1. feladat (15 pont)
Határozza meg az alábbi mennyiség valós és képzetes részét!

$$\frac{2-4\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}}+(1-\mathrm{i})^3$$

Mo.

$$\frac{2-4\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}}+(1-\mathrm{i})^3 \overset{(\mathbf{5p})}{=} \frac{(2-4\mathrm{i})(5-3\mathrm{i})}{|5+3\mathrm{i}|^2}+\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^3 \overset{(\mathbf{5p})}{=}$$

$$=\frac{-2-26\mathrm{i}}{34}+\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{1}{17}-\frac{13}{17}\mathrm{i}-2-2\mathrm{i},$$

vagyis A valós rész $-\frac{1}{17}-2$ **(1p)** , a képzetes rész pedig $-\frac{13}{17}-2$. **(1p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^3-24n^2}{n^2(3n-2)}=4$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ha $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, amelyre ha $\forall n\geq N(\varepsilon)$, akkor $|a_n-A|<\varepsilon$ **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor

$$\left|\frac{12n^3-24n^2}{n^2(3n-2)}-4\right| \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left|\frac{12n^3-24n^2-4\left(3n^3-2n^2\right)}{3n^3-2n^2}\right| = \left|\frac{-16n^2}{3n^3-2n^2}\right| \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{16}{3n-2}<\varepsilon,$$

ha $n>\frac{1}{3}\left(\frac{16}{\varepsilon}+2\right)$ **(3p)** , így $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{16}{\varepsilon}+2\right)\right]+1$ **(1p)** .

---

3. feladat (8+8+8+8=32 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n=\left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{3n}, \qquad b_n=\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^{n+2},$$

$$c_n=\sqrt{9n^2+2n-6}-3n, \qquad d_n=\sqrt[n]{\frac{n^3+2n}{2n^2+4}}.$$

Mo.

$$a_n \overset{(\mathbf{5p})}{=} \left(\frac{\left(\left(1-\frac{5}{2n}\right)^{2n}\right.}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} \left(\frac{e^{-5}}{e^3}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{-12}$$

$\frac{3n+2}{4n+3} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} \frac{3}{4}$, így elég nagy n esetén $\frac{3n+2}{4n+3} < \frac{4}{5}$ **(2p)** , vagyis $0 < b_n < \left(\frac{4}{5}\right)^{n+2} = \frac{16}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$ **(3p)** , tehát a rendőrelv miatt $b_n \to 0$ **(1p)** .

$$c_n \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{9n^2+2n-6-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n-6}+3n} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{2-\frac{6}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}+3} \overset{(\mathbf{1p})}{\to} \frac{2}{3+3} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{3}.$$

$$\frac{n}{6} = \frac{n^3}{2n^2+4n^2} \le \frac{n^3+2n}{2n^2+4} \le \frac{n^3+2n^3}{2n^2} = \frac{3n}{2}(\mathbf{4p})$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \le d_n \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1. \qquad (\mathbf{3p})$$

Így a rendőrelv miatt $d_n \to 1$. **(1p)**

---

4. feladat (20 pont)
Igazolja, hogy $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 5 + \sqrt{a_n - 3}$ rekurzióval megadott sorozat minden elemére teljesül, hogy $a_n < 7$! Konvergens a sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. Teljes indukcióval bizonyítunk. $a_1 = 3 < 7$ **(1p)** , és

$$a_n < 7 \Longrightarrow a_n - 3 < 4 \Longrightarrow \sqrt{a_n-3} < 2 \Longrightarrow a_{n+1} = 5 + \sqrt{a_n-3} < 7. \quad (\mathbf{4p})$$

Másrészt $a_2 = 5 > 3 = a_1$ **(1p)** , és

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow a_n - 3 < a_{n+1} - 3 \Longrightarrow \sqrt{a_n-3} < \sqrt{a_{n+1}-3}$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 5 + \sqrt{a_n-3} < 5 + \sqrt{a_{n+1}-3} = a_{n+2}. \quad (\mathbf{4p})$$

A sorozat monoton növő és felülről korlátos, így konvergens **(2p)** . A határértékre felírható az $\lim a_n = A = 5 + \sqrt{A-3}$ egyenlet **(2p)** , amiből $(A-5)^2 = A-3$ **(2p)** , vagyis $A^2 - 11A + 28 = 0$ **(1p)** , így a lehetséges határértékek 4 és 7 **(1p)** . Mivel $n \ge 2$ esetén $a_n > 4$, így $A = 7$. **(2p)**

5. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Létezik-e határérték?

$$a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{3n^3 - 2n}{(n-1)^3}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \quad (\mathbf{2p}) \\ \dfrac{3n^3-2n}{(n-1)^3} = \dfrac{3-\frac{2}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3} \overset{n\to\infty}{\to} 3, & \text{ha } n = 4k+1 \quad (\mathbf{5p}) \\ -\dfrac{3n^3-2n}{(n-1)^3} = \dfrac{-3+\frac{2}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3} \overset{n\to\infty}{\to} -3, & \text{ha } n = 4k+3 \quad (\mathbf{4p}) \end{cases}$$

A torlódási pontok halmaza $\{0, 3, -3\}$ **(2p)** , $\limsup a_n = 3 \neq -3 = \liminf a_n$ **(4p)** , így a határérték nem létezik **(1p)** .

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Konstruáljon egy valós számsorozatot, melynek torlódási pontjai a pozitív egész számok!

Mo. Legyen a sorozat a következő:

$$1, \quad 1,2, \quad 1,2,3, \quad 1,2,3,4, \quad 1,2,3,4,5, \quad 1,2,3,4,5,6\ldots (\mathbf{5p})$$

Látható, hogy minden pozitív természetes szám végtelen sokszor fordul elő a sorozatban, és más szám elő sem fordul, tehát a sorozat megfelel a kritériumoknak. **(3p)**

Pontozás: Teljes pontszám a helyes megoldás (ami lehet természetesen más is), helyes indoklással. Két pont, ha minden k pozitív természetes számra megad a megoldó egy k-hoz konvergáló sorozatot. Négy–hat pont, ha a megoldó ügyesen kísérletezik végtelen sok konvergens sorozat összefésülésével, de a megoldása nem tökéletes, vagy nincs indoklás.