt be kell tartanunk :
(i) két egymást követő benti munkanap között legfeljebb k nap telhet el,
(ii) az n nap során legfeljebb egyszer maradhatunk pontosan k napig távol,
(iii) az első és az n. napon be kell mennünk.
Sajnos a kék metróval járunk dolgozni, ami hol jár, hol nem, de szerencsére megjósolták nekünk, hogy a következő n napban mely napokon lesz üzemzavar, ezeken a napokon nem akarunk dolgozni menni (az első és az utolsó napon nem lesz üzemzavar).
Adjon algoritmust, ami a jóslás eredményének ismeretében $O(nk)$ lépésben meghatározza, hogy legkevesebb hány bemenéssel tudjuk megúszni ezt az n munkanapot.

3. Egy iskola minden osztályában anyák napi ünnepséget szeretnének tartani, az ünnepségeknek délután öt órakor kell kezdődniük. Az iskolába azonban testvérpárok is járnak, ezért azt szeretnék elérni, hogy a testvérek ünnepségei ne egy napon legyenek. Adjon algoritmust, ami annak ismeretében, hogy ki kinek a testvére és melyik gyerek melyik osztályba jár, eldönti, hogy lehetséges-e két napra elosztani az összes ünnepséget. Az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$ legyen, ha az iskolában n osztály van. (Egy osztályban legfeljebb 32 gyerek van, inputként a testvérpárok listáját kapjuk, ezen jelezve van, hogy melyik testvér melyik osztályba jár.)

4. Hány éle van legalább annak a 6 pontú, egyszerű, irányítatlan gráfnak, melyen a Dijkstra algoritmust futtatva a D tömb kezdetben így néz ki: 0, 2, 5, 1, ∞, 7; a végén pedig így néz ki: 0, 2, 4, 1, 10, 7? Mutasson egy konkrét példát a szélsőértéket elérő gráfra és lássa be, hogy ez valóban szélsőérték.

5. Egy kupac elemeit preorder bejárás szerint kiolvasva az alábbi számsorozatot kapjuk: 1, 17, 19, 21, 22, 31, 37, 2, 8, 3. Rekonstruálható-e ebből a kupac?

6. Egy k elemű számhalmaz mediánján a rendezés szerinti $\lceil k/2 \rceil$-edik elemet értsük. Tervezzen olyan adatstruktúrát, amiben n elem tárolása esetén a BESZÚR és MEDIÁNTÖRÖL értelemszerű eljárások minden esetben végrehajthatóak $O(\log n)$ lépésben.

7. Egy bináris keresőfában n különböző egész számot tárolunk. Adjon algoritmust, ami $O(n)$ lépésben eldönti, hogy van-e a tárolt számok között két olyan, melyek különbsége 2013.

8. Egy piros-fekete fában minden gyökértől különböző belső csúcs színét ellentétesre változtattuk és így is egy piros-fekete fát kaptunk. Jellemezze azokat a piros-fekete fákat, amikre ez megtörténhetett!

Algoritmuselmélet vizsga

2013. május 30.

1. Ebben a feladatban a Floyd algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. (A Floyd-algoritmus egy gráfban minden pontpárra meghatározza a köztük levő legrövidebb út hosszát.)
(a) Mit jelöl az F_k mátrix $F_k[i,j]$ eleme?
(b) Hogyan kell kiszámolni az F_{k-1} mátrixból az F_k mátrixot?
(c) Igazolja, hogy ez a kiszámítási mód helyes!
(d) Mennyi a lépsszáma a (b) lépés egyszeri végrehajtásának? (A lépésszámot nem kell igazolni.)

2. Adja meg a 2-3 fa definícióját! Adjon felső becslést a fa szintszámára n tárolt elem esetén, állítását bizonyítsa is!

3. Adjon meg egy MAXKLIKK$\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót és mutassa meg, hogy ez valóban Karp-redukció!

4. Van egy tábla ($n \times m$ kockából álló) mogyorós csokink. Az A $n \times m$-es mátrixban adott, hogy az egyes kockákban hány mogyoró van (a mogyorók nem lógnak át egyik kockából a másikba). Két gyerek akar osztozkodni a csokin, úgy, hogy a csokit kétfelé törik (egyenes vonal mentén, párhuzamosan a tábla valamelyik szélével). Egy osztozkodás igazságtalansági faktorát a következőképpen kaphatjuk: ha az egyik darabban k_1 kocka csoki és m_1 darab mogyoró van, a másikban pedig k_2 kocka csoki és m_2 darab mogyoró, akkor az igazságtalansági faktor $|(k_1 + m_1) - (k_2 + m_2)|$.
   Adjon $O(nm)$ lépést használó algoritmust, ami eldönti, hogy melyik szétosztásnak a legkisebb az igazságtalansági faktora. (Egy lépésnek számít, ha kiolvasunk egy értéket az A mátrixból vagy ha összeadást illetve kivonást hajtunk végre két számon.)

5. Egy algoritmus lépésszámáról tudjuk, hogy $T(n) = T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2)$ és tudjuk azt is, hogy $T(1) = T(2) = T(3) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $T(n) = O(n^2)$.

6. Egy ország n kis szigetből áll. Szeretnénk néhány hajójáratot indítani a szigetek között úgy, hogy bárhonnan bárhova el lehessen jutni (esetleg átszállással). Ehhez ismerjük bármely két szigetre, hogy mennyibe kerül egy évben a hajójárat fenntartása közöttük illetve azt is tudjuk, hogy mekkora az itt várható éves bevétel. Adjon algoritmust, ami ezen adatok ismeretében $O(n^2)$ időben meghatározza, hogy hol indítsuk el a hajójáratokat, ha a lehető legnagyobb várható éves hasznot (vagy a lehető legkisebb veszteséget) szeretnénk elérni. (Egy szigeten egy hajóállomás van csak.)

7. Igaz-e, hogy ha egy X eldöntési problémáról be tudnánk látni, hogy $X \in NP \setminus P$ (vagyis X NP-ben van, de nincs P-ben), akkor 3-SZÍN$\notin P$?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy mind a G-ben található legnagyobb független ponthalmaz, mind a G-ben található legnagyobb klikk is pontosan 2013 csúcsot tartalmaz?

Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 6.

1. Ebben a feladatban a mélységi bejárással kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia.
   (a) Adja meg a keresztél definícióját!
   (b) A mélységi bejárás során hogyan lehet a mélységi és a befejezési számok alapján felismerni a keresztéleket?
   (c) Bizonyítsa be, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárásánál nincsenek keresztélek!

2. Milyen műveletek vannak a nyitott címzésű hash-elésnél? Hogyan kell megvalósítani a keresést, ha a nyitott címzésű hashelésnél kvadratikus maradék próbát használunk?

3. Adja meg az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet definícióját! (A fákkal való implementálást nem kell leírnia.) Mutassa meg, hogy mikor és hogyan használjuk az UNIÓ és a HOLVAN műveleteket a Kruskal algoritmusban!

4. Pista bácsi fel akar ugrálni egy n hosszú, fekete illetve fehér fokokból álló csigalépcsőn. Legfeljebb k fokot tud ugrani, de arra vigyáznia kell, hogy páros (≥ 2) sok foknyi ugrás után páratlan sokat és páratlan sok után mindig páros (≥ 2) sokat ugorjon. Adjon $O(nk)$ lépésszámú algoritmust, amely megmondja, hogy fel tud-e úgy ugrálni a csigalépcső tetejére, hogy csak egyféle színű lépcsőfokokat használ. (A lépcső fokai rendszertelenül vannak színezve, a színezést ismerjük.)

5. A hátizsákprobléma órán tanult algoritmusát futtattuk egy konkrét inputon, melyben 3 tárgy szerepel. Mi lehetett ez a konkrét input, ha az alábbi táblázat keletkezett?

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	10	10	10	10
2	0	0	5	5	10	10	15	15
3	0	0	5	5	13	13	18	18

6. Egy irányítatlan, élsúlyozott gráf az alábbi éllistával adott (zárójelben az élsúlyok): **A**:$B(1), D(3), E(2)$; **B**:$A(1), C(3), E(1)$; **C**:$B(3), D(y), E(3)$; **D**:$A(3), C(y), E(x)$; **E**:$A(2), B(1), C(3), D(x)$.
(a) Mi lehet x és y értéke, ha tudjuk, hogy az élsúlyok egész számok és azt is tudjuk, hogy a B csúcsból indított Prim-algoritmus az alábbi sorrendben vette be az éleket: BE, ED, BA, BC.
(b) Mely éleket és milyen sorrendben választja ki a Kruskal-algoritmus? (Ha több lehetséges megoldás is van, akkor az összeset adja meg.)
(Az algoritmusok egyenlő élsúlyú élek közül véletlenül választanak.)

7. Létezik-e olyan X eldöntési probléma, amire $X \notin NP$ és $X \prec SAT$ egyszerre fennáll?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:
Input: irányítatlan G gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben vagy van Hamilton-út vagy G 3 színnel színezhető?

Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 13.

1. Tegyük fel, hogy $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit jelent az, hogy $f(n) = \Omega(g(n))$? Mit jelent az, hogy $g(n) = O(f(n))$? Adjon részletes bizonyítást arra, hogy $n^4 + 5n^3 = O(n^5)$.

2. (a) Az $A[1:n]$ tömb elemeinek rendezésére mikor használhatunk ládarendezést?
(b) Írja le a ládarendezés algoritmusát és adja meg a lépésszámát! (Bizonyítani nem kell.)

3. Ebben a feladatban a Prim algoritmus naív (tömbös) implementációjával kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mi az algoritmus során használt (az órán KÖZEL és MINSÚLY nevű) tömbök jelentése? Hogyan kell ezeket inicializálni? Hogyan kell ezeket a tömböket az algoritmus futása során frissíteni?

4. Adott egy élsúlyozott irányítatlan G gráf, mely nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. A Floyd algoritmussal meghatározzuk az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát és közben azt tapasztaljuk, hogy a mátrix csak minden második frissítés során változik. Milyen felső becslést adhatunk ez alapján a kapott legrövidebb utak élszámára?

5. Városunkban trafikok fognak nyílni, összesen $3n$ darab, ezekre pályázatot írtunk ki. A pályázók között van n barátunk, azt szeretnénk, ha mindegyikőjük pontosan 3 trafikot kapna (nem mindenki pályázott mindenhova). Adjon algoritmust, ami annak ismeretében, hogy melyik barátunk melyik trafikokra pályázott $O(n^3)$ lépésben eldönti, hogy eloszthatók-e a trafikok a fenti feltételekkel és ha igen, akkor javasol is egy elosztást.

6. Építsünk piros-fekete fát a következő elemek egymás utáni beszúrásával: $21, 32, 15, 64, 75$.

7. Lehetséges-e, hogy valamely X eldöntési problámára $X \in NP$ és $HAM \prec X$ egyszerre fennálljon?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:

   Input: irányítatlan G gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G csúcsai lefedhetők két (nem feltétlenül azonos csúcsszámú) pontdiszjunkt teljes gráffal?

Algoritmuselmélet vizsga

2013. június 20.

1. Írja le a kupacépítés algoritmusát. (Az építés során használt segédeljárásokat is írja le részletesen). Mennyi a kupacépítő eljárás lépésszáma, ha n elemből építünk kupacot? (A lépészámot nem kell igazolni.)

2. Egy irányított gráfról mélységi bejárás segítségével szeretnénk eldönteni, hogy DAG-e. Mondja ki és bizonyítsa be a kapcsolódó tételt.

3. Írja le a piros-fekete fa definícióját!

4. A következő n munkanap mindegyikén egy-egy munka érkezik hozzánk. Ha az i. munkát elvállaljuk, akkor azzal h_i forintot keresünk, de a munka elvégzéséhez n_i napra van szükségünk és így a munkafelvételi napot követő $n_i - 1$ napon nem tudunk újabb munkát elvállalni (ha egy munkát nem vállalunk el aznap, amikor érkezik, akkor arról végleg lemaradunk). Adjon algoritmust, ami a h_i, n_i értékek ($1 \leq i \leq n$) ismeretében $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy mely munkákat vállaljuk el, hogy a hasznunk maximális legyen. (Az nem baj, ha az utolsó munka elvégzése nem fér bele az n napba.)

5. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányítatlan gráf írja le. A gráf csúcsai a csomópontoknak, az élek pedig a csomópontok közötti közvetlen utaknak felelnek meg, a mátrix megadja bármely két csomópontra az utazási időt autóval a közvetlen úton.

   Adott két (nem feltétlenül szomszédos) csomópont, A és B, azt szeretnénk elérni, hogy nehezebb legyen A-ból B-be eljutni (azaz a leggyorsabb eljutási idő nőjön), ehhez egyetlen csomópont-pár között vezető közvetlen utat egyirányúvá tehetünk. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy lehetséges-e ez (és ha igen, akkor javasol is egy olyan pontpárt, ahol az egyirányúsítást érdemes megtennünk.)

6. Gyorsrendezéssel akarunk rendezni, a rendezendő elemek száma $5m^4 \log m$.

   Igaz-e, hogy ekkor átlagosan $O(m^6)$ az összehasonlítások száma?

7. Jelölje $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a következő eldöntési problémákat. Következik-e $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$-ból az, hogy P=NP?

   $\mathcal{A}$:

   Input: irányítatlan G gráf, k szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van k csúcsú teljes részgráf?

   $\mathcal{B}$:

   Input: G páros gráf, k szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben van k élű párosítás?

8. P-ben van vagy NP-teljes az alábbi eldöntési probléma:

   Input: irányítatlan, n csúcsú G gráf és egy $k < n$ egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G olyan különleges, hogy G-ben van k független csúcs és G csúcsai 3 színnel színezhetők?

Algoritmuselmélet zárthelyi
2012. március 26.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n)$ pozitív értékeket felvevő függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$. Következik-e ebből, hogy $2012^{\log n} + f(n) = O(\frac{1}{2012}n^{2012} + g(n))$?

2. Egy w méter széles folyón szeretnénk átkelni a folyó medrébe lerakott n darab cölöp segítségével. A cölöpök a folyó két partja között, a folyó partjára merőleges egyenes vonalban helyezkednek el, $0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n < w$ méterre a kiindulási parttól (w és az összes x_i távolság egész szám). Az első lépésben egy métert ugorhatunk, utána pedig az igaz, hogy minden ugrás vagy pontosan egy méterrel nagyobb vagy pontosan egy méterrel kisebb, vagy ugyanakkora, mint az előző. Adjunk algoritmust, ami az x_i számok ismeretében $O(nw)$ lépésben eldönti, hogy át tudunk-e jutni a túlsó partra anélkül, hogy a vízbe esnénk.

3. Egy városban 17 busztársaság közlekedik, az egyes társaságok buszait csak a társaság saját buszbérletével lehet használni. Nekünk maximum két társaság bérletére van pénzünk (a bérletek ugyanannyiba kerülnek). A város buszhálózatát ismerjük: bármely két megállóra adott, hogy van-e közöttük közvetlen járat (amelyik közben nem áll meg máshol) és ha igen, akkor melyik társaság üzemelteti (lehet több társasásgnak is járata ugyanott). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú eljárást, ami n buszmegálló esetén eldönti, hogy melyik két bérletet vegyük meg, hogy a lehető legtöbb buszmegállóba el tudjunk jutni a lakásunkhoz legközelebb eső megállóból gyaloglás nélkül. (Az átszállások számára nincs korlátozás.)

4. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 6$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = -2$, $s(D, C) = -4$, $s(D, E) = -2$, $s(E, F) = 4$.
Futtassa ezen a gráfon a Bellman-Ford algoritmust az A csúcsból vett legrövidebb utak hosszának meghatározására.

5. Egy szalagon $n = 2^k$ különböző súlyú csomag várakozik, ezeket szeretnénk sorbarendezni súly szerint növekvően. Két eszközünk van ehhez: egy mérlegelő szerkezet, ami a sorban elöl álló és egy tetszőleges másik csomagról megmondja, hogy melyik a nehezebb (anélkül, hogy a csomagok helyzetén változtatna) és egy daru, ami tetszőleges csomagot a sor végére tud rakni (ekkor persze a hátrarakott csomag utáni csomagok mind egy-egy hellyel előrébb csúsznak). Adjon olyan eljárást, ami a fenti két műveletből $O(nk)$-t használva sorbarakja az $n = 2^k$ csomagot. A fenti két eszközön kívül mást nem tehetünk a csomagokkal, pl. nem rakhatjuk le őket a szalagról, nem mérhetjük meg egyesével a súlyukat, de azt pl. nyilvántarthatjuk, hogy melyik csomagokat mozgattuk eddig.

6. Építsen kupacot az órán tanult (lineáris idejű) kupacépítő algoritmussal az alábbi tömbből: $17, 12, 13, 8, 4, 2, 1$. Minden lényegi lépés után adja meg az aktuális állapotot és jelezze, hogy miért történt változás.

7. Egy bináris keresőfában 100-nál kisebb, különböző egész számokat tárolunk. Egy keresés során az alábbi számokat láttuk (ebben a sorrendben): $7, x, 8, 97, 20, 10$. Mik x lehetséges értékei?

8. Egy piros-fekete fában az $1, 2, \ldots, 10$ egész számokat tároljuk. Mely számok állhatnak a fa gyökerében?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. május 24.

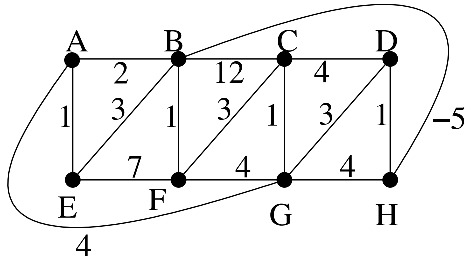
1. Mikor mondjuk az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekről, hogy $f(n) = O(g(n))$? Igazolja, hogy ha $f(n) = O(g(n))$, akkor $g(n) = \Omega(f(n))$.

2. Írja le, hogy hogyan történik a beszúrás a nyitott címzésű hash-elésnél, ha kettős hash-elést használunk!

3. Hogyan zajlik a BESZÚR eljárás a kupacoknál? Mennyi az eljárás lépésszáma n elemet tartalmazó kupac esetén és miért? (Az indoklás során a kupac magasságára vonatkozó állítást is igazolja.)

4. Egy folyó mellett két város terül el egymással szemben, a városok úthálózata egy-egy adjacencia mátrixával adott irányított gráf, a két városban összesen n csomópont van. A városok vezetése gyalogoshidat tervez építeni a folyón át (jelenleg semmilyen híd sincs), szavazni lehet, hogy ki hol szeretné látni a hidat, ehhez adott a lehetséges hidak listája (két folyóparti csomópont között legfeljebb egy terv van). Úgy szeretnénk szavazni, hogy az egyik városban levő A csomópontbeli lakásunkból a másik városban fekvő B csomópontbeli egyetemünkre minél gyorsabban el tudjunk jutni gyalog. Ismerjük a két városon belül a csomópontok közti gyaloglási időinket és azt is, hogy a potenciális hidakon milyen gyorsan tudnánk átgyalogolni. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben meghatározza, hogy melyik gyalogoshídra adjuk a szavazatunkat.

5. Milyen sorrendben veszi be az E pontból futtatott Prim algoritmus az éleket a minimális feszítőfába az alábbi gráfban?



6. Tegyük fel, hogy $coNP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat NP-beli?

   Input: G irányítatlan gráf és egy k egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G nem színezhető k színnel?

7. Igazolja, hogy a következő döntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben létezik legalább $\frac{v(G)}{2012}$ hosszú út?

   (Itt $v(G)$ a gráf csúcsainak számát jelöli.)

8. Külföldi ösztöndíjakat szeretnénk megpályázni, ezekhez ajánlólevelekre van szükségünk. Összesen n helyre adunk be pályázatot, minden pályázathoz két ajánlólevél szükséges. Ajánlólevelet m darab embertől tudunk kérni, de nem akarunk senkit sem túlságosan terhelni, ezért egy embertől legfeljebb egy ajánlólevelet akarunk kérni. (Az ajánlólevelek egyediek, egy levelet csak egy pályázatnál tudunk felhasználni.) Sajnos a pályázatok olyanok, hogy nem minden lehetséges ajánló személy jó minden helyre (azt tudjuk, hogy ki hova jó). Adjon algoritmust, ami $O((n+m)nm)$ lépésben javasol egy lehetséges megoldást!

Algoritmuselmélet vizsga
2012. május 31.

1. Írja le a ládarendezés algoritmusát! Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha n rendezendő egész számunk van, melyek az $[1, m]$ tartományba esnek? A lépésszámot indokolja is meg!

2. Piros-fekete fában mit értünk egy csúcs fekete-magasságán? Mondja ki és bizonyítsa be a magasság és a fekete-magasság közt fennálló összefüggéseket!

3. Adja meg a MAXKLIKK és RÉSZGRÁFIZO problémák pontos definícióját és adjon meg egy MAXKLIKK $\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót! (A Karp-redukció jóságát nem kell igazolni.)

4. Egy nagy nyári fesztiválon több helyszínen zajlanak a programok, összesen n esemény van. Előre eldöntjük, hogy mik érdekelnek minket és azt is eldöntjük, hogy amire elmegyünk, azon az elejétől a végéig ott leszünk. Tudjuk, hogy melyik program mikor kezdődik és végződik (tegyük fel, hogy csúszás nincs) és ismerjük azt is, hogy a helyszínek között mennyi idő alatt lehet átérni. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a minket érdeklő programok közül kiválasztja a lehető legtöbbet, amin részt tudunk venni.

5. Egy 2-3 fában az alábbi kulcsokat tároljuk: $1, 5, 7, 8, 12, 13, 20, 21$, a levelek feletti szinten a csúcsoknak (balról jobbra haladva) $3, 3, 2$ levelük van.
   (a) Rajzolja fel a 2-3 fát, adja meg a belső csúcsokban levő címkéket is!
   (b) Szúrja be a fába a 6-ot, adja meg az így kapott fát (a belső csúcsokban levő címkéket is)!

6. Egy város úthálózatát egy adjacenciamátrixával adott irányítatlan, n csúcsú gráf írja le. A város útjai kivétel nélkül felújításra szorulnak, minden élre adott a megfelelő útszakasz felújítási költsége. Szerencsére a város annyi pénzt igényelhet útfelújításra, amennyit csak akar, de az összes tervezett útfelújítást egyszerre kell elvégezni és ha egy útszakaszon dolgoznak, akkor az az él nem használható. Szeretnénk a lehető legnagyobb költségű felújítást megtalálni azzal a feltétellel, hogy a városnak járhatónak kell maradnia eközben, azaz bármely két csúcs között kell, hogy legyen út felújítás alá nem eső élekből. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ időben talál egy ilyen felújítást!

7. Jelölje Y az alábbi eldöntési feladatot:

   Input: G irányítatlan gráf és egy k egész szám

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben nincsen k-fokú csúcs?

   Lehetséges-e, hogy $NP \neq P$ és $Y \prec RH$ egyszerre fennáll?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: G irányítatlan gráf és G egy kijelölt v csúcsa

   Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy v szomszédainak színei között a v csúcsától különböző összes többi 3 szín előfordul?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. június 7.

1. Írja le a beszúrásos rendezés bináris keresést használó változatának algoritmusát! Hány összehasonlítást és hány mozgatást használ az algoritmus n rendezendő elem esetén? A lépésszámokat bizonyítsa is be! (A bináris keresés lépésszámát fel lehet használni bizonyítás nélkül.)

2. Ebben a feladatban a piros-kék algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Mit jelent az, hogy egy színezés takaros? Mondja ki a kék szabályt és mutassa be, hogy a Prim algoritmusban hogyan használjuk a kék szabályt!

3. Írja le a Bellman-Ford algoritmus lényegét adó rekurziós formulát és magyarázza el a benne szereplő összefüggést!

4. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányított gráf írja le. A gráf egyik csúcsában levő állatkertből öt elefánt szökött meg, ezeket szerencsére elfogták, a város öt különböző pontján tartják őket ketrecben. Szeretnénk egy elefánt-szállító autóval mindet begyűjteni, de az elefántok és az autó is nehéz, nem minden úton tudunk vele haladni. Minden élre ismert, hogy ott hány elefánttal tudunk közlekedni és ismert az élhez tartozó út hossza is. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy be tudjuk-e egy körben gyűjteni az összes elefántot (az állatkertből indulva és öt elefánttal oda visszaérkezve) és ha ez lehetséges, akkor javasol is egy lehetséges legrövidebb útvonalat. (Ha egy elefántot felvettünk, akkor azt csak az állatkertben engedjük ki.)

5. Javasoljon adatszerkezetet nagy létszámú szóbeli vizsgán felkészülés közben levő hallgatók nyilvántartására. A következő három műveletet van:
TÉTELT_KAP(X, T): bejegyzi, hogy az X Neptun-kódú hallgató T időpontban tételt kapott (egy időpontban egy ember kap csak tételt)
KÖVETKEZŐ: a legrégebben készülő hallgató Neptun-kódját adja meg
VIZSGÁZNI_MEGY(X): X kódú hallgatót kiveszi a felkészülő hallgatók közül (nem mindig a legrégebben készülő hallgató megy vizsgázni)
Ha n felkészülő hallgató van, akkor a KÖVETKEZŐ művelet lépésszáma legyen $O(1)$, a másik kettőé $O(\log n)$.

6. Hajtsa végre az A csúcsból a mélységi bejárást az alábbi éllistával megadott irányított gráfon, rajzolja fel a kapott feszítőfát és osztályozza a gráf éleit! A gráf éllistája **A**:D, E; **B**:A, G; **C**:D, G; **D**:B, F; **E**:C; **F**: B; **G**:D.

7. Jelölje Y az alábbi eldöntési feladatot:

   Input: G irányítatlan gráf

   Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben nincsen 2012 elemű független csúcshalmaz?

   Igaz-e, hogy ha SAT$\prec$ Y fennál, akkor $P \neq NP$?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

   Input: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n \mid s_i \in \mathbb{Q}^+ \text{ minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén}\}$

   Kérdés: Igaz-e, hogy létezik olyan diszjunkt $S = S_1 \cup S_2 \cup \{s_i\}$ felosztása a számoknak, hogy az S_1-beli számok összege megegyezik az S_2-beli számok összegével?

Algoritmuselmélet vizsga
2012. június 14.

1. Az alábbi feladatban a Dijkstra algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. Hogyan (mikor) kerül egy elem a KÉSZ halmazba? Hogyan frissítjük a D tömböt, miután egy x csúcs a KÉSZ halmazba került?

2. Írja le, hogy hogyan kell elemet törölni egy 2-3 fából! Mennyi a művelet lépésszáma, ha a fában n elemet tárolunk? (A lépésszámot nem kell igazolni.)

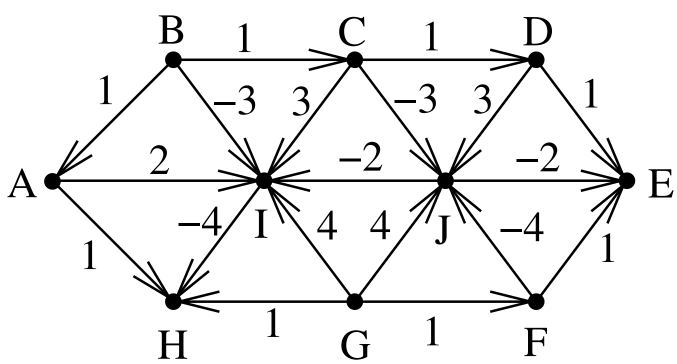
3. Adja meg a 3-SZÍN és a MAXFTLEN eldöntési problémák pontos definícióját és adjon meg egy 3-SZÍN$\prec$ MAXFTLEN Karp-redukciót! (A Karp-redukció helyességét nem kell igazolni.)

4. Két utazóügynök érkezik Csillagvárosba üzleti útra. A város úthálózatát egy $n + 1$ csúcsú irányítatlan gráf írja le, ahol a központi v_0 ponthoz a $v_1, \dots, v_n$ pontok egy-egy éllel csillagszerűen kapcsolódnak, a városban más út nincs. Minden (v_0, v_i) élre ismert, hogy hány (egész) percig tart végigutazni rajta (bármelyik irányban), illetve minden v_i $(1 \leq i \leq n)$ csúcshoz

tartozik egy h_i (egész) szám is, ekkora bevételt lehet elérni az adott csúcs meglátogatásával (a látogatás pillanatszerű).
Az ügynökök egymástól függetlenül haladnak, de útjukat mindketten a v_0 csúcsból indítják és ott is fejezik be, egy v_i $(1 \leq i \leq n)$ csúcsba legfeljebb az egyikük látogathat el és legfeljebb egyszer. Az utazásra összesen fejenként T perc (T pozitív egész) áll rendelkezésükre. Javasoljon $O(nT^2)$ költségű algoritmust, amely meghatározza a kettejük által közösen elérhető maximális bevételt!

5. Éllistával adott egy irányítatlan élsúlyozott G gráf és benne egy kijelölt v csúcs. Javasoljon $O(e \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy létezik-e olyan minimális súlyú feszítőfa G-ben, amelyben a v csúcs elsőfokú, és ha létezik, akkor meg is ad egy ilyet.

6. Az alábbi irányított G gráfnak
(a) adja meg egy topologikus sorrendjét, majd
(b) határozza meg minden csúcsra a B csúcsból oda vezető leghosszabb út hosszát!



7. Tegyük fel, hogy $NP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat coNP-beli?

Input: G irányítatlan, páros gráf

Kérdés: Igaz-e, hogy G-ben létezik két éldiszjunkt maximális párosítás?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!

Input: G irányítatlan gráf

Kérdés: Igaz-e, hogy G csúcsait két diszjunkt halmazra lehet osztani úgy, hogy a két halmazon belül összesen legfeljebb 2012 él fut?

Algoritmuselmélet zárthelyi
2011. március 28.

1. Egy problémára két algoritmusunk van.

   Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

   A $\mathcal{B}$ az $n \geq 2$ méretű problémából 3 lépéssel 4 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan. Az $n = 1$ esetben mindkét eljárás 1 lépést használ.

   Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre a gyorsabb?

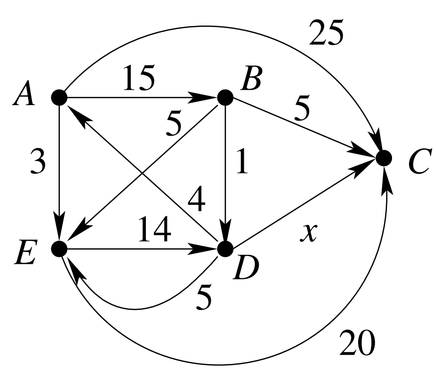
2. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.

   Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet $O(b^2)$ lépésben eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

3. Az A tömb n különböző egész számot tartalmaz, $A[1] < A[2] < \cdots < A[n]$. A B tömb is n egész számot tartalmaz, és tudjuk, hogy $A[i] \leq B[i] \leq A[i] + 2$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Hogyan lehet a B tömböt $O(n)$ összehasonlítással rendezni?

4. Egy játékban 4 számláló értékét lehet állítgatni. Mindegyik a $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazból vesz fel értéket. Egy lépésben egyetlen számláló értékét tudjuk változtatni, az i értékből $i + 1 \pmod n$ vagy $i - 1 \pmod n$ lehet. Adott a kezdeti pozíció (A_1, A_2, A_3, A_4) és a cél (B_1, B_2, B_3, B_4), valamint tiltott pozícióknak egy listája. Adjon algoritmust, amely $O(n^4)$ időben meghatározza a minimális lépésszámot, amivel a kezdőpozícióból eljuthatunk a célba úgy, hogy közben egyetlen tiltott pozíciót sem érintünk.

5. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfon az A pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében! Az algoritmus minden lépése után írja fel az úthosszakat tartalmazó tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit!



   Milyen x értékre szerepel a neki megfelelő él valamelyik legrövidebb útban?

6. Egy kupacban 7 elemet tárolunk. Hol helyezkedhet el a rendezés szerinti középső elem?

7. Egy bináris keresőfában az $1, 2, 3 \ldots, 2^k - 2$ elemeket tároljuk. Tudjuk, hogy a fa egy teljes bináris fa. Be akarjuk illeszteni a 0 számot is a fába úgy, hogy a végén megint olyan bináris keresőfát kapjunk, ami teljes bináris fa. Igazolja, hogy ehhez az összes elemet el kell mozgatni a fában!

8. Egy piros-fekete fában a 2010, 42, 100π, 1848, 3 elemeket tároljuk úgy, hogy a gyökérben levő elem a 42. Hogyan nézhet ki a fa? (Adja meg az összeset és indokolja meg, hogy más nincs!)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. május 26.

1. Definiálja, hogy mit nevezünk kupacnak és írja le a KUPACÉPíTÉS eljárást! Mennyi az eljárás lépésszáma? (Indokolás nem kell.)

2. Írja le a gyorsrendezés algoritmusát! Milyen becslés ismert az algoritmus lépésszámára a legrosszabb, illetve átlagos esetben? (Indokolás nem kell.)

3. Írja le a Prim-algoritmust és indokolja meg, hogy ez piros-kék algoritmus!

---

4. Egy $\mathcal{A}$ algoritmus az $n > 4$ hosszú bemenetek esetén 1 lépésben 8 darab $n-4$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan. Tudjuk még, hogy ha $n \leq 4$, akkor a lépésszám legfeljebb 5. Következik-e ebből, hogy az $\mathcal{A}$ lépésszáma
(a) $O(2^n)$? (b) $O(n^{\log n})$?

5. Egy 11 méretű hash-táblába kettős hash-elést alkalmazva szúrja be a 10, 22, 32, 4, 15, 28, 17 számokat a megadott sorrendben! Legyen a hash-függvény és a másodlagos hash-függvény
$$h(x) = x \pmod{11}, \qquad h'(x) = x \pmod{10} + 1.$$
A tábla állapotát minden beszúrás után adja meg!

6. P-beli vagy NP-teljes az az eldöntési probléma, melynek bemenete az $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b, k pozitív egészek, és az a kérdés, hogy b előáll-e legfeljebb k darab különböző a_i összegeként?

7. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, melynek az élei pozitív számokkal vannak súlyozva. Olyan maximális súlyú részgráfját keressük, mely közös csúcs nélküli körökből áll és G minden csúcsát tartalmazza. Fogalmazza meg a problémát egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

8. Egy konferencián egy időben két előadás folyhat, az egyik egy nagyobb, a másik egy kisebb teremben. Minden előadás egész órakor kezdődik, egy órát tart. Az előadások várható népszerűsége alapján már adott, hogy melyik előadás melyik terembe kerül, ezen nem változtathatunk. Témaütközések miatt bizonyos előadáspárokat a szervezők nem akarnak azonos időpontra tenni. Az megengedett, hogy egy időben csak egy előadás menjen, de a szervezők az egész konferencia hosszát (az előadásokkal töltött órák számát) a lehető legkisebbnek szeretnék. Adjon meg egy polinom idejű algoritmust amivel a szervezők előállíthatnak egy, a feltételeknek megfelelő beosztást!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 2.

1. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust! Mi az alkalmazásának feltétele? (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.)

2. Definiálja az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet, és írja le, hogyan lehet fákkal megvalósítani! Mennyi lesz ebben az esetben az egyes műveletek lépésszáma? (Indokolni nem kell.)

3. Definiálja a Karp-redukciót, és igazolja, hogy ez tranzitív!

---

4. Legyen $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3n$, ha $n \geq 2$ és $f(1) = 1$. Mi az a legkisebb c, amelyre $f(n) = O(n^c)$?

5. Egy $n > 2$ elemet tároló piros-fekete fa kicsit megsérült. Minden adott róla, kivéve, hogy a gyökér baloldali fiának mi a színe és mi az ott tárolt elem. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az összes lehetőséget, hogy mi lehetett a csúcs színe és az ott tárolt elem értéke!

6. P-beli vagy NP-teljes a PARTÍCIÓ problémának az a változata, amikor olyan megoldást keresünk, ahol
   (a) a partíció egyik felében csak páros számok vannak?
   (b) a partíció egyik felében csak páros, a másikban csak páratlan számok vannak?

7. Az $n > 3$ elemű T halmaz minden t eleméhez tartozik egy $\alpha(t)$ érték, ami egy egész szám. Egy részhalmaz értéke legyen a benne levő elemek értékeinek összege. Adott a T néhány részhalmaza $H_1, H_2, \ldots, H_k \subseteq T$. A T halmaznak egy olyan maximális értékű $S \subseteq T$ részhalmazát keressük, amelyik minden H_i halmazból legfeljebb 5 elemet tartalmaz.

   Fogalmazza meg a problémát egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

8. Éllistával adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf és minden v *csúcsához* egy súly, $s(v) \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy a gráfban nincs irányított kör. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust, amely minden x csúcshoz meghatározza a legkisebb súlyú olyan csúcsot, amiből x irányított úton elérhető!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 9.

1. Definiálja a 2-3 fát, sorolja fel a műveleteit (ezek algoritmusát nem kell leírni)! Ha n elemet tárolunk, akkor milyen messze lehetnek ezek az elemek a gyökértől? Válaszát indokolja is meg!

2. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Floyd-algoritmust! Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos megadás esetén? (Indokolni nem kell.)

3. Mit nevezünk hatékony tanúsítványnak és mikor mondjuk, hogy egy probléma NP-ben van? Adjon egy példát is egy NP-beli problémára (ne csak a nevét, pontos definíciót is írjon), és indokolja meg, hogy ez miért NP-beli!

---

4. Legyen $f(n) \leq 3f(n-1)$, ha $n \geq 2$ páros, és $f(n) \leq f(n-1)+8$ ha $n \geq 3$ páratlan, $f(1) = 5$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(3^n)$, illetve, hogy $f(n) = \Omega(n + 8)$?

5. Az alábbi hash-táblát az üresből kiindulva beszúrások sorozatával kaptuk. Határozza meg a beszúrások összes lehetséges sorrendjét, ha a hash-függvény a $h(x) = 3x \pmod{10}$ volt és a nyitott címzésű hash-elést lineáris próbával alkalmaztuk!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
					5	19	3	33	23

6. Éllistával adott a $G = (V, E)$ irányított gráf. Valaki azt állította, hogy a gráfban bármely $u, v \in V$ csúcsra, $u \neq v$, teljesül, hogy legfeljebb 1 út mentén juthatunk el u-ból v-be. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust, amivel ellenőrizni lehet, hogy igaz-e az állítás!

7. Egy többnapos kirándulásnál a környék térképe egy irányítatlan gráffal adott. Célunk, hogy a gráf egyik csúcsában legyen a szállásunk, ahonnan minden nap egy gráfbeli utat járunk be (egy út mentén elmegyünk valameddig, és azután ugyanezen az útvonalon térünk vissza). Azt szeretnénk, hogy minden nap csupa új látnivalóhoz jussunk el, azaz a szálláson kívül ne legyen közös pontja a különböző napokon bejárt utaknak. Kérdés, hogy meg tudjuk-e választani a szálláshelyet úgy, hogy ily módon a gráf minden pontjában járjunk (a napok számára nincs korlát, addig maradunk, amig van újabb útvonal).

   Vagy adjon a feladatra polinom idejű algoritmust vagy mutassa meg, hogy az eldöntési probléma NP-teljes!

8. A hátizsákproblémának tekintsük azt a speciális esetét, amikor mind az n darab tárgy s_i súlyára és v_i értékére fennáll, hogy $s_i \leq v_i \leq 2s_i$ és azt is tudjuk, hogy minden tárgy súlya legfeljebb a súlykorlát 1/3-a. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely ilyen feltételek mellett c-közelítő algoritmus valamilyen konstans c számra!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2011. június 16.

1. Írja le a radix rendezés algoritmusát! Mikor alkalmazható és mennyi az algoritmus lépésszáma? (A lépésszámot nem kell indokolni.)

2. Definiálja a piros-fekete fát! (A műveletek leírása nem kell.) Írja le a magasság és a fekete magasság közötti összefüggést, és indokolja meg, miért teljesül!

3. Írja le a tanult módszert, ahogyan egy éllistájával megadott, már topologikusan rendezett súlyozott gráfban lineáris időben meg lehet határozni egy adott v csúcsból az összes többi csúcsba menő legrövidebb út hosszát!

---

4. Az alábbi függvényeket rendezze sorba oly módon, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik, akkor $f_i = O(f_j)$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 6^n + 100n, \qquad f_2(n) = 42n^{5\log n} - 3n^2, \qquad f_3(n) = 2011n!/(\lfloor n/2 \rfloor!).$$

5. Van egy hátizsákunk, amelybe legfeljebb b összsúlyú dolgot rakhatunk. Egy raktárban p különböző polcon vannak elhelyezve tárgyak, minden polcon legfeljebb d darab. Az i-edik polc j-edik tárgyának súlya $s_{i,j}$, ára $a_{i,j}$. Adjon algoritmust, amely a b, $s_{i,j}$, $a_{i,j}$ pozitív egész számok ismeretében meghatározza, hogy maximum mennyi lehet a hátizsákba rakott tárgyak árainak összege, ha minden polcról legfeljebb 1 darab tárgyat választhatunk! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(p\,b\,d)$.

6. Éllistával adott a G irányítatlan egyszerű, összefüggő gráf, melynek n csúcsa, e éle van és minden f éléhez egy $1 \leq s(f) \leq n$ egész súly tartozik. Olyan feszítőfát keresünk G-ben, amelyben az élek súlya nem nagyon tér el egymástól, azaz van hozzá egy $k \geq 0$ egész, amire a feszítőfa minden f élére $2^k \leq s(f) < 2^{k+1}$ teljesül. Adjon $O(e \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely a feltételeknek megfelelő feszítőfák közül egy *minimális súlyút* talál (ha egyáltalán van ilyen feszítőfa)!

7. Az alábbi két eldöntési problémára teljesül-e, hogy $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, illetve, hogy $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$?

   $\mathcal{A}$: bemenete egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, kérdés, igaz-e, hogy legalább 3 szín kell a csúcsainak a kiszínezéséhez.

   $\mathcal{B}$: bemenete egy $G_1 = (V_1, E_1)$ és egy $G_2 = (V_2, E_2)$ irányítatlan gráf, kérdés, igaz-e, hogy G_1-nek van G_2-vel izomorf részgráfja.

8. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban olyan legkisebb $A \subseteq V$ ponthalmazt keresünk, amelyre igaz, hogy minden $v \in V$ csúcsnak van legalább egy olyan $\{v, u\}$ éle, hogy $u \in A$.

   Fogalmazza meg a problémát az órán tanult alakú egészértékű programozási feladatként! (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

Algoritmuselmélet zárthelyi
2010. április 19.

1. Legyen $f_1(n) = n^{3\log n}$ és $f_2(n) = 2010 \cdot 4^{\log n \cdot \log n}$. Igaz-e, hogy $f_1 = O(f_2)$, illetve, hogy $f_2 = O(f_1)$?

2. Igaz-e, hogy az $A[1] = 3$, $A[2] = 15$, $A[3] = 10$, $A[4] = 25$, $A[5] = 29$, $A[6] = 17$, $A[8] = 28$, $A[9] = 30$ tömb egy kupacot tartalmaz? Ha igen, rajzolja le a kupacot és a rajzon hajtsa végre a BESZÚR(11) műveletet!

3. Az A tömbben n különböző számot tárolunk. Tudjuk, hogy $A[1] > A[2]$ és $A[n-1] < A[n]$. Adjon algoritmust, mely $O(\log n)$ összehasonlítással megtalál a tömbben egy lokális minimumot (ha van), azaz egy olyan $1 \leq i \leq n$ indexet, hogy $A[i]$ tömbbeli szomszédai nagyobbak, mint $A[i]$.

4. Adott $2^k - 1$ különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy $O(k)$ mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjon olyan algoritmust, amely ezt $O(n)$ lépésben megcsinálja!

5. Előfordulhat-e, hogy egy piros-fekete fában a KERES művelet végrehajtása során bejárt nem levél csúcsokban sorban a 2, 20, 12, 5, 8, 15, 10 elemeket találjuk?

6. Egy M méretű hash-táblába $n < M$ elemet raktunk be nyitott címzéssel, kvadratikus próbával, a $h(x)$ hash-függvényt használva. Ennek során t_1 ütközés történt (ennyiszer kellett tovább próbálkoznunk, egy elem beszúrása során több ütközés is lehetett). Ugyanezt az n elemet ugyanabban a sorrendben beszúrtuk egy M^2 méretű hash-táblába is, de most lineáris próbával, $M \cdot h(x) + 1$ hash-függvénnyel, ekkor t_2 ütközés történt. Igazolja, hogy $t_2 \leq t_1$.

7. Egy $n \times k$ méretű táblázatban van néhány megjelölt elem. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy minden lépésben a táblázat egy eleméről vagy a közvetlen felette vagy a tőle jobbra levő elemre mehetünk (ha van ilyen). Adjon $O(nk)$ idejű algoritmust, amely a megjelölt elemek helyét ismerve meghatározza, hogy egy ilyen út során maximálisan hány alkalommal tudunk megjelölt elemre lépni!

8. A húsvéti nyúl belefáradt, hogy mindenki ajándékot vár tőle. Ezentúl úgy jár el, hogy az első helyen, ahova odamegy nem ad ajándékot, a második helyen ad ajándékot, a következőn megint nem ad, és így tovább. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű irányított gráf, ami azt mutatja, hogy az x csúcsnak megfelelő helyről a nyúl következő lépése mely y csúcsokba vihet, az él súlya jelzi az átjutáshoz szükséges időt. Tegyük fel, hogy mátrixával adott a gráf, tudjuk, hogy a nyúl az $f \in V$ fészkéből indul, a mi helyzetünket az $m \in V$ csúcs jelzi. Adjon $O(|V|^3)$ idejű algoritmust, amellyel meghatározhatjuk, hogy mi az a legkorábbi időpont, amikor a nyúl ajándékosztó kedvvel érhet hozzánk! (A nyúl útja során egy csúcsot többször is meglátogathat és nem kell minden csúcsba eljutnia.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. május 27.

1. Definiálja a bináris keresőfát (a műveleteit is sorolja fel)! Írja le részletesen a TÖRÖL eljárást!

2. Írja le az egy pontból számított legrövidebb utak meghatározására való Bellman-Ford-algoritmust és magyarázza meg, miért helyes az algoritmus! Mátrixos megadás esetén mennyi a lépésszáma? (Ezt nem kell indokolni.)

3. Írja le a LÁDAPAKOLÁS problémára szolgáló First Fit algoritmust! Igazolja hogy ez egy 2-közelítő eljárás!

---

4. Tudjuk, hogy az $f(n)$ függvényre $f(1) = f(2) = 1$ és minden $n > 2$ esetben $f(n) = 3f(n-2) + 2n$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(n^2)$, illetve, hogy $f(n) = \Omega(2^{n/2})$?

5. Tudjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lista egy csupa pozitív elemű rendezett listából úgy keletkezett, hogy annak minden elemét vagy 2-vel vagy (-2)-vel szoroztuk. Adjon algoritmust, ami az a_i listát $O(n)$ lépésben rendezi!

6. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő, súlyozott gráf az éllistájával valamint egy $f \in E$ él. Tegyük fel, hogy a gráfban minden él súlya különböző. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e olyan minimális feszítőfa G-ben, amely tartalmazza az f élet!

7. Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

8. Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

   Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. június 3.

1. Írja le az összefésülés és összefésüléses rendezés algoritmusát! Melyiknek mennyi a lépésszáma és miért?

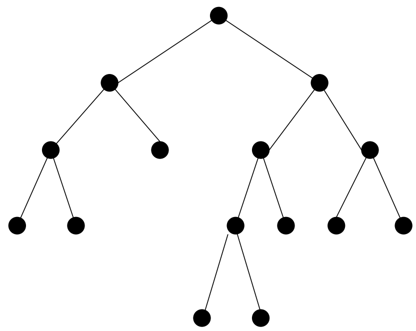
2. Írja le a minimális feszítőfákra használt piros és kék szabályt, valamint a piros-kék algoritmust! (A Prim- és Kruskal-algoritmust nem kell leírni!)

3. Definiálja a Karp-redukciót és igazolja, hogy ha $X \prec Y$ és $Y \in \mathrm{P}$, akkor $X \in \mathrm{P}$.

---

4. Tudjuk, hogy $f(n) = O(g(n))$. Ha $n > 1$, akkor legyen $h(n) = \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} f(2i)$. Következik-e, hogy $h(n) = O(g(n))$, illetve, hogy $h(n) = \Omega(g(n))$?

5. A rajzon látható fában hányféleképpen lehet kijelölni, hogy melyik csúcs legyen piros és melyik fekete úgy, hogy ez megfeleljen egy piros-fekete fa színezésének?



6. Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:

   - S_i személy meghalt S_j születése előtt;
   - S_i személy élete során született S_j;
   - S_i személy korábban született, mint S_j;
   - S_i korábban halt meg, mint S_j.

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjon algoritmust, amivel k db fenti típusú válaszról $O(n+k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.

7. P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf és egy $k > 0$ egész szám. Kérdés, hogy van-e G-nek néhány összefüggő komponense, melyek pontszámainak összege éppen k.

8. Fogalmazza meg egész értékű programozási feladatként az alábbi problémát! Egy adott $G = (V, E)$ irányítatlan egyszerű gráfban keresünk olyan maximális méretű $D \subseteq V$ csúcshalmazt, melyre teljesül, hogy minden $x \in V$ csúcsnak legfeljebb 2 szomszédja van a D halmazban!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2010. június 10.

1. Definiálja a 2-3 fákat (a műveletek felsorolásával együtt)! Mennyi lehet egy n elemet tároló 2-3 fa szintszáma és miért?

2. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát és hogy hogyan lehet közben az éleket is osztályozni! Mennyi az algoritmus lépésszáma éllistás esetben? (Indokolni nem kell.)

3. Mit jelent az NP és hogy valami NP-teljes? Adja meg az alábbi problémák pontos definícióját: 3SZÍN, RH, X3C, és az egyikről magyarázza meg, miért van NP-ben!

---

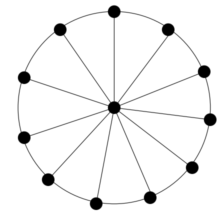
4. Az $f(n)$ függvényre minden $n > 1$ esetben $f(n) \le f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\log n$ és $f(1) = 2$ teljesül. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(n)$, illetve, hogy $f(n) = O((\log n)^2)$?

5. Egy pozitív egész élsúlyokkal ellátott irányított gráfon a Dijkstra-algoritmust futtattuk az A csúcsból indítva. Az alábbi, kissé töredékes, táblázatunk van az eredményről. Milyen értékek szerepelhettek a táblázatban az x és y helyeken? Véget ért-e az algoritmus, és ha nem, adja meg a táblázat összes lehetséges folytatását!

A	B	C	D	E	F
0	∞	9	3	∞	10
0	15	8	3	x	6
0	14	7	3	5	6
0	10	y	3	5	6

6. Éllistájával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf, melynek éleihez csupa különböző súlyt rendeltünk. A gráfot úgy akarjuk felosztani k darab $G_1 = (V_1, E_1)$, …, $G_k = (V_k, E_k)$ összefüggő részgráfra, hogy G minden csúcsa pontosan egy V_i-ben legyen benne. Egy ilyen felbontás értéke a különböző V_i csúcshalmazok között menő élek súlyai közül a legkisebb. Adjon $O(|E| \log |E|)$ lépésszámú algoritmust, mely adott G és k esetén meghatároz egy maximális értékű felosztást!

7. Keréknek hívjuk az olyan gráfokat, mint amilyen az ábrán látható (a példa egy 12 pontú kerék). Az X problémánál adott egy irányítatlan G gráf és egy $k > 0$ egész szám, kérdés, hogy részgráfként van-e a G-ben egy legalább k pontú kerék? Igaz-e, hogy $X \prec H$, illetve $H \prec X$ (ahol H a Hamilton-kör problémát jelöli)?



8. Adott egy egyszerű irányítatlan gráf, az élein pozitív egész súlyokkal. A gráfban egy párosítás súlya a benne levő élek súlyainak összege. Olyan párosítást keresünk a gráfban, amelynek a súlya maximális (az nem számít, hány élből áll, csak a súlya az érdekes). Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. június 17.

1. Írja le, hogy a nyitott címzésű hash-elésnél hogyan működik a KERES eljárás, ha lineáris, illetve ha kvadratikus próbát használunk!

2. Igazolja, hogy a Prim-algoritmus egy piros-kék algoritmus! Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos, illetve éllistás esetben? (A lépésszámokat nem kell indokolni.)

3. Írja le az NP és NP-teljesség definícióját! Adja meg az alábbi problémák pontos definícióját: MAXFTL, RH, 3DH, és az egyikről magyarázza meg, miért van NP-ben!

---

4. Tudjuk, hogy az $f(n)$ függvényre $f(1) = 3$, valamint minden $n > 1$ esetben $f(n) = 2 \cdot f(\lfloor n/2 \rfloor) + 5n$. Következik-e ebből, hogy
   (a) $f(n) = O(n^2)$?
   (b) $f(n) = O(n \log n)$?

5. Adott az n elemű $A[1] \leq A[2] \leq \ldots \leq A[n]$ tömb. Hogyan lehet $O(\log n)$ lépésben meghatározni, hogy az n közül hány elemnek az értéke egyezik meg az $A[1]$ értékkel?

6. A $G = (V, E)$ összefüggő, irányítatlan súlyozott gráfban $|E| \leq |V| + 100$. Adjon $O(|V|)$ lépésszámú algoritmust egy minimális feszítőfa meghatározására!

7. Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben egy legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?

8. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf. Egy olyan $W \subseteq V$ halmazt keresünk, amely a lehető legtöbb csúcsból áll és teljesül rá, hogy a gráfban bármely 2 független él 4 végpontjából W legfeljebb 2 pontot tartalmaz.

   Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)
