ANALÍZIS(2) **Vizsgadolgozat** **2010.01.11.**

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' - \frac{2y}{x} = 2x + 3, \qquad\qquad y(x) = ?$$

2. feladat (15 pont)

a) Legyen $f(x)$ a $[-R, +R]$ intervallumon $n+1$-szer folytonosan differenciálható függvény. Írja föl $f(x)$-et az origó középontú, n-edrendű Taylor-polinom, és a Lagrange-féle maradéktag összegeként, ha $x \in (-R, +R)$!

b) Határozza meg az $f(x) = \cos(x)$ függvény origó középpontú harmadrendű $T_3(x)$ Taylor-polinomját, és adjon becslést a $\cos(x) \approx T_3(x)$ közelítés hibájára, ha $x \in [0, 0.1]$!

3. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \qquad\qquad g(x) = \ln(1-2x).$$

Határozza meg f és g origó középpontú hatványsorát, és adja meg mindkét esetben a konvergenciasugarat! (A g függvény sorfejtéséhez felhasználhatja az f sorfejtését.)

4. feladat (15 pont)

a) Definiálja az $f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban az $\mathbf{e}$ egységvektor irányába vett iránymenti deriváltját!

b) Ha a függvény totálisan deriválható, hogyan számolhatjuk ki az iránymenti deriváltat? (Egy tételt mondjon ki.)

c)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}, \qquad (x_0, y_0) = (1, 2), \qquad \mathbf{e} \parallel \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad |\mathbf{e}| = 1.$$

Határozza meg f-nek $(1, 2)$-ben az $\mathbf{e}$ irányú iránymenti deriváltját!

5. feladat (13 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -1, & \text{ha } x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

a) Határozza meg az $f(x)$ függvény Fourier-sorát!

b) Adja meg a Fourier-sor $\Phi(x)$ összegfüggvényét!

6. feladat (14 pont)*

Határozza meg a következő mennyiségek algebrai alakját! (Valós és képzetes részét.)

$$e^{(2+3i)} = ?, \qquad \sin(2+3i) = ?, \qquad \ln(2-2i) = ?, \qquad (1+i)^i = ?$$

7. feladat (13 pont)*

a) Ismertesse a Cauchy-féle integrálformulát! (Cauchy-féle I. integrálformula.)

b) Határozza meg a következő körintegrálok értékét algebrai alakban!

$$a) \quad \oint_{|z-1|=1} \frac{z}{z^2+1} dz = ? \qquad b) \quad \oint_{|z-1|=2} \frac{z}{z^2+1} dz = ?$$

(Az integrálási görbét egyszer járjuk körbe pozitív irányban.)

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai a $\sin(2x)$ és az x függvények! Adja meg az egyenlet általános megoldását is!

9. feladat (10 pont)

a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot!

b) Konvergens-e a következő numerikus sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!