A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2015. 10. 22.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre? (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   A házaspárok sorrendje a sorban 5! lehet, (2 pont)
   és mind az öt házaspár mindegyike 2-féleképp ülhet le a hozzájuk tartozó két székre. (2 pont)
   Mivel ezek a választások egymástól függetlenek, az első kérdésre $2^5 \cdot 5!$ a válasz. (2 pont)
   Ha 13 szék van, akkor a fentieken túl azt is meg kell határozni, hogy melyik legyen a 3 szabadon hagyott szék. (1 pont)
   Minden egyes szabadon hagyható székhármasnak megfelel egy olyan sorozat, amely 5 db 'h' és 3 db 's' jelet tartalmaz. (1 pont)
   Minden ilyen sorozathoz pontosan egy szabadon hagyott székhármas tartozik, ezért, (1 pont)
   mivel $\binom{8}{3}$ ilyen sorozat van, a második kérdésre $\binom{8}{3} \cdot 2^5 \cdot 5!$ a válasz. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá G-nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő.

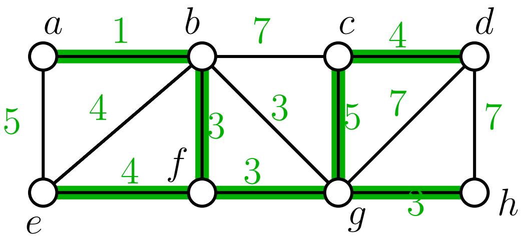
   Ha egy egyszerű gráf v csúcsának fokszáma k, akkor a v-t tartalmazó komponens legalább $k+1$ pontot tartalmaz. (3 pont)
   Ezért a G gráf bármely komponensének legalább 34 pontja van, (3 pont)
   ráadásul G-nek a legalább 66-fokú csúcsa miatt van egy legalább 67 pontú komponense is. (2 pont)
   Mivel egy 67 pontú komponens mellett már nem fér el a 100 pontú gráfban egy 34 pontú komponens, ezért G-nek csak egy komponense lehet, azaz G valóban összefüggő. (2 pont)

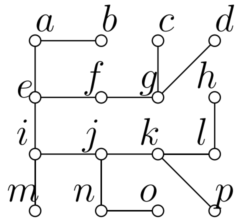
3. A bal oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.

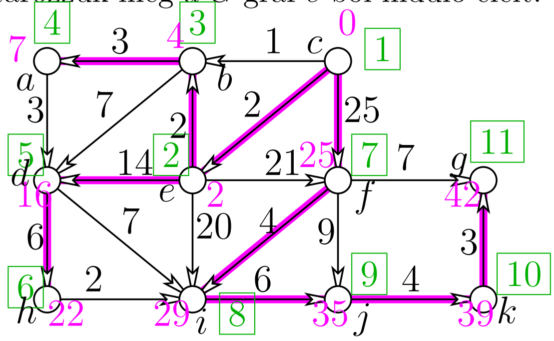
   Minden élre el kell költenünk legalább annyit, mint amennyibe az egyszerű felújítás kerül. Ha ezeket a költségeket tudomásul vettük, arra jutunk, hogy nekünk a kerékpárút-építések össztöbbletköltségét kell minimalizálnunk. (3 pont)
   Elkészítjük tehát a bal oldali ábrán látható gráfot, amely megegyezik a feladatbelivel, de az élekre a két költség különbségét, azaz a kerékpárút építésének többletköltségét írjuk. Mivel a kerékpárúthálózatnak összefüggőnek kell lennie, az így kapott élköltségekhez keresünk minimális költségű feszítőfát. (2 pont)
   Ha ezt meghatároztuk, akkor azzal meg is oldottuk a feladatot: a feszítőfa mentén kerékpárutakat is építünk, a többi élt pedig csak egyszerűen felújítjuk. (1 pont)
   A bal oldali ábrán látható a fent leírt élköltségekkel ellátott gráf. A minimális költségű feszítőfát az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével készítettük el, növekvő többletköltség szerinti sorrendben döntve az egyes élekről. A kapott (egyik lehetséges) feszítőfa éleit zöld színnel megvastagítottuk. (4 pont)

   (Aki nem jön rá, hogy minimális feszítőfát kell keresni, az nem kap pontot. Aki vmi más gráfon futtatja (helyesen) a Kruskalt, az maximum 4 pontot kaphat.)

4. A középső ábrán látható a G irányítatlan gráfnak egy i gyökérből induló mélységi bejárása után kapott F feszítőfája. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.







Tudjuk, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárása utáni osztályozásban a gráfnak nincs keresztéle, azaz olyan éle, amely olyan csúcsokat köt össze, melyek nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
Ezek szerint az e csúcs csakis a fabeli leszármazottaival vagy őseivel lehet összekötve, (3 pont)
konkrétan az a, b, f, g, c, d és i pontokkal. (2 pont)
Mivel tudjuk, hogy e-nek pontosan 7 szomszédja van, ezért e szomszédságát pontosan az iménti 7 pont alkotja, (1 pont)
így a G gráf e-ből induló élei éppen az $ea, eb, ef, eg, ec, ed, ei$ élek. (1 pont)

A feladat sajnos pontatlanul lett kitűzve: a fenti megoldás akkor helyes, ha azt is feltesszük, hogy G egyszerű. Ha valaki így oldja meg a feladatot, akkor értelemszerűen teljes pontszám jár. Ha valaki rámutat arra, hogy lehetnek párhuzamos ill. hurokélek is, akkor az elért eredménnyel arányos pontszámot kaphat.

5. Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható PERT feladat végrehajtásához szükséges t időt és a kritikus tevékenységeket.

Az órán tanult módszerrel (DFS segítségével vagy források egymás utáni törlésével) meghatároztuk a csúcsok egy topologikus sorrendjét, melyet az ábrán zölddel bekeretezett számok jelölnek. (3 pont)
Ebben a sorrendben minden egyes csúcsra meghatároztuk a legkorábbi kezdési időpontot (lila számokkal) és az ezen legkorábbi időpontot meghatározó, lilával jelölt élt (éleket). (4 pont)
Ezek szerint a feladat végrehajtásához szükséges minimális idő 42 egység. (1 pont)
A kritikus tevékenységek pontosan azok a csúcsok lesznek, amelyeken keresztül 42 hosszú út vezet g-be, azaz azok, amelyekből vezet út lila éleken g-be. Ezek a csúcsok pedig c, f, i, j, k és g. (2 pont)

6. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást.

Jelölje G azt a 222 pontú gráfot, amelynek csúcsai a politikusok, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha az adott politikusok ismerik, de nem utálják egymást. A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy G-nek van Hamilton-köre. (3 pont)
Mivel bármely politikusnak legalább $133 - 22 = 111$ olyan ismerőse van, akit nem utál, G minden csúcsának legalább 111 a fokszáma. (3 pont)
Ezért az órán tanult Dirac feltétel teljesül, (1 pont)
így a Dirac tétel miatt G-nek van Hamilton-köre. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (3 pont)