A. Felsőbb matematika (1.zh. 2015-04-09) Neptun: ________ Név: ______________________________ Gyv: ___

1. *Igaz–Hamis (I/H)* Mely válasz(ok) helyes(ek), mely(ek) nem az alábbi kérdésekre? (hibás vagy hiányzó válasz -1 pont)

a) Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ mátrix rangja 2. *(2 pont)*

(a) Sorterének és oszlopterének 2 a dimenziója. ☐

(b) $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakjának 2 zérussora van. ☐

(c) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek ∞ sok megoldása van bármely $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ vektorra. ☐

b) Hogyan változnak elemi sorműveletek közben a sor- és oszlopterek? *(2 pont)*

(a) A sortér nem változik. ☐

(b) Az oszloptér nem változik. ☐

(c) A sortér sorai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐

(d) Az oszloptér oszlopai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐

c) Mely állítások igazak a következők közül? *(2 pont)*

(a) Ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $(\mathbf{Ax}) \cdot (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, akkor $\det(\mathbf{A}) = 1$ vagy -1. ☐

(b) A nilpotens mátrixok karakterisztikus polinomja λ^k alakú ($k \in \mathbb{N}$). ☐

(c) Komplex önadjungált mátrix minden sajátértéke valós. ☐

(d) A mátrix soraihoz tartozó Gersgorin-körök mindegyikében egy sajátérték van. ☐

d) Pozitív definit-e az $\mathbf{A}$ mátrix, ha *(2 pont)*

(a) $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív. ☐

(b) $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ☐

(c) $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ☐

(d) $\mathbf{A}$ minden vezető főminora nemnegatív. ☐

2. Legyen $\mathcal{B} = \{(2,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Írjuk fel a standard bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés $\mathbf{B}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$, valamint a $\mathcal{C}$-ről a $\mathcal{B}$-re való áttérés $\mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ mátrixát! (A műveleteket csak jelölni kell, nem kell elvégezni!) *(2 pont)*

3. Írjuk le azt az algebrai feltételt, mely szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix *(a)* unitéren, *(b)* ortogonálisan diagonalizálható legyen! *(2 pont)*

4. Mit jelent az, hogy az $\mathbf{U}$ mátrix *(a)* unitér, *(b)* önadjungált? *(2 pont)*

5. Csak az ortogonalitás definícióját használva mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ azonos méretű ortogonális mátrixok, akkor $\mathbf{PQ}$ is ortogonális. *(2 pont)*

6. Legyen *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Határozzuk meg az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrix redukált lépcsős alakját $\mathbb{F}_2$ fölött! Ennek alapján megoldható-e az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer $\mathbb{F}_2$ fölött?

(b) Adjuk meg $\mathbf{A}$ PLU-felbontását $\mathbb{R}$ fölött, és segítségével oldjuk meg $\mathbb{R}$ fölött az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert!

7. Adva van a $2x + y + z = 0$ egyenletű S sík, és az $(1,1,0)$ irányvektorú e egyenes. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a teret *(a)* az S mentén e-re vetíti; *(b)* az e mentén S-re vetíti. *(5 pont)*

8. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 9 \\ 4 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer optimális megoldását a QR-felbontás segítségével! *(5 pont)*

9. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét! *(4 pont)*

10. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot és adjuk meg a spektrálfelbontását! Adjuk meg azt a mátrixot, mely az 1-hez tartozó sajátaltér mentén a 2-höz tartozó sajátaltérre vetít! *(5 pont)*