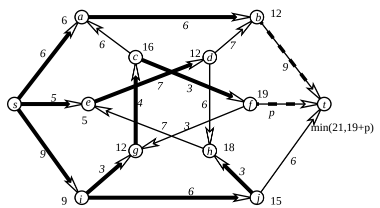
A számítástudomány alapjai

2. pótZH javítókulcs

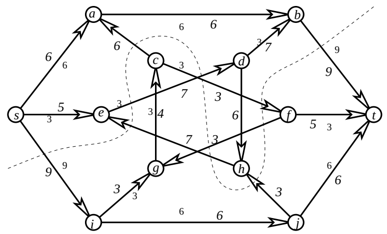
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését: ennek feltétele az is, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása is kiderüljön a dolgozatból.
Természetesen az alább ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott részpontszámok járnak.
Szolgálati közlemény: Mindenki gyártson kartont a saját új hallgatóinak, ill. keresse elő a régiek kartonját. Ezen tüntesse fel az eddigi eredményeket, és a már aláírást szerzett hallgatók listáját juttassa el Katának.

1. Határozzuk meg az ábrán látható gráfban minden csúcs s-től mért távolságát a $p \geq 0$ paraméter függvényében, ahol az egyes élekre írt számok az adott él hosszát jelentik!



Mivel minden élhossz pozitív, alkalmazhatjuk az órán tanult Dijkstra algoritmust az s-től mért távolságok meghatározására. (4 pont)
Az ábrán G minden csúcsa mellett az s-től mért távolsága szerepel, és megvastagítottuk azokat az éleket, ami az adott csúcs távolságát meghatározta. (h-ra a d-ből induló él is jó lett volna.) (4 pont)
A t távolsága függ a p paraméter értékétől, hisz $p \leq 2$ esetén a távolság $19 + p$, egyébként pedig 21. (2 pont)

2. Határozzuk meg a fenti G gráfhoz tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értékét $p = 5$ választás mellett.

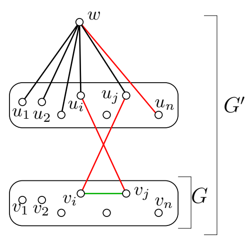


Az órán tanult javító utas módszerrel meghatároztunk egy folyamot, amint az ábrán látható. (A kisméretű számok jelentik az adott élen átfolyó folyammennyiséget, ahol nincs szám, ott 0 mennyiségű folyam folyik.) (4 pont)
Ennek a folyamnak az értéke 18. (2 pont)
A kapott folyam maximalitását az ábrán jelölt, 18 kapacitású vágás bizonyítja. (3 pont)
A hálózatbeli maximális folyamérték tehát 18. (1 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G irányítatlan gráfnak van hat éldiszjunkt Hamilton köre, akkor G 10-szeresen élösszefüggő!

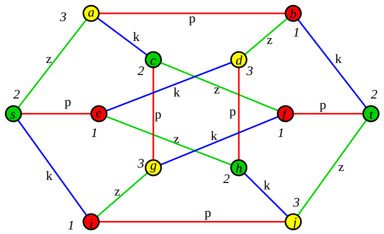
Azt kell igazolni, hogy bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 9 élt, a kapott gráf összefüggő marad. (2 pont)
Ha G-ből tehát ennyi élt elhagyunk, akkor nem történhet meg az, hogy a hat Hamilton kör minedgyikéből legalább két élt elhagyjunk, hiszen ekkor legalább 12 élt kellett volna törölnünk. (3 pont)
Lesz tehát a hat éldiszjunkt Hamilton kör között olyan, aminek legfeljebb egy élét hagytuk el. (2 pont)
Ezért az elhagyás utáni gráf tartalmaz Hamilton utat, (2 pont)
tehát összefüggő, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G gráfnak létezik olyan párosítása, ami egy pont híján G összes pontját fedi. Képezzük a G' gráfot G-ből a Mycielski konstrukció segítségével. Bizonyítsuk be, hogy G'-nek is van olyan párosítása, ami G'-nek egy híján minden csúcsát fedi!



A Mycielski konstrukció során G minden v_i csúcsának lesz egy u_i párja és bevezetünk egy új, w csúcsot is. A kapott G' gráfban w minden u_i-vel szomszédos, minden v_i pedig a G-beli szomszédaival, és azok párjaival lesz összekötve, G'-nek további éle nincs. (2 pont)
Tegyük fel, hogy létezik olyan párosítása G-nek, ami v_n híján minden v_i csúcsot fed! Cél, hogy G'-nek egy olyan párosítását adjuk meg, ami v_n híján G' minden csúcsát fedi. (1 pont)
Vegyük a párosításba a wu_n élt, (1 pont)
illetve a G-beli párosítás minden v_iv_j éle helyett vegyük be a v_iu_j és v_ju_i éleket. (2 pont)
Világos, hogy így párosítást kaptunk, hiszen egyetlen csúcsra sem illeszkedik két kiválasztott él. (1 pont)
A konstrukció miatt v_n-t nem fedik a kiválasztott élek, de w és v_n is fedett. (1 pont)
Ha pedig $1 \leq i < n$, akkor u_i és v_i is fedett, hiszen ha a G-beli párosításnak v_iv_j egy éle volt, akkor v_iu_j és v_ju_i a G' párosításának lesznek élei. (1 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy csakugyan létezik G'-nek a kívánt tulajdonságú párosítása. (1 pont)

5. Határozzuk meg az 1. feladathoz tartozó gráf irányítatlan megfelelőjének kromatikus és élkromatikus számát!



A G gráfban a d, e és h pontok klikket alkotnak, (1 pont)
így G kiszínezéséhez legalább 3 szín kell, $\chi(G) \geq 3$. (1 pont)
Az ábrán látható G egy 3 színnel való színezése, (1 pont)
amiből $\chi(G) \leq 3$ következik, (1 pont)
tehát G kromatikus száma $\chi(G) = 3$. (1 pont)
A G gráfnak van harmadfokú csúcsa (konkrétan minden csúcs harmadfokú), (1 pont)
így $E(G)$ kiszínezéséhez legalább 3 színre van szükség: $\chi'(G) \leq 3$. (1 pont)
Az ábrán megadtuk az éleknek egy 3 színnel történő kiszínezését, (1 pont)
amiből $\chi'(G) \leq 3$ következik, (1 pont)
tehát G élkromatikus száma $\chi'(G) = 3$. (1 pont)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráf minden pontját és élét ki akarjuk úgy színezni, hogy a közös végponttal rendelkező élek, a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek, és tetszőleges e él színe különbözzék e bármelyik végpontjának színétől, akkor ehhez legalább $\Delta(G) + 1$ színre van szükség!

Legyen v a G egy $\Delta(v)$ fokszámú csúcsa. (1 pont)
Világos, hogy v színe különbözik mind a $\Delta(G)$ darab, v-ből induló él színétől, (3 pont)
és természetesen mindezen élek színe is páronként különböző. (3 pont)
Tehát már csupán v-nek és a belőle induló éleknek a kiszínezéséhez legalább $\Delta(v) + 1$ színre van szükség, (2 pont)
ezért G feladatbeli színezéséhez is legalább ennyi szín kell. (1 pont)

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a, m és n pozitív egészekre $a^n \equiv 1 (\text{mod } m)$, akkor $a^d \equiv 1 (\text{mod } m)$, ahol d az a és $\varphi(m)$ legnagyobb közös osztója.

Ha $a^n \equiv 1 (\text{mod } m)$, akkor a-nak és m-nek nem lehet közös prímosztója, (1 pont)
ezért a és m relatív prímek: $(a, m) = 1$. (1 pont)
Alkalmazhatjuk tehát az Euler-Fermat tételt, miszerint $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\text{mod } m)$. (2 pont)
Az Euklideszi algoritmussal kapcsolatban tanultuk, hogy két szám legnagyobb közös osztója a előáll a két szám egész kombinációjaként, (1 pont)
amit a $d = (n, \varphi(m))$ esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy $d = X \cdot n + Y \cdot \varphi(m)$ teljesül alkalmas X, Y egész számokkal. (3 pont)
Innen $a^d = a^{X \cdot n + Y \cdot \varphi(m)} = (a^n)^X \cdot (a^{\varphi(m)})^Y \equiv 1^X \cdot 1^Y = 1 (\text{mod } m)$, és éppen ezt kellett igazolnunk. (2 pont)
Kicsit még piszmogni kellene azzal, hogy X és Y közül egyik negatív, de ne törődjünk vele. *FT*

8. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív, egész, akkor $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$ teljseül.

Az órán tanultuk, hogy ha $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ az n kanonikus alakja, akkor $\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i})$. (3 pont)
Világos, hogy az n^2 kanonikus alakja $n^2 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{2\alpha_i}$, (2 pont)
ezért $\varphi(n^2) = n^2 \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i}) =$ (2 pont)
$= n \cdot n \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i}) =$ (2 pont)
$= n \cdot \varphi(n)$, és éppen ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)