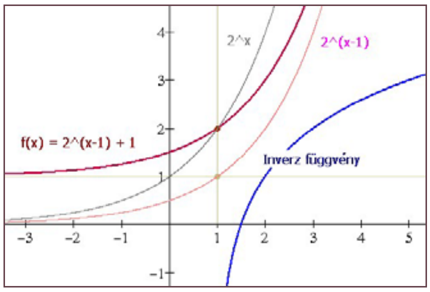
2009. október 28. Bev. Mat. 1. zárthelyi Megoldások A. csoport 90 perc.

1. $A = 3\cdot\log_2 8 + 3^{\log_{1/3}2} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = ?$

$A = 3\cdot\log_2 2^3 + 3^{-\log_3 2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 3\cdot 3 + \frac{1}{2} - (2+\sqrt{3}) = 7.5-\sqrt{3}$.



2. $f(x) = 2^{x-1}+1$. Ábrázolja a függvényt, és adja meg az inverzét ! f szig.mon.nő $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists\, f^{-1}$: $x = 2^{y-1}+1 \Rightarrow y-1 = \log_2(x-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1+\log_2(x-1)$.

3. $\lg\sqrt{x^2-3x} - \lg\sqrt{3-x} = \lg 5$, $x = ?$

$\frac{1}{2}\cdot\lg(x^2-3x) - \frac{1}{2}\cdot\lg(3-x) = \lg 5 \Rightarrow \lg\frac{x^2-3x}{3-x} = \lg 5^2 \Leftrightarrow \frac{x\cdot(x-3)}{3-x} = 25 \Rightarrow x = -25$.

4. $f(x) = \dfrac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4)\cdot 3x\cdot x^2}{(x^2-4)^4}$. Adja meg a fgv. zérushelyeit és ért.tart.-t ! $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R}\setminus\{2,-2\}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x^2-4) + 2\cdot 3x\cdot x^2}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 2x\cdot((x^2-4)+3x^2) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(4x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ 1,\ -1$.

5. $x^2 < 3-|x-1|$, $x = ?$ $x^2+|x-1|-3 < 0$ **I.** Ha $x-1\geq 0$, akkor $x^2+(x-1)-3 < 0$ az egyenlőtlenség.

$x^2+x-4 = 0$ gyökei $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ és $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x\geq 1$ -re megoldások: $1\leq x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, **II.** Ha $x-1<0$, akkor

$x^2-(x-1)-3 < 0$, $x^2-x-2 = 0$ gyökei $-1,\ 2 \Rightarrow x<1$ -re megoldások: $-1< x < 1$. $\Rightarrow$ **Megoldás:** $-1 < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

6. $3\cos 2x + 2\sin x = 3$, $x = ?$ $3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x = 3 \Leftrightarrow 3(1-2\sin^2 x) + 2\sin x = 3 \Leftrightarrow$

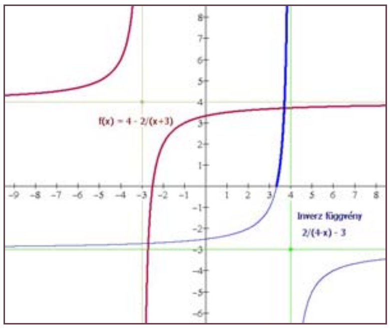
$-3\cdot 2\sin^2 x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\cdot(3\sin x - 1) = 0$ **I.** $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\cdot\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

II. $\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \approx \frac{\pi}{9} + k\cdot 2\pi$ és $x \approx \frac{8\pi}{9} + k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

2009. október 28. Bev. Mat. 1. zárthelyi Megoldások B. csoport 90 perc.

1. $B = 3^{2-\log_3 10} + \lg\sqrt[3]{1000} + \cos 1620^\circ = ?$

$B = 3^2\cdot 3^{-\log_3 10} + \lg\sqrt[3]{10^3} + \cos(4\cdot 360^\circ + 180^\circ) = 9\cdot 10^{-1} + \lg 10 + \cos 180^\circ = 0.9+1-1 = 0.9$.



2. $f(x) = \dfrac{4x+10}{x+3}$. Ábrázolja a függvényt ! Adja meg az inverzét, ha $x>0$!

$f(x) = 4-\dfrac{2}{x+3}$, f $\mathbf{R}^+$ -on szig.mon.nő $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$. $x = 4-\dfrac{2}{y+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2}{y+3} = 4-x \Rightarrow \dfrac{2}{4-x} = y+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2}{4-x}-3$.

3. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$, $x = ?$ $\Rightarrow (x+1)^4 = (x^2+x-6)^2 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2 = |x^2+x-6|$. $x^2+x-6 = 0$ gyökei $-3,\ 2 \Rightarrow$

I. Ha $x\leq -3$ vagy $2\leq x$, akkor $(x+1)^2 = x^2+x-6 \Leftrightarrow 2x+1 = x-6 \Leftrightarrow x = -7$ nem megoldás ($x+1>0$ felt. **!**)

II. Ha $-3<x<2$, akkor $(x+1)^2 = -(x^2+x-6) \Leftrightarrow 2x^2+3x-5 = 0$ gyökei $-\frac{5}{2}, 1\in(-3,2)$, melyekből $x = 1$ **megoldás** !

4. $g(x) = \dfrac{2(x^2-4)\cdot 2x\cdot x^3 - 3x^2(x^2-4)^2}{x^6}$. Adja meg a fgv. zérushelyeit és ért.tart.-t ! $x^6\neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$,

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x^2-4)\cdot x^2 - 3(x^2-4)^2}{x^4} = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)\cdot(4x^2-3\cdot(x^2-4)) = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)\cdot(x^2+12) = 0 \Rightarrow x = 2, -2$.

5. $|x-2| + 1 \geq \dfrac{2}{x}$, $x = ?$ **I.** Ha $x-2\geq 0$, akkor $x-2+1\geq\frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2-x-2\geq 0$, b.o. zérushelyei $-1, 2 \Rightarrow$

$x\geq 2$ megoldások. **II.** Ha $x-2<0$, akkor $-(x-2)+1\geq\frac{2}{x}$, poz. x -ekre $-x^2+3x-2\geq 0$, a b.o. zérushelyei $1, 2 \Rightarrow$

$1\leq x < 2$ a megoldások; neg. x -ekre pedig mindig teljesül az egyenlőtlenség. $\Rightarrow$ **Megoldások:** $x\in\mathbf{R}\setminus[0,1)$.

6. $\cos^2 x + 2\sin x = -\dfrac{1}{4}$, $x = ?$ $1-\sin^2 x + 2\sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$, u.i.

az $\frac{5}{2}$ gyök nem lehetséges sin érték. $\Rightarrow$ **Megoldások:** $x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ és $x = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.