

Haladó lineáris algebra

ÖTÖDIK HÁZI FELADAT

1. Vegyen egy saját pixelformátumú szürkeárnyaltos fényképet (vagy egy színest konvertáljon szürkeárnyaltossá) és egy megfelelő programmal készítsen belőle egy mátrixot, melynek minden eleme a kép egy pontjának árnyalatát adja meg.

A feladat során használt MATLAB-kódok a következők voltak.

```
1 %%- Olvassuk be a képet es megfeleloen konvertaljuk at
2 A = imread('lena.jpg');
3 A = im2double(A);
4 B = rgb2gray(A);
5
6 %%- Nezzuk meg az eredmenyt
7 imshow(B)
```

Az 1. ábrán látható a beolvasott és az átalakított kép (mérete 1170×780).



1. Ábra – A MATLAB-ba beolvasott kép

2. Legyen e mátrix rangja r . Írja fel a mátrix szinguláris felbontását, majd abból készítsen két olyan képmátrixot, melyek egyikének 10, másikának $r/2$ (egész része) a rangja, és „legközelebb” van az eredeti mátrixhoz. Jelenítse meg e két képet az eredeti mellett.

A képet képviselő mátrix rangját ($r = 780$) és a szinguláris érték szerinti felbontását a következőképp határoztam meg.

```
1 %%- A képmatrix rangja
2 r = rank(B);
3
4 %%- Es a szingularis ertek szerinti felbontasa
5 [U,S,V] = svd(B);
```

Az eredeti képet közelítő mátrixokat B_{10} -et és $B_{r/2}$ -öt az alábbiaknak megfelelően tudtam előállítani.

```
1 %%- 10 szingularis erteket hasznalva a kozelites
2 B_10 = zeros( size(B) );
3 for i = 1:10
4     tmp = S(i,i) * U(:,i) * V(:,i)';
5     B_10 = B_10 + tmp;
6 end
7
8 %%- Valamint r/2 szingularis erteket hasznalva
9 B_r2 = zeros( size(B) );
10 for i = 1:(r/2)
11     tmp = S(i,i) * U(:,i) * V(:,i)';
12     B_r2 = B_r2 + tmp;
13 end
```



(a) B_{10}



(b) $B_{r/2}$

2. Ábra – A két közelítő kép

3. Ezután mindkét képre számítsa ki az elhagyott szinguláris értékek négyzetösszegének gyökét, és adja meg a legnagyobb elhagyott szinguláris értéket.

Az elhagyott szinguláris értékek négyzetösszegének gyöke a közelítés hibáját adja meg a Frobenius-normában, míg a legnagyobb elhagyott szinguláris érték a közelítés hibáját az euklideszi-normában. Azaz

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{10}\|_F = \sqrt{\sum_{i=11}^r \sigma_i^2} = 61,0452$$

és

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{10}\|_2 = \sigma_{11} = 17,0694.$$

Hasonlóan számoltam a másik mátrixra is

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{r/2}\|_F = \sqrt{\sum_{i=r/2+1}^r \sigma_i^2} = 4,1373$$

és

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{r/2}\|_2 = \sigma_{r/2+1} = 0,4606.$$

Az előbbi számértékeket az alábbi parancsokkal határoztam meg.

```
1  %%-- A hiba a Frobenius-normában
2  S_10 = 0;
3  for i = 11:r
4      tmp = S(i,i)^2;
5      S_10 = S_10 + tmp;
6  end
7  F_10 = sqrt(S_10);
8
9  S_r2 = 0;
10 for i = (r/2)+1:r
11     tmp = S(i,i)^2;
12     S_r2 = S_r2 + tmp;
13 end
14 F_r2 = sqrt(S_r2);
15
16 %%- Es az euklideszi-normában
17 Eu_10 = S(11,11);
18 Eu_r2 = S( (r/2)+1 , (r/2)+1 );
```