Valószínűségszámítás pót zh
2014. április 25.

1. Egy ládában 10 darab játékkocka van, melyek közül 9 teljesen szabályos, egy pedig hamis olyan értelemben, hogy vele mindig hatos dobható csak. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és azt háromszor feldobva mindig hatost kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hamis kockát vettük ki előzőleg?
Megoldás:
S szabályos kockát veszünk ki, $\mathbf{P}(S) = 0,9$
H hamis kockát veszünk ki, $\mathbf{P}(H) = 0,1$
T tripla hatost dobunk háromból, $\mathbf{P}(T \mid S) = \frac{1}{216}, \mathbf{P}(T \mid H) = 1$
Bayes tétellel
$\mathbf{P}(H \mid T) = \frac{\mathbf{P}(T|H)\cdot\mathbf{P}(H)}{\mathbf{P}(T|H)\cdot\mathbf{P}(H)+\mathbf{P}(T|S)\cdot\mathbf{P}(S)} = \frac{0,1}{0,1+0,9\cdot\frac{1}{216}} = \frac{21,6}{22,5} = 0,96$

2. Legyen $X \in U(0,1)$, és $Y = \sqrt{3X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!
Megoldás:
$R_Y = \left[0, \sqrt{3}\right] \Longrightarrow F_Y(t) = 0, t < 0$ és $F_Y(t) = 1, t > \sqrt{3}$.
$0 \le t \le \sqrt{3} : F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(\sqrt{3X} < t\right) = \mathbf{P}\left(X < \frac{t^2}{3}\right) = \frac{t^2}{3}$
$f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{2t}{3}, 0 < t < \sqrt{3}, f_Y(t) = 0, t \notin \left(0, \sqrt{3}\right)$.

3. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$3p$	p	$10p$
1	$10p$	$10p$	$26p$

Mekkora a p paraméter értéke? Függetlenek-e X és Y? $\mathbf{E}(XY) = ?$
Megoldás: A táblázatban álló valószínűségek összeg 1, így $p = \frac{1}{60}$.
Pl. $\mathbf{P}(X = -1) = \frac{13}{60}, \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{14}{60}, \mathbf{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{3}{60}$.
Mivel $\frac{3}{60} \neq \frac{13}{60} \cdot \frac{14}{60}$, nem teljesül a függetlenségi feltétel, azaz nem függetlenek.
$\mathbf{E}(XY) = (-1)\cdot(-1)\frac{3}{60} + (-1)\cdot 1 \cdot \frac{10}{60} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{10}{60} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{26}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$

4. Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztást az X jelöli 100 ezer literekben, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{, ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}.$$

Mekkora legyen a tartály K kapacitása, hogy annak valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin, kisebb legyen $0,01$-nél?
Megoldás:
Milyen K-ra teljesül, hogy $\mathbf{P}(X > K) \le 0,01$?
$\mathbf{P}(X > K) = \int_K^1 5(1-x)^4\,dx = (1-K)^5 \le 0,01$

Ebből: $K \geq 1 - \sqrt[5]{0,01} \simeq 0,602$.
Tehát kb. 60 000 literes tartály kell.

5. Legyen az $(X,Y)^T$ vektor valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$f(x,y) = \frac{1}{7}\left[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18\right],\ x \in [0,1]\,, y \in [0,1]\,.$
Számolja ki a perem sűrűségfüggványeket! Függetlenek a komponensek?
Megoldás:
$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{7}\left[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18\right] dy =$
$= \frac{1}{7}\left[3x^2y^2 - 6xy^2 + 3y^2 + 18x^2y - 36xy + 18y\right]_0^1 = \frac{1}{7}\left(21x^2 - 42x + 21\right) =$
$= 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x-1\right)^2, x \in [0,1]$
$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{7}\left[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18\right] dx =$
$= \frac{1}{7}\left[2x^3y - 6x^2y + 6xy + 6x^3 - 18x^2 + 18x\right]_0^1 = \frac{1}{7}\left(2y+6\right).y \in [0,1]$
Tehát: $f_X(x) = 3\left(x-1\right)^2, x \in [0,1]\,, f_Y(y) = \frac{2}{7}\left(y+3\right), y \in [0,1]$
Mivel az együttes sűrűségfüggvény $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ alakban felírható, X,Y függetlenek!