2009. november 26. Bev. Mat. 2. zárthelyi Megoldások A. csoport 90 perc.

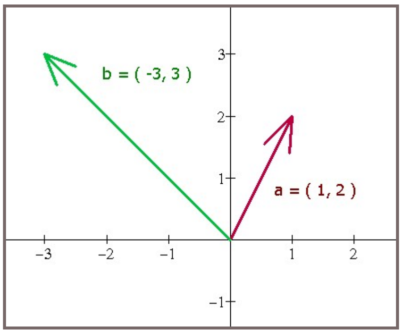
1. Számológép használata nélkül számoja ki : $A := 3\cdot \text{tg}\,30^\circ - \text{ctg}\,45^\circ + \text{tg}\,135^\circ + 2\cdot\cos 30^\circ = ?$

$\text{tg}\,135^\circ = \text{tg}\,(180^\circ - 45^\circ) = -\text{tg}\,45^\circ \quad\Rightarrow\quad A = 3\cdot\text{tg}\,30^\circ - \text{ctg}\,45^\circ - \text{tg}\,45^\circ + 2\cdot\cos 30^\circ = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 - 1 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\sqrt{3} - 2$.

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0 \end{array}\right\}$ Oldja meg !
$\begin{array}{l} A := x+2 \\ B := y-3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{A}{3} - \frac{B}{4} = 3 \\ \frac{3}{A} - \frac{1}{B} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B - \frac{B}{4} = 3 \\ A = 3B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 4 \\ A = 12 \end{array} \Rightarrow \quad x = 10,\ y = 7$.

3. Legyenek $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, 3)$ síkvektorok. A.) Rajzolja fel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektort ! B.) $2\,\mathbf{a} - \frac{1}{2}\,\mathbf{b} = ?$ C.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ?$

A.)



B.) $2\,\mathbf{a} - \frac{1}{2}\,\mathbf{b} = \left(2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot(-3),\ 2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right)$

C.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot(-3) + 2\cdot 3 = 3$

4. Egy mértani sorozat első 3 tagjának összege 114. Ha a harmadik számot 72 -vel csökkentjük, egy számtani sorozat első 3 tagjához jutunk. Határozza meg a mértani sorozatot !

Legyen (a_n) a mértani és (b_n) a számtani sorozat. Ekkor $b_1 + b_2 + b_3 = 114 - 72 \Rightarrow$
$3b_2 = 42 \Rightarrow a_2 = b_2 = 14$. $\frac{14}{q} + 14 + (14\cdot q) = 114 \Rightarrow 7q^2 - 50q + 7 = 0$

$q_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 4\cdot 49}}{14} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 7^2}}{7} = \frac{25 \pm \sqrt{18\cdot 32}}{7} = \frac{25 \pm 24}{7}$, $\quad q_{1,2} = 7,\ \frac{1}{7}$

$\Rightarrow$ **Megoldások :** **I.** $q = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 14$, $a_3 = 98$, ... **II.** $q = \frac{1}{7}$, $a_1 = 98$, $a_2 = 14$, $a_3 = 2$, ...

5. Írja fel a a 3. feladatbeli $\mathbf{b} = (-3, 3)$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{a} = (1, 2)$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét !

Az egyenes egy normálvektora $\mathbf{n} = (2, -1)$, egyenlete : $2x - y = 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 3$, azaz $2x - y + 9 = 0$.

2009. november 26. Bev. Mat. 2. zárthelyi Megoldások B. csoport 90 perc.

1. Számológép használata nélkül számoja ki : $B := (1 + \text{ctg}\,210^\circ)\cdot(1 + \text{ctg}\,240^\circ)\cdot(1 + \text{ctg}\,135^\circ)\cdot(1 + \text{ctg}\,120^\circ) = ?$

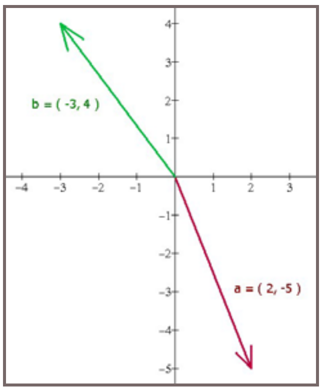
$B = (1 + \text{ctg}\,(180^\circ + 30^\circ))\cdot(1 + \text{ctg}\,(180^\circ + 60^\circ))\cdot(1 + \text{ctg}\,(180^\circ - 45^\circ))\cdot(1 + \text{ctg}\,(180^\circ - 60^\circ))$. Felhasználva, hogy a ctg függvény 180° szerint periodikus és páratlan, kapjuk: $B = (1 + \text{ctg}\,30^\circ)\cdot(1 + \text{ctg}\,60^\circ)\cdot(1 - \text{ctg}\,45^\circ)\cdot(1 - \text{ctg}\,60^\circ) = 0$, hiszen a 3. tényező zérus.

2. Két szám reciprokának összege $\frac{5}{24}$, a két szám összegének és különbségének a hányadosa pedig 5 . Melyek ezek a számok ?

$\begin{array}{l} \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{5}{24} \\ \frac{A+B}{A-B} = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} = \frac{5}{48} \\ A + B = 5A - 5B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{3B} + \frac{1}{2B} = \frac{5}{48} \\ 2A = 3B \end{array} \quad B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{48}{5} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{5}{6}\cdot\frac{48}{5} = 8 \\ A = 12 \end{array} \Rightarrow$ A két szám 12 és 8 .

3. Legyenek $\mathbf{a} = (2, -5)$, $\mathbf{b} = (-3, 4)$ síkvektorok. A.) Rajzolja fel a két vektort ! B.) $-2\,\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b} = ?$ C.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ?$

A.)



B.) $-2\,\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b} = (-2\cdot 2 + 3\cdot(-3),\ -2\cdot(-5) + 3\cdot 4) = (-13,\ 22)$

C.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\cdot(-3) + (-5)\cdot 4 = -26$

4. Egy mértani sorozat és egy számtani sorozat első tagja 2.
A mértani sorozat 3. ill. 5. tagja a számtani sorozat 2. ill. 11. tagjával egyenlő.
Mekkora a mértani sorozat 2004. tagja ?

Legyen (a_n) a mértani és (b_n) a számtani sorozat.

$a_3 = b_2 \Rightarrow 2\cdot q^2 = 2 + d$, $\quad a_5 = b_{11} \Rightarrow 2\cdot q^4 = 2 + 10d$,

$d = 2q^2 - 2$ -t behelyettesítve : $2q^4 = 2 + 10\cdot(2q^2 - 2) \Rightarrow q^4 - 10\,q^2 + 9 = 0$,

$q^2_{1,2} = 1, 9 \Rightarrow q_1 = 1,\ q_2 = -1,\ q_3 = 3,\ q_4 = -3$, Négy sorozat is van, ezekben $a_{2004} = 2\cdot q^{2003}$: $2, -2, 2\cdot 3^{2003}, -2\cdot 3^{2003}$.

5. Írja fel a a 3. feladatbeli $\mathbf{a} = (2, -5)$ helyvektorú ponton áthaladó $\mathbf{b} = (-3, 4)$ irányvektorú egyenes egyenletét !

Az egyenes egy normálvektora $\mathbf{n} = (4, 3)$, egyenlete : $4x + 3y = 4\cdot 2 + 3\cdot(-5)$, azaz $4x + 3y + 7 = 0$.