Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Mindenkinek köszönjük a javítási munkát.

1. Írjuk fel a háromdimenziós tér $P = (1, 1, 1)$ és $Q = (3, 1, 5)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az y tengelyt?

   Megoldás:

   A sík felírható, ha ismerjük a normálvektorát és egy pontját. (1 pont)

   Mivel a felezőmerőleges sík merőleges a két megadott pontot összekötő szakaszra, a normálvektor e szakasszal párhuzamos. (1 pont)

   Normálvektornak jó lesz tehát az $\mathbf{n} = (3 - 1, 1 - 1, 5 - 1) = (2, 0, 4)$ vektor. (1 pont)

   Vagyis a sík egyenlete $2x + 0y + 4z = c$ alakú, ahol c még kiszámítandó. (1 pont)

   A PQ szakasz felezőpontjának koordinátái $(2, 1, 3)$, ez a pont tehát rajta van a kért síkon. (1 pont)

   Koordinátáit a sík egyenletébe beírva $2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = c$, vagyis $c = 16$ adódik. (1 pont)

   Vagyis a kérdéses síkegyenlet: $2x + 4z = 16$, avagy az ezzel ekvivalens $x + 2z = 8$. (1 pont)

   Az y tengely, mint egyenes egyenletrendszere $x = 0$, $y = 0$. (1 pont)

   A keresett metszéspont koordinátáira tehát teljesülnie kell az $x = 0$, $y = 0$, $x + 2z = 8$ egyenleteknek. (1 pont)

   Mivel ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, a sík nem metszi az y tengelyt. (1 pont)

2. Legyen U tetszőleges vektortér, V és W pedig U alterei. Mutassuk meg, hogy ekkor $V \cap W$ is altere U-nak.

   Megoldás:

   Az előadáson tanult tétel szerint azt kell megmutatni, hogy ha $a, b \in V \cap W$, λ pedig valós szám, akkor λa és $a + b$ is elemei $V \cap W$-nek. (3 pont)

   Mivel V altere U-nak $a, b \in V$-ből következik, hogy λa és $a + b$ is eleme V-nek. (4 pont)

   Mivel ugyanez W-ről is elmondható, adódik, hogy ha a és b a metszetben van, akkor ott lesz λa és $a + b$ is, amint bizonyítani kellett. (3 pont)

3. Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $a, b, c, d \in R^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } d = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

A 4 vektor akkor lesz független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, (1 pont)

vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 1 & 1 & p & 1 & 0 \\ 1 & p & 1 & 1 & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (1 pont)

A Gauss-elimináció során az első lépések után az

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 1-p & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p^2 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (1 pont)

A 2. és 3. sort megcseréljük, majd két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $p = 1$ vagy sem.

Ha $p = 1$, akkor az utolsó három sort törölni kell, így nyilván nem lesz egyértelmű megoldás, a vektorok ekkor tehát nem függetlenek. (1 pont)

Ha $p \neq 1$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p^2+2(1-p) & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (2 pont)

Ennek akkor és csak akkor lesz egyértelmű megoldása, ha $1 - p^2 + 2(1 - p) \neq 0$, hiszen ekkor jön létre a 4. oszlopban is vezéregyes. (2 pont)

Mivel $1 - p^2 + 2(1 - p) = (1 - p)(1 + p + 2)$ és $p \neq 1$, ez $p \neq -3$ esetén teljesül. (1 pont)

A vektorok tehát a $p = 1$ és $p = -3$ esetekben nem függetlenek, p minden más értékére igen. (1 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c és d paraméterek minden értékére.

$$\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 5 \\ 2x - y & = & 8 \\ 3x + 6y + cz & = & d \end{array}$$

Megoldás:

Gauss elimináció során az

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c-30 & d-27 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (2 pont)

Ha $c = 30, d \neq 27$, akkor az utolsó sor tilos sor, így nincs megoldás. (2 pont)

Ha $c = 30, d = 27$, akkor az utolsó, csupa 0 sort törölve meg is kapjuk az RLA-t, ahonnan a megoldás $x = 5 - 2p, y = 2 - 4p, z = p$, ahol p tetszőleges valós szám. (3 pont)

Ha $c \neq 30$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-2\frac{d-27}{c-30} \\ 0 & 1 & 0 & 2-4\frac{d-27}{c-30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{d-27}{c-30} \end{array}\right)$$

RLA-t kapjuk, (2 pont)

ahonnan a megoldás $x = 5 - 2\frac{d-27}{c-30}$, $y = 2 - 4\frac{d-27}{c-30}$, $z = \frac{d-27}{c-30}$. (1 pont)

5. Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor legfeljebb 20 nullától különböző szorzatot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor a mátrix legalább 5 nullát tartalmaz.

Megoldás:

Egy mátrixelem a determináns definíció szerinti felírásakor összesen $4! = 24$ szorzatban jelenik meg szorzótényezőként, egy 0 tehát 24 szorzatot tud "kinullázni". (4 pont)

Összesen $5! = 120$ szorzat van. (1 pont)

Ha legfeljebb 20 lesz nemnulla, akkor legalább 100 lesz 0. (0 pont)

Ha legfeljebb négy 0 lenne a mátrixban, akkor legfeljebb $4 \cdot 24 = 96$ szorzat lehetne 0, hiszen minden 0 szorzat valamelyik tényezőjének 0-nak kell lennie. (4 pont)

A 100 nullává váló szorzathoz tehát nem elég 4 nulla, legalább 5-re van szükség. (1 pont)

(5 egyébként persze elég is, ha egy sor minden eleme 0.)

6. Léteznek-e olyan 2×3-as A és 3×2-es B mátrixok, melyek egyike semáll csupa 0-ból, de az AB és a BA szorzatmátrixok mindketten csupa 0-bólállnak?

Megoldás:

Igen, vannak ilyenek, ennek bizonyításához elég egy példát mutatni. (2 pont)

Jó lesz például az, ha A bal felső és B jobb alsó eleme 1, az összes többi elem pedig 0. (8 pont)