1. feladat (14 pont)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n+1}{3n^3+2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+3n^2+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)*\left(\sqrt{n^4+3n^2+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^4+3n^2+1\right)-\left(n^4-3n^2+5\right)}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-4}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+\sqrt{n^4-3n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}\frac{6-\frac{4}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}}\right)=\frac{6}{1+1}=3$$

Mivel $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, ha $\alpha>0$
és ha $\lim_{n\to\infty}a=A$ és $\lim_{n\to\infty}b=B$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a+b)=A+B$

2. feladat (8 pont)

Írja le a szükséges és elégséges feltételt a számsorozatok konvergenciájához (Cauchy-féle konvergenciakritérium)

Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, M(\varepsilon) \in$ N:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m > M(\varepsilon) \; eseten$$

3. feladat (14 pont)

$a_1 = \frac{1}{7} \qquad a_n = 1 - \frac{2}{2+a_{n-1}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$$a_1 = \frac{1}{7} \quad a_2 = \frac{1}{15} \quad a_3 = \frac{1}{31}$$

Sejtés: $a_n \searrow$

Bizonyítás teljes indukcióval:

1. $a_1 > a_2 > a_3$ igaz
2. T.f.h $a_n < a_{n-1}$
3. Ekkor lássuk be, hogy $a_{n+1} < a_n$

$$\text{2. miatt } a_n < a_{n-1} \Rightarrow 2 + a_n < 2 + a_{n-1} \Rightarrow \frac{2}{2+a_n} > \frac{2}{2+a_{n-1}}$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{2+a_n} < 1 - \frac{2}{2+a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

Vagyis a sor monoton csökken.

Ezután a korlátosságot kell belátni.

1. $a_1 > 0$ $a_2 > 0$ $a_3 > 0$
2. T.f.h $a_n > 0$
3. Ekkor lássuk be, hogy $a_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{2. miatt: } a_n &> 0 \\ 2 + a_n &> 2 \\ \frac{1}{2+a_n} &< \frac{1}{2} \\ \frac{-2}{2+a_n} &> \frac{-2}{2} \\ 1 - \frac{2}{2+a_n} &> 0 \\ a_{n+1} &> 0 \end{aligned}$$

Mivel a sorozat monoton csökken, és alulról korlátos, ezért konvergens:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{2+a_{n-1}}\right)$$

$$A = 1 - \frac{2}{2+A} \Rightarrow A^2 + 2A = A + 2 - 2 \Rightarrow A^2 + A = 0 \Rightarrow A = -1 \text{ vagy } A = 0$$

Mivel $a_n > 0$, ezért csak az A=0 megoldás, vagyis a sorozat konvergens és a határértéke 0.

4. feladat (16 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+9}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+5}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+9}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{9}{n}\right)^n}=\frac{e^5}{e^9}=e^{-4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{n^2+4}}=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2+5}{n^2+4}}{\frac{n^2+3}{n^2+4}}\right)^{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2+4}}{1+\frac{-1}{n^2+4}}\right)^{n^2+4}=\frac{e^1}{e^{-1}}=e^2$$

Mivel

$$1<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{n^2+4}=e^2<10$$

ezért lehet 1-gyel alulról és 10-zel felülről becsülni, ugyanis kellően nagy n-től kezdve ezen tartományon belülre esik.

Ezek alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{n^2+4}}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1$$

Vagyis a rendőrelv alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{n^2+4}}=1$$

5. feladat (12 pont)

Keresse meg az alábbi sorozat torlódási pontjait.

$\underline{\lim}\, a_n = ?$ $\overline{\lim}\, a_n = ?$ $\lim\ a_n = ?$

$$a_n = \frac{n^3 \cos(n\frac{2\pi}{3}) + n^3 + 4n}{7n^3 + 11}$$

$$\text{Ha } n = 3m \Rightarrow \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3m\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi m\right) = \cos\left(2\pi\right) = 1$$

$$a_n = \frac{n^3(1) + n^3 + 4}{7n^3 + 11} = \frac{2n^3 + 4}{7n^3 + 11} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 4}{7n^3 + 11} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{7 + \frac{11}{n^3}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Ha } n = 3m + 1 \Rightarrow \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left((3m + 1)\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi m + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{n^3(-\frac{1}{2}) + n^3 + 4n}{7n^3 + 11} == \frac{\frac{1}{2}n^3 + 4}{7n^3 + 11} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^3 + 4}{7n^3 + 11} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{n^3}}{7 + \frac{11}{n^3}} = \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{14}$$

$$\text{Ha } n = 3m + 2 \Rightarrow \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left((3m + 2)\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi m + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

vagyis megegyezik az előzővel

$$\text{A torlódási pontok : } \frac{1}{14}, \frac{2}{7}$$

$\underline{\lim}\, a_n = \frac{1}{14}$ $\overline{\lim}\, a_n = \frac{2}{7}$ $\lim\ a_n =$ nem létezik, mert 2 torlódási pont van

6. feladat (14 pont)

Mikor mondjuk, hogy egy numerikus sor konvergens?

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) = s \in R$$

(véges) határérték

A definíció alapján döntse el, hogy konvergens-e az alábbi sor!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= 1 \\ a_{4k+2} &= 0 \\ a_{4k+3} &= -1 \\ a_{4k} &= 0 \end{aligned}$$

Ebből következően:

$$\begin{aligned} s_{4k+1} &= 1 \\ s_{4k+2} &= 1 \\ s_{4k+3} &= 0 \\ s_{4k} &= 0 \end{aligned}$$

Vagyis nem létezik a határérték (2 torlódási pont van), ezért divergens.

7. feladat (12 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n + 2^{2n}}{n6^{n+1}} < \sum_{1}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{6^{n+1}} < \sum_{1}^{\infty} \frac{5^n + 5^n}{6 * 6^n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{6} \frac{5^n}{6^n} = \frac{1}{3} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5}{3}$$

Mivel létezik konvergens majoráns, ezért a majoráns kritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2}{2n^3 - 3n} > \sum_{1}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2}{2n^3} > \sum_{1}^{\infty} \frac{2n^3 - n^3}{2n^3} = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Mivel létezik divergens minoráns, ezért a minoráns kritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

8. feladat (10 pont)

Írja le a Leibniz kritériumot.

Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékéből képzett sorozat(c_n) monoton fogyóan tart 0-hoz ($c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n^2+6\right)}{n^3+6n+1}$$

A $(-1)^n$-es tag miatt alternáló sorról van szó. Ha teljesíti a Leibniz kritériumot konvergens.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{n^3+6n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^3} \frac{1+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

A sor konvergens, mivel $c_n \to 0$

Pótfeladat
Csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki

9. feladat (12 pont)

Írja le a számsorozatokra vonatkozó rendőrelvet.

$$a_n \to A,\; b_n \to A \;\text{ és } a_n < c_n < b_n \;\forall\; N$$
$$\Downarrow$$
$$c_n \to A$$

$$4 = n \to \infty \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{4^n + n} < \sqrt[n]{4^n + 4^n} = \left(4\sqrt[n]{2}\right) \to 4$$

Vagyis a rendőrelv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n} = 4$$