

2. Zárthelyi 2012 tavasz A2

Munkaidő: 90 perc

1. Legyen n tetszőleges pozitív egész és \underline{A} az alábbi négyzetes mátrix:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Adja meg \underline{A} inverzének (ha ez létezik) sajátértékeit!

2. Léteznek-e a következő határértékek?

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x + y}$$

3. Legyen $f(x, y) = x|x| + y|y|$. Deriválható-e f az origóban?

4. Legyen

$$f(x, y) = x^2 y^2 \quad \text{és} \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Felveszi-e f a szélsőértékeit H -n, és ha igen, hol és mennyi ezek értéke?

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{n^2}$$

6.

(a) Legyen T a sík egy zárt korlátos részhalmaza és legyen f tetszőleges T -n folytonos kétváltozós függvény. Igaz-e:

- (a1) f felvesz T -n minden két T -n felvett értéke közötti értéket,
(a2) f felveszi T -n a szélsőértékeit.

(b) Legyen f tetszőleges kétváltozós függvény és a a sík tetszőleges pontja. Igaz-e

- (b1) ha f folytonos a -ban, akkor léteznek itt a parciális deriváltjai,
(b2) ha f parciális deriváltjai léteznek az a -ban, akkor folytonos is itt.

(c) Legyen a a sík tetszőleges pontja és f tetszőleges a -ban deriválható kétváltozós függvény. Igaz-e:

- (c1) ha $\text{grad } f(a) = 0$, akkor f -nek lokális szélsőértékhelye van a -ban,
(c2) ha f -nek lokális szélsőértékhelye van a -ban, akkor $\text{grad } f(a) = 0$.