

## 2. Zárthelyi

1. Határozz meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!
2. A  $G(V, E)$  összefüggő gráf olyan, hogy akárhogyan is választunk ki egy  $e \in E$  élet és egy  $v \in V$  csúcst, van egy köre a gráfnak, amely átmegy az  $e$  élen és a  $v$  csúcson is. Igazold, hogy ekkor  $G$  kétszeresen pontösszefüggő!
3. Egy négyzetrácsban legyen egy lépés, hogy egy négyzetből átmehetünk egy vele közös éllel rendelkező négyzetbe. A 100-szor 100-as rácsban mi az a legkevesebb szín, amivel a négyzetek kiszínezhetők úgy, hogy az egymásból pontosan két lépéssel elérhető négyzetek színe különböző?
4. Bizonyítsd be, hogy ha  $G$  egy  $n$  csúcsú egyszerű reguláris gráf, akkor  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ . ( $\overline{G}$  a  $G$  gráf komplementerét jelöli.)
5. Legyen  $G$  egy egyszerű összefüggő síkbarajzolható gráf, amelynek minden tartományát pontosan 6 él határolja. Bizonyítsd be, hogy a  $G$  gráfnak van legfeljebb másodfokú csúcsa!
6. Mi a bonyolultsága a következő feladatnak?  
Bemenet: egy  $G(V, E)$  gráf és egy  $A \subseteq V$  részhalmaza a csúcsainak.  
Kérdés: kiszínezhető-e  $G$  3 színnel úgy, hogy az  $A$ -beli csúcsok színe azonos legyen?
7. Jelölje  $F_k$  a  $k$ -adik Fibonacci-számot, azaz legyen  $F_1 = F_2 = 1$ , és ha  $n > 2$ , akkor  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Található-e olyan  $k$ , hogy  $F_k$  és  $F_{k+2}$  is osztható hárommal?
8. Relatív prím-e a következő két szám:  $2^{100} - 1$  és  $3^{100} - 1$  ?

Minden feladat teljes megoldása 10 pontot ér. Részeredményekért is jár pont, indoklás nélküli eredményközlésért viszont nem.

Osztályozás: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5.