Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. június 17.

1. Egy szabályos kockával addig dobunk, amíg 6-ost nem kapunk. Legyen X a szükséges dobások száma, Y az addigi páratlan dobások száma. Adja meg az X várható értékét és a $\mathbf{P}(X=3, Y=2)$ eloszlásértéket!

Megoldás: $X \in G(\frac{1}{6})$, így $\mathbf{E}X = 6$. $\mathbf{P}(X=3, Y=2) = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

2. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \alpha(x+y), 0 < x < 2, 0 < y < 2$. Adja meg α értékét! Adja meg X vetületi sűrűségfüggvényét és várható értékét.

.*Megoldás*: $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{2} x+y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{8}$.

$f_X(x) = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 x+y\,\mathrm{d}y = \frac{x+1}{4}, x \in (0,2)$.

$\mathbf{E}X = \int\limits_0^2 \frac{x^2+x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

3. Legyen $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $Z = 2X - Y$. Számolja ki a $\mathbf{E}(X \mid Z)$ regressziót!

Megoldás: $Z \in N\left(0, \sqrt{5}\right)$. Mivel normális eloszlású változókról van szó, a regresszió lineáris:

$\mathbf{E}(X \mid Z) = \mathrm{R}(X,Z) \cdot \frac{\sigma X}{\sigma Z} Z$

$\mathrm{R}(X,Z) = \frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sigma X \cdot \sigma Z} = \frac{2\sigma^2 X}{\sigma X \cdot \sigma Z} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mathbf{E}(X \mid Z) = \frac{2}{5}Z$.

4. Legyen $X \in N(8,2)$. Fejezze ki a standard normális eloszlásfüggvény, Φ segítségével a $\mathbf{P}(10 \le X \le 12)$ valószínűséget! Mennyi $\mathbf{E}X^2$?

Megoldás: $\mathbf{P}(10 \le X \le 12) = F_X(12) - F_X(10) = \Phi(\frac{12-8}{2}) - \Phi(\frac{10-8}{2}) = \Phi(2) - \Phi(1)$.

$\mathbf{E}X^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = 4 + 64 = 68$.

5. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X+1, V = 3Y$. Számolja ki a $\mathbf{P}(V < Z)$ valószínűséget!

Megoldás: Ha $Z = 2X+1$ és $V = 3Y$, akkor $\mathbf{P}(V < Z) = \mathbf{P}(2X+1 > 3Y) = \mathbf{P}(\frac{2}{3}X + \frac{1}{3} > Y)$. Vagyis a keresett valószínűség megegyezik az egységnégyzetnek az $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ egyenes alá eső pontjai által alkotott sokszög területével. Így $\mathbf{P}(V < Z) = \frac{2}{3}$.

6. Adja meg a polinomiális eloszlás definícióját!

Megoldás: $\underline{X} \in Pol(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$, ha $\mathbf{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$.

$0 \le k_i \le n, k_1 + \ldots + k_r = 1$