1. feladat (15 pont)
Határozza meg az alábbi mennyiség valós és képzetes részét!

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+(1+\mathrm{i})^5$$

Mo.

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+(1+\mathrm{i})^5 \overset{(\mathbf{5p})}{=} \frac{(3+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{|3+4\mathrm{i}|^2}+\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^5 \overset{(\mathbf{5p})}{=}$$
$$=\frac{1+18\mathrm{i}}{25}+\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{25}+\frac{18}{25}\mathrm{i}-4-4\mathrm{i},$$

vagyis a valós rész $\frac{1}{25}-4$ **(1p)** , a képzetes rész pedig $\frac{18}{25}-4$. **(1p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n^3-30n^2}{n^2(5n-4)}=3$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ha $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, amelyre ha $\forall n\geq N(\varepsilon)$, akkor $|a_n-A|<\varepsilon$ **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon>0$. Ekkor

$$\left|\frac{15n^3-30n^2}{n^2(5n-4)}-3\right| \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left|\frac{15n^3-30n^2-3\left(5n^3-4n^2\right)}{5n^3-4n^2}\right|=\left|\frac{-18n^2}{5n^3-4n^2}\right| \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{18}{5n-4}<\varepsilon,$$

ha $n>\frac{1}{5}\left(\frac{18}{\varepsilon}+4\right)$ **(3p)** , így $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{5}\left(\frac{18}{\varepsilon}+4\right)\right]+1$ **(1p)** .

---

3. feladat (8+8+8+8=32 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{n^3+3n}{3n^2+5}},\qquad b_n=\sqrt{4n^2+3n-4}-2n,$$
$$c_n=\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n},\qquad d_n=\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{n+3}.$$

Mo.

$$\frac{n}{8} = \frac{n^3}{3n^2+5n^2} \leq \frac{n^3+3n}{3n^2+5} \leq \frac{n^3+3n^3}{3n^2} = \frac{4n}{3}\textbf{(4p)}$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{8}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{4}{3}} \to 1. \qquad \textbf{(3p)}$$

Így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$. **(1p)**

$$b_n \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{4n^2+3n-4-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n-4}+2n} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+2} \overset{\textbf{(1p)}}{\to} \frac{3}{2+2} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{3}{4}.$$

$$c_n \overset{\textbf{(5p)}}{=} \left(\frac{((1-\frac{1}{3n})^{3n}}{(1+\frac{2}{3n})^{3n}}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{\textbf{(2p)}}{\to} \left(\frac{e^{-1}}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{-2}$$

$\frac{2n+3}{3n+4} \overset{\textbf{(2p)}}{\to} \frac{2}{3}$, így elég nagy n esetén $\frac{2n+3}{3n+4} < \frac{3}{4}$ **(2p)** , vagyis $0 < d_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+3} = \frac{27}{64}\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ **(3p)** , tehát a rendőrelv miatt $d_n \to 0$ **(1p)** .

---

4. feladat (20 pont)
Igazolja, hogy $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 + \sqrt{a_n - 2}$ rekurzióval megadott sorozat minden elemére teljesül, hogy $a_n < 6$! Konvergens a sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. Teljes indukcióval bizonyítunk. $a_1 = 2 < 6$ **(1p)** , és

$$a_n < 6 \Longrightarrow a_n - 2 < 4 \Longrightarrow \sqrt{a_n-2} < 2 \Longrightarrow a_{n+1} = 4 + \sqrt{a_n-2} < 6. \quad \textbf{(4p)}$$

Másrészt $a_2 = 4 > 2 = a_1$ **(1p)** , és

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow a_n - 2 < a_{n+1} - 2 \Longrightarrow \sqrt{a_n-2} < \sqrt{a_{n+1}-2}$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 4 + \sqrt{a_n-2} < 4 + \sqrt{a_{n+1}-2} = a_{n+2}. \quad \textbf{(4p)}$$

A sorozat monoton növő és felülről korlátos, így konvergens **(2p)** . A határértékre felírható az $\lim a_n = A = 4 + \sqrt{A-2}$ egyenlet **(2p)** , amiből $(A-4)^2 = A-2$ **(2p)** , vagyis $A^2 - 9A + 18 = 0$ **(1p)** , így a lehetséges határértékek 3 és 6 **(1p)** . Mivel $n \geq 2$ esetén $a_n > 3$, így $A = 6$. **(2p)**

5. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Létezik-e határérték?

$$a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2n^3 - 3n}{(n+1)^3}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0, & \text{ha } n = 2k+1 \quad \textbf{(2p)} \\ \dfrac{2n^3 - 3n}{(n+1)^3} = \dfrac{2 - \frac{3}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \overset{n\to\infty}{\to} 2, & \text{ha } n = 4k \quad \textbf{(5p)} \\ -\dfrac{2n^3 - 3n}{(n+1)^3} = \dfrac{-2 + \frac{3}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \overset{n\to\infty}{\to} -2, & \text{ha } n = 4k+2 \quad \textbf{(4p)} \end{cases}$$

A torlódási pontok halmaza $\{0, 2, -2\}$ **(2p)** , $\limsup a_n = 2 \neq -2 = \liminf a_n$ **(4p)** , így a határérték nem létezik **(1p)** .

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Konstruáljon egy valós számsorozatot, melynek torlódási pontjai a pozitív egész számok!

Mo. Legyen a sorozat a következő:

$$1, \quad 1, 2, \quad 1, 2, 3, \quad 1, 2, 3, 4, \quad 1, 2, 3, 4, 5, \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \textbf{(5p)}$$

Látható, hogy minden pozitív természetes szám végtelen sokszor fordul elő a sorozatban, és más szám elő sem fordul, tehát a sorozat megfelel a kritériumoknak. **(3p)**

Pontozás: Teljes pontszám a helyes megoldás (ami lehet természetesen más is), helyes indoklással. Két pont, ha minden k pozitív természetes számra megad a megoldó egy k-hoz konvergáló sorozatot. Négy–hat pont, ha a megoldó ügyesen kísérletezik végtelen sok konvergens sorozat összefésülésével, de a megoldása nem tökéletes, vagy nincs indoklás.