1. Zárthelyi megoldásokkal A2 2007 tavasz

1. Legyen L tetszőleges lineáris tér melynek bázisa $e = (e_1, e_2, e_3)$. Mely **a** és **b** valós számokra lesz benne a $v_4 \in L$ vektor a $v_1, v_2, v_3 \in L$ által generált altérben, ha

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3\,, \quad v_2 = e_1 - 2e_2 + 2e_3\,, \quad v_3 = -e_1 + 2e_2 + \mathbf{a}e_3\,, \quad v_4 = e_1 + e_2 + \mathbf{b}e_3\,.$$

2. Adja meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását!

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= -3 \\ x + y + 2z &= 3 \\ -2x - y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

3. Jelölje tetszőleges L lineáris tér esetén $\mathcal{L}(L \to L)$ az L-ből L-be képező lineáris operátorok lineáris terét és legyen $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(L \to L)$ az identitásoperátor. Mutassa meg, hogy tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{L}(L \to L)$ esetén az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ feltételből következik, hogy mind $\mathbf{A}$ mind $\mathbf{B}$ invertálható.

4. Legyen $\mathbf{R}^2$ szokásos bázisa $e = (i, j)$ $(i = (1, 0)\,,\ j = (0, 1))$ és legyen $f = (i + j, i - j)$. Határozza meg $\mathbf{R}^2$-en az $y = -x$ egyenesre való tükrözés operátorának mátrixát az f bázisban kétféleképpen: közvetlenül és az e bázisbeli mátrixából az áttérés mátrixának segítségével!

5. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}^{101}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

6. Melyik igaz minden véges dimenziós lineáris téren, melyik nem?

(a) Bázis maximális elemszámú lineárisan független rendszer

(b) Bázis minimális elemszámú lineárisan független rendszer

(c) Adott lineáris tér minden generátorrendszerének ugyanannyi eleme van

(d) Fix vektorral való eltolás a síkvektorok lineáris terének lineáris transzformációja

(e) Térkvektorok lineáris terén a z tengely körüli $+\pi/4$ forgatás egy invariáns altere a $z = 2$ sík