Elõzmények: fontos feltételezés, hogy a kvadratúramoduláció a D1 téma során terítékre került.

Jelek felbontása kvadratúrakomponensekre:

Legyen az η_t, $t \in (-\infty, \infty)$ jel sávkorlátozott az (F_1, F_2) sávra, ahol ráadásul kössük ki, hogy $F_2 < 2F_1$ (azaz a jel relatív sávszélessége legyen kicsi)! Demoduláljuk ezt a jelet egy $F \in [F_1, F_2]$ vivõfrekvenciájú, $F_2 - F_1$ határfrekvenciájú szûrõvel mûködõ kvadratúrademodulátorral! Ezt a két demodulált jelet nevezzük az η_t, $t \in (-\infty, \infty)$ jel (F vivõhöz tartozó) kvadratúrakomponensének, legyenek ezek rendre η^C és η^S!

A kvadratúrakomponensek néhány tulajdonsága:

1. ezek konstrukciójukból fakadóan lassan változó jelek;

2. a kvadratúrakomponensek kvadratúramodulációval **elõállítják** a jelet:

$$\eta_t^C \cos(2\pi F t) - \eta_t^S \sin(2\pi F t) = \eta_t \quad, t \in (-\infty, \infty) \ ,$$

3. ha η stacionárius folyamat, akkor kvadratúrakomponensei is stacionáriusak;

4. korrelálatlanok, azaz

$$M(\eta_t^C \eta_t^S) = 0 \quad, t \in (-\infty, \infty) \ ,$$

5. és a spektrális sûrûségfüggvényük azonos, közelebbrõl:

$$s_C(f) = s_S(f) = s_\eta(f+F) + s_\eta(f-F) \quad, ha \quad |f| \le F_2 - F_1,$$

és itt $s_\eta(.)$ a jel spektrális sûrûségfüggvényét jelöli.

A 2. állítást tkp. elegendõ η egyetlen szinuszos komponensére belátni. Az állítás az $F+f$ frekvenciájú (pl. koszinuszos) jelkomponensre igaz, hiszen ennek kvadratúrakomponensei $\cos(2\pi f t)$ és $\sin(2\pi f t)$, márpedig valóban igaz, hogy

$$\cos(2\pi f t)\cos(2\pi F t) - \sin(2\pi f t)\sin(2\pi F t) = \cos(2\pi (f+F)t).$$

Az 5. állítás valójában semmivel sem mond többet, mint amit a kétoldalsávos AM jel spektrumáról tanultunk a D1 téma keretei között, ugyanez áll a 3. állításra is. A 4. állítás nem triviális, nem is bizonyítjuk, annyit elmondhatunk, hogy azért igaz, mert egy stacionárius folyamatban a szinuszos és a koszinuszos összetevõk minden frekvencián egyensúlyban kell legyenek (különben lesznek kitüntetett idõpontok). A koszinuszok és a szinuszok szorzatának viszont zérus az átlaga.

Megjegyzések:

1. A kvadratúrafelbontás tétele sokkal általánosabb keretek között is igaz. A tett megszorításokra azért van szükség, mert így a "bizonyítások" igen egyszerûek, s a kvadratúrakomponensek is "szemléletesek". További vizsgálataink hatókörét e megszorítások ugyanakkor érdemben nem befolyásolják.

2. Különösképpen érdekes helyzet, ha a kvadratúrafelbontás vivõje a felbontandó jel sávjának szélére (vagy kicsit azon is túl) esik, azaz, ha

$$F \le F_1 \quad, vagy \quad F \ge F_2 \ .$$

Ekkor a kvadratúrakomponensek minden szinuszos összetevõje azonos nagyságú, fázisaik viszont éppen $\pi/2$-vel térnek el egymástól, másként szólva: õk egymás Hilbert transzformáltjai. Ez különösen SSB jelek leírásánál érdekes

Jelek modulációs felbontása:

Közismert, hogy azonos frekvenciájú szinuszos és koszinuszos jelek összege változatlan frekvenciájú szinuszos jel, megváltozott amplitúdóval és fázissal. Az összeg képzésére memorizálására több szemléletes módszert is tanultunk különféle tárgyakban, pl. kompex számos, vagy forgó vektoros ábrázolások.

Ezek az összegzési szabályok szikrát sem változnak, ha a szereplõ szinuszos - koszinuszos tagok amplitúdói függvényei az idõnek. Így tehát a kvadratúrafelbontás képletét átírva:

$$\eta_t = \sqrt{\left(\eta_t^C\right)^2 + \left(\eta_t^S\right)^2}\cos\left(2\pi F t + \arctan\frac{\eta_t^S}{\eta_t^C}\right).$$

A formálisan nyilvánvalóan helyes kifejezés mondanivalója, hogy minden (legalább minden, viszonylag keskenysávú) jel felfogható amplitúdóban és fázisban egyidejûleg (és nem is független tartalommal) modulált jelnek. Az átalakítás jelentõsége, hogy a jel ezen, modulációs alakjából gyakran közvetlenül leolvasható amúgy bonyolult rendszertechnikai beavatkozások hatása. Pl. azonnal felírható, mi lesz egy ideális burkoló-leválasztás eredménye, ha a blokk bemenetére η kerül.

Valós értékû jel komplex alakban

Korábban is láttunk rá példát, hogy fogalmi egyszerûsítést eredményezhet, ha egy valós értékkészletû függvényt egy komplex értékkészletû függvény valós (vagy éppen imaginárius) részeként kezeljük. (szinuszok és koszinuszok helyett szívesen használunk komplex exponenciális függvényt). A valós jel modulációs elõállítása szinte kiabál egy effajta felírásért. Nyilvánvalóan igaz, hogy

$$\eta_t = \mathrm{Re}\left[\sqrt{\left(\eta_t^C\right)^2 + \left(\eta_t^S\right)^2}\exp\left(j2\pi F t + j\arctan\frac{\eta_t^S}{\eta_t^C}\right)\right].$$

A szögletes zárójelen belüli komplex kifejezést nevezzük a jel komplex alakjának, s ez felismerhetõen

$$\breve{\eta}_t = \left(\eta_t^C + j\eta_t^S\right)\cdot e^{j2\pi F t}.$$

A jel komplex alakja egy sajátos, komplex vivõjû, komplex modulációs tartalommal felszerelt AM jel. Mivel a modulációs tartalom a harmonikus vivõnek kizárólag az "amplitúdóját" befolyásolja, mi sem természetesebb, mint az, hogy e modulációs tartalmat a jel komplex burkolójának nevezzük, ez tehát

$$b_\eta(t) = \eta_t^C + j\eta_t^S .$$

A komplex burkoló függ attól, milyen F választással éltünk (modulált jelek esetén persze elég természetes F-nek a modulált jel vivõfrekvenciáját választani), így talán pontosabb volna a jelnek az F frekvenciára vonatkoztatott komplex burkolójáról beszélni. Érdekes viszont, hogy a komplex burkoló abszolut értéke független F-tõl.

Belátható, hogy a komplex jel csak pozitív frekvenciájú harmonikus komponensekkel rendelkezik (de a bizonyításról most eltekintünk), e komponensek viszont éppen kétakkorák, mint a valós jel összetevõi. Elmondhatjuk, e komplex reprezentáció különösképpen modulált jeleket érõ lineáris torzítások hatásának vizsgálatánál elõnyös.

A zaj hatása a demodulált jelre, különféle modulációs rendszerekben

Jelölések:

S: a modulált jel teljesítménye

B: a modulált jel sávszélessége

s_0: a szélessávú additív vonali zaj spektrális sûrûsége

ν, ν^C, ν^S: a vevõszûrõn átjutott zaj, ill. az õ kvadratúrakomponensei

ξ: a moduláló jel

1. AM-DSB, szorzó demodulátorral

A modulált jel: $\xi_t \cos(2\pi Ft)$, teljesítménye: $S = M(\xi_t^2)/2$

A vevõszûrõn átjutott jel és zaj együtt:

$$\xi_t \cos(2\pi Ft) + \nu_t^C \cos(2\pi Ft) + \nu_t^S \sin(2\pi Ft)$$

(a zaj kvadratúrafelbontásának vonatkoztatási frekvenciáját azonosnak választjuk a modulált jel vivõfrekvenciájával)

A demodulátor a koszinuszos vivõ együtthatóját hiszi modulációs tartalomnak, a demodulált zajos jel tehát $\xi_t + \nu_t^C$.

A zaj kvadratúrakomponensének spektrális sûrûsége most $2s_0$, ezért a zaj teljesítménye: $2s_0 \cdot 2B$.

A demodulált jelben mutatkozó jel-zaj viszony így: $S/(2s_0 B)$

2. AM-SSB, szorzó demodulátorral

A modulált jel kvadratúramodulált alakban: $\xi_t \cos(2\pi Ft) - \hat{\xi}_t \sin(2\pi Ft)$,

A kvadratúrakomponensek korrelálatlanok, teljesítményük azonos, így a jel teljesítménye: $S = 2 \cdot M(\xi_t^2)/2 = M(\xi_t^2)$

A vevõszûrõn átjutott jel és zaj együtt:

$$\xi_t \cos(2\pi Ft) + \hat{\xi}_t \sin(2\pi Ft) + \nu_t^C \cos(2\pi Ft) + \nu_t^S \sin(2\pi Ft)$$

(a zaj kvadratúrafelbontásának vonatkoztatási frekvenciáját azonosnak választjuk a modulált jel vivõfrekvenciájával)

A demodulátor a koszinuszos vivõ együtthatóját hiszi modulációs tartalomnak, a demodulált zajos jel tehát $\xi_t + \nu_t^C$.

A zaj kvadratúrakomponensének spektrális sûrûsége most csak s_0 , ezért a zaj teljesítménye: $s_0 \cdot 2B$.

A demodulált jelben mutatkozó jel-zaj viszony így: $S/(2s_0B)$, ugyanaz, mint elõbb.

3. AM-DSB, burkoló demodulátorral

A modulált jel: $(V+\xi_t)\cdot\cos(2\pi Ft)$, teljesítménye: $S = V^2/2 + M(\xi_t^2)/2$

A vevõszûrõn átjutott jel és zaj együtt:

$$(V+\xi_t)\cos(2\pi Ft) + \nu_t^C\cos(2\pi Ft) + \nu_t^S\sin(2\pi Ft)$$

(a zaj kvadratúrafelbontásának vonatkoztatási frekvenciáját azonosnak választjuk a modulált jel vivõfrekvenciájával). E jel modulációs felbontása:

$$\sqrt{(V+\xi_t+\nu_t^C)^2 + \left(\nu_t^S\right)^2}\cos\left(2\pi Ft + \arctan\frac{\nu_t^S}{V+\xi_t+\nu_t^C}\right).$$

A demodulátor (feltéve persze, hogy valóban képes rá) az ingadozó fázisú vivõ burkolóját választja le. Ha a zaj gyenge, akkor

$$\sqrt{(V+\xi_t+\nu_t^C)^2 + \left(\nu_t^S\right)^2} \cong \left|V+\xi_t+\nu_t^C\right|.$$

Mindaddig, amíg a moduláló jel nem túl nagy, a jobb oldalon az abszolút érték függvény argumentuma elõjeltartó, s így lényegében a demodulált jel: $V+\xi_t+\nu_t^C$.

A zaj kvadratúrakomponensének spektrális sûrûsége most $2s_0$, ezért a zaj teljesítménye: $2s_0 \cdot 2B$.

Tételezzük fel továbbá, hogy a moduláló jel csúcstényezõje *c*, s azt is, hogy *V* éppen a jel csúcsértékével egyenlõ! Ezért:

$$V^2/2 = c^2 \cdot M\left(\xi_t^2\right)/2 \ .$$

A demodulált jelben mutatkozó jel-zaj viszony így: $S/(2s_0B)$

$$\frac{2S}{(1+c^2)\cdot 4s_0B} = \frac{1}{1+c^2}\cdot\frac{S}{2s_0B}.$$

4. Fázismoduláció

A modulált jel most: $V\cos(2\pi Ft + \mu_t)$, teljesítménye: $S = V^2/2$

A demodulátor kiszippantja a koszinusz fázisát, az maga a demodulált jel, teljesítménye: $M\left(\mu_t^2\right)$, ami éppen az effektív fázislöket négyzete, azaz Φ_{eff}^2.

A demodulált zajt a moduláló jel szüneteiben vizsgáljuk, ekkor vevõszûrõn átjutott jel és zaj együtt:

$$V\cos(2\pi Ft) + \nu_t^C\cos(2\pi Ft) + \nu_t^S\sin(2\pi Ft)$$

(a zaj kvadratúrafelbontásának vonatkoztatási frekvenciáját azonosnak választjuk a modulált jel vivõfrekvenciájával)

Az összegjel modulációs felbontása:

$$\sqrt{\left(V+\nu_t^C\right)^2+\left(\nu_t^S\right)^2}\cos\left(2\pi Ft+\arctan\frac{\nu_t^S}{V+\nu_t^C}\right)$$

A demodulátor számára ebbõl a koszinusz fázisa fontos, s ha a zaj gyenge, akkor ez

$$\arctan\frac{\nu_t^S}{V+\nu_t^C}\cong\frac{\nu_t^S}{V}.$$

Ez a fáziszaj, amely $2s_0/V^2$ spektrális sûrûségû, a teljesítménye:

$$N=2\cdot\frac{2s_0}{V^2}\cdot B.$$

A demodulált jelben mutatkozó jel-zaj viszony így:

$$\Phi_{eff}^2\Big/\left(2s_0B\frac{2}{V^2}\right)=\frac{S}{2s_0B}\cdot\Phi^2$$

A jel-zaj viszony lényegesen jobb lehet, mint a különféle AM esetében. Az igaz, hogy a nagyobb fázislöket nagyobb sávszélességû jellel jár. Lényeges lehet, hogy a jel sávszélessége viszont nem növelhetõ korlátlanul, túl nagy sávszélességnél a demodulátorba jutó zaj túlnövi a gyenge zajú közelítés korlátait.

Maradandó tanulság, hogy jobban járunk (jel-zaj viszony tekintetében), ha rendelkezésre álló jelteljesítményt széles sávban szétkenjük

5. Frekvenciamoduláció

A modulált jel most: $V\cos(2\pi Ft+\mu_t)$, teljesítménye: $S=V^2/2$

A demodulátor kiszippantja a koszinusz fázisát, és deriválja azt, tehát a demodulált jel teljesítménye: $M\left(\mu_t^2\right)$, ami éppen az effektív (kör)frekvencialöket négyzete, azaz $(2\pi)^2\cdot F_{eff}^2$.

A demodulált zajt a moduláló jel szüneteiben vizsgáljuk, ekkor vevõszûrõn átjutott jel és zaj együtt:

$$V\cos(2\pi Ft)+\nu_t^C\cos(2\pi Ft)+\nu_t^S\sin(2\pi Ft)$$

(a zaj kvadratúrafelbontásának vonatkoztatási frekvenciáját azonosnak választjuk a modulált jel vivõfrekvenciájával)

Az összegjel modulációs felbontása:

$$\sqrt{\left(V+\nu_t^C\right)^2+\left(\nu_t^S\right)^2}\cos\left(2\pi Ft+\arctan\frac{\nu_t^S}{V+\nu_t^C}\right)$$

A demodulátor számára ebbõl a koszinusz fázisa fontos, s ha a zaj gyenge, akkor ez

$$\arctan\frac{\nu_t^S}{V+\nu_t^C}\cong\frac{\nu_t^S}{V}.$$

Ez a fáziszaj, amely így $2s_0/V^2$ spektrális sûrûségû, még nem a végeredmény, hiszen a frekvenciademnodulátor kiszippant és derivál. A deriválás átviteli függvénye még befolyásolja a demodulált zajt, amelynek a teljesítménye így:

$$N = \int_{-B}^{B} \frac{2s_0}{V^2} \cdot \left| j2\pi f \right|^2 df = 2 \cdot \frac{2s_0}{V^2} \cdot (2\pi)^2 \cdot \frac{B^3}{3}.$$

A demodulált jelben mutatkozó jel-zaj viszony így:

$$F_{eff}^2 \Big/ \left(2s_0 B \frac{2}{V^2} \frac{B^2}{3} \right) = \frac{S}{2s_0 B} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{F_{eff}}{B} \right)^2$$

Ez az eredmény is azt mutatja, hogy korlátos adóteljesítmény és adott (csatorna)zaj mellett van lehetõség a jel-zaj viszony javítására, ez azonban áldozattal jár, a csatornát szélesebb sávban kell használni.