Mat A4 (Valószínűségszámítás), Villamosmérnöki szak, 1. zárthelyi, 2007. 10. 26.

---

14 óra

1. Annak valószínűsége, hogy Okos Pál az A, B, vagy C tanárokhoz kerül a szóbeli vizsgán, rendre 0,15; 0,6 és 0,25. Ha Okos Pált A, B, illetve C vizsgáztatja, akkor annak az esélye, hogy átmegy a vizsgán 0,7; 0,3, illetve 0,4. **a)** Ha megtudjuk, hogy Okos Pál átment a vizsgán, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy A-nál vizsgázott? **b)** Ha még azt is tudjuk, hogy nem C-nél vizsgázott, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy A-nál vizsgázott?

2. Tegyük fel, hogy az A, B és C események függetlenek, P(A)=1/4, P(B)= 1/8 és P(C)= 1/8.

a) Határozza meg a P(A U B) valószínűséget!

b) Határozza meg a P(A U B │ B UC) feltételes valószínűséget!

3. Egy örökifjú tulajdonságú fénycső kétszer olyan valószínűséggel éli meg a 60 óra élettartamot, mint hogy 60 óra előtt kiégne. **a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy még 40 órát sem él meg? **b)** Mennyi az ilyen fénycsövek átlagos élettartama?

---

15 óra

1. Két, számunkra megkülönböztethetetlen szabályos dobókockát dobunk fel egyszerre, majd megismételjük a dobást. **a)** Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobásnál ugyanazt a két számot kapjuk, mint az első dobásnál? **b)** Ha ez bekövetkezik, akkor mi a valószínűsége annak, hogy mind a négy kapott szám ugyanaz?

2. Az „A” nyomdában egy oldalon háromszor annyi a sajtóhibák átlagos száma, mint a „B” nyomdában. Az „A” nyomdában annak esélye, hogy egy oldalon pontosan egy sajtóhiba van, kétszer akkora, mint hogy két sajtóhiba van. **a)** Mennyi az esélye annak, hogy az „A” nyomdában egy oldalon egyetlen sajtóhiba sincs? **b)** Mennyi az esélye annak, hogy a „B” nyomdában egy oldalon egyetlen sajtóhiba sincs?

3. Egy örökifjú tulajdonságú izzó ugyanolyan valószínűséggel nem éli meg a 100 óra élettartamot, mint hogy megéli. **a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy még 50 órát sem él meg? **b)** Mennyi az ilyen izzók átlagos élettartama?

1. ZH megoldókulcs

Matematika A4
Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007. október 26.

A feladatsor

1. feladat

Vezessük be a következő jelöléseket:

- $S =$ Sikeres vizsga
- $A = A$-nál vizsgázik
- $B = B$-nál vizsgázik
- $C = C$-nál vizsgázik

Így a feladat szövege szerint: $\mathbb{P}(A) = 0.15$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$, $\mathbb{P}(C) = 0.25$, $\mathbb{P}(S|A) = 0.7$, $\mathbb{P}(S|B) = 0.3$, $\mathbb{P}(S|C) = 0.4$.

a)

$$\mathbb{P}(A|S) \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap S)}{\mathbb{P}(S)} \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap S)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(S|A)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(S|B)+\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(S|C)} \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{3}{11}$$

b)

$$\mathbb{P}(A|S\cap\overline{C}) = \frac{\mathbb{P}(A\cap S\cap\overline{C})}{\mathbb{P}(S\cap\overline{C})} \overset{1\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap S)}{\mathbb{P}(S\cap\overline{C})} \overset{1\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap S)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(S|A)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(S|B)} \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{7}{19}$$

Nem kellett a törteket egyszerűsíteni a végén.

2. feladat

a)

$$\mathbb{P}(A\cup B) \overset{2\text{ PONT}}{=} 1-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1-\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8} \overset{1\text{ PONT}}{=} \frac{11}{32}$$

b)

$$\mathbb{P}(A\cup B|B\cup C) \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}((A\cup B)\cap(B\cup C))}{\mathbb{P}(B\cup C)} \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(B\cup(A\cap C))}{1-\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C})} \overset{1\text{ PONT}}{=} \frac{\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap C\cap\overline{B})}{1-\mathbb{P}(\overline{B}\cap\overline{C})} \overset{2\text{ PONT}}{=} \frac{13}{20}$$

A $\mathbb{P}(A\cup B)\cap(B\cup C))$ képletben fontos a zárójel, mivel számít a műveleti sorrend. A konkrét érték számolásakor használjuk a függetlenséget. Ki lehetett számoni máshogyan is, sokan $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ képlettel számoltak, illetve született pár szép diagrammos megoldás is.

3. feladat

$e^{-\lambda 60} = 2(1 - e^{-\lambda 60}) \quad 4 \text{ PONT}$

$\lambda = \frac{\log 3/2}{60} \quad 2 \text{ PONT}$

$\mathbb{P}(X < 40) = 1 - e^{-\lambda 40} \quad 2 \text{ PONT}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad 2 \text{ PONT}$

Nem járt a két pont a várható értékért, ha nem derült ki, hogy mi a köze λ-nak az eloszláshoz (tehát legalább egy jól felírt eloszlásfüggény kellett). A 2-es szorzót sokan a másik oldalra tették, ezért 2 pont levonás járt.

B feladatsor

1. feladat

Szét kellett választani aszerint, hogy az első dobás alkalmával megegyznek-e a számok, hiszen ha az első dobásnál különböznek, például $\{1, 2\}$ volt az első dobás eredménye, akkor a második dobás lehet $1, 2$ és $2, 1$ is (így ez $2/36$-od valószínűségű).

Vezessük be a következő jelöléseket:

- $A =$ az első dobásnál ugyanazt dobjuk
- $B =$ a második dobásnál megismétlődik az első dobás eredménye
- $C =$ mind a 4 dobás ugyanaz

a)

$$\mathbb{P}(B) \overset{4 \text{ PONT}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A}) \overset{3 \text{ PONT}}{=} \frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{6}2(\frac{1}{6})^2 = \frac{11}{216}$$

b)

$$\mathbb{P}(C|B) \overset{3 \text{ PONT}}{=} \frac{\frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{6}2(\frac{1}{6})^2} = \frac{1}{11}$$

2. feladat

Az egy oldalon lévő sajtóhibák száma Poisson eloszlást követ, mivel sok betű van egy oldalon, mindegyiben egy kis valószínűséggel lehet elütés, és ezek a hibák feltehetően függetlenek egymástól. 2 PONT

Legyenek a paraméterek λ_A és λ_B. Ekkor $\lambda_A = 3\lambda_B$ 2 PONT

Az A esetben

$$\lambda_A e^{-\lambda_A} = 2\frac{\lambda_A^2}{2!}e^{-\lambda_A}$$

Innen $\lambda_A = 1$ 2 PONT

$$e^{-\lambda_A} = e^{-1} \quad 2 \text{ PONT}$$

$$e^{-\lambda_B} = e^{-1/3} \quad 2 \text{ PONT}$$

3. feladat

$$1 - e^{-\lambda 100} = e^{-\lambda 100}) \quad 4 \text{ PONT}$$

$$\lambda = -\frac{\log 0.5}{100} \quad 2 \text{ PONT}$$

$$\mathbb{P}(X < 50) = 1 - e^{-\lambda 50} \quad 2 \text{ PONT}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad 2 \text{ PONT}$$

Nem járt a két pont a várható értékért, ha nem derült ki, hogy mi a köze λ-nak az eloszláshoz (tehát legalább egy jól felírt eloszlásfüggény kellett).