

1. feladat (10 pont)

Definícióval igazolja a következő állítás helyességét! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2n-1}{n+2}}_{a_n} = 2 \quad \text{"A"}$$

$$|a_n - A| = \left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| = \frac{|2n-1-2(n+2)|}{n+2} = \frac{|-5|}{n+2} = \frac{5}{n+2} < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < n+2, \text{ azaz } n > \frac{5}{\varepsilon} - 2, \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{5}{\varepsilon} - 2 \right] \quad (N(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon} \text{ helyes})$$

2. feladat (10+10+10=30 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

$$(a) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n; \quad (b) \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 + 2}{n + 3}}; \quad (c) \quad c_n = \frac{3^n + n^2}{n! + 2^n}.$$

$$(a) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n = \frac{n^2 + 5n - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} \rightarrow \frac{5}{1+1} = \underline{\frac{5}{2}}$$

$$(b) \quad \sqrt[n]{\frac{n}{4}} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{4n}} \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 + 2}{n + 3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2 + 2n^2}{n}} = \sqrt[n]{3n}$$

$\downarrow \textcircled{1} \quad 1 \quad \text{Rendőr elv alapján } b_n \rightarrow \underline{1} \quad \textcircled{2} \quad \downarrow \textcircled{1} \quad 1$

$$(c) \quad c_n = \frac{3^n + n^2}{n! + 2^n} = \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{1 + \frac{2^n}{n!}} \rightarrow \underline{0}$$

Tudjuk, hogy $n^k \ll a^n \ll n!$ ($a > 1$)

3. feladat (6+6+9+9=30 pont)

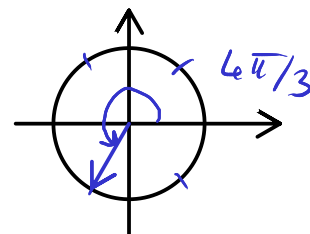
$$z_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right),$$

$$z_2 = -1 + \sqrt{3} \cdot i$$

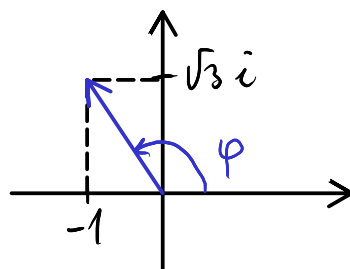
Határozza meg a következő mennyiségeket az előírt alakban!

- (a) z_1 , algebrai alakban;
- (b) z_2 , exponenciális vagy trigonometrikus alakban;
- (c) $z_1 \cdot z_2$, algebrai alakban;
- (d) z_2^8 , exponenciális vagy trigonometrikus alakban.

$$(a) \quad z_1 = 3 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{-\frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$



$$(b) \quad |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z_2 = \frac{2\pi}{3}$$



$$z_2 = 2 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}} = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$(c) \quad z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 + \sqrt{3}i) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)i = \underline{6}$$

$$(d) \quad z_2^8 = \left(2 e^{i \frac{2\pi}{3}} \right)^8 = 2^8 \cdot e^{i \frac{16\pi}{3}} = 2^8 \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}} = 2^8 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

4. feladat (10+10+10=30 pont)

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 1}$$

Határozza meg a következő határértékeket! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = ?$

(c) $\lim_{x \rightarrow +1-0} f(x) = ?$

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$
 Ha x elég nagy,
 $x^2 - x - 2 > 0$

(b) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1); \quad x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{|x - 2|}{x - 1} \cdot \frac{|x + 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{|x - 2|}{x - 1} \cdot \frac{x + 1}{x + 1} = -\frac{3}{2}$
 $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$
 $\frac{|-1-2|}{-1-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

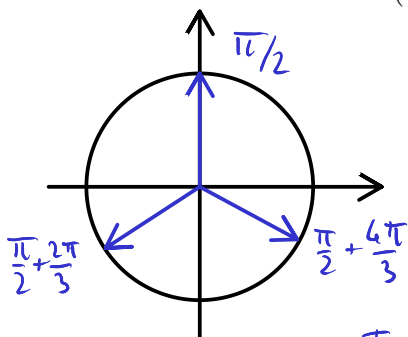
(c) $\lim_{x \rightarrow +1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1-0} \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{|x^2 - x - 2|}{x + 1} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

Határozza meg az

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

numerikus sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját és limesz superiorját! Létezik-e a sorozat határértéke? (Indokoljon!)



$$a_n = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} = 1, & \text{ha } n = 3k \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, & \text{ha } n = 3k+1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, & \text{ha } n = 3k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \text{Torl}(a_n) = \{1, -\frac{1}{2}\}; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$

$\limsup a_n \neq \liminf a_n \Rightarrow \nexists \lim a_n$

1. feladat (10 pont)

Definícióval igazolja a következő állítás helyességét! ($N(\varepsilon) = ?$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3n-1}{n+5}}_{a_n} = 3 = A$$

$$|a_n - A| = \left| \frac{3n-1}{n+5} - 3 \right| = \frac{|1-16|}{n+5} = \frac{16}{n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{16}{\varepsilon} - 5; N(\varepsilon) = \left[\frac{16}{\varepsilon} - 5 \right]$$

2. feladat (10+10+10=30 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

$$(a) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n; \quad (b) \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 + 1}{n + 5}}; \quad (c) \quad c_n = \frac{n! + 3^n}{5^n + n^3}.$$

$$(a) \quad a_n = \frac{\cancel{n^2} + 2n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \rightarrow \frac{2}{1+1} = \underline{1}$$

$$(b) \quad \sqrt[n]{\frac{n^2}{6}} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{n+5n}} \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+1}{n+5}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3+n^3}{n}} = \sqrt[n]{2n^2}$$

$\downarrow$ 1 Rendő-elv $\Rightarrow$ $b_n \rightarrow \underline{1}$ $\downarrow$ 1

$$(c) \quad c_n = \frac{n! + 3^n}{5^n + n^3} = \frac{n!}{5^n} \cdot \frac{1 + \frac{3^n}{n!}}{1 + \frac{n^3}{5^n}} \rightarrow +\infty \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty$$

$$n^k \ll a^n \ll n! \quad (a > 1)$$

3. feladat (6+6+9+9=30 pont)

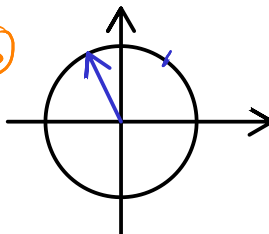
$$z_1 = 5 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right),$$

$$z_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$$

Határozza meg a következő mennyiségeket az előírt alakban!

- (a) z_1 , algebrai alakban;
- (b) z_2 , exponenciális vagy trigonometrikus alakban;
- (c) $z_1 \cdot z_2$, algebrai alakban;
- (d) z_2^{10} , exponenciális vagy trigonometrikus alakban.

(a)
$$z_1 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

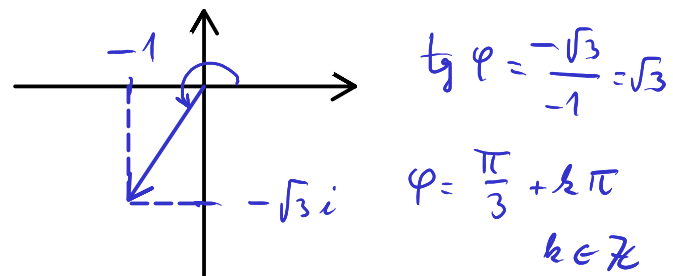


(b)
$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg z_2 = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{vagy } -\frac{2\pi}{3})$$

$$z_2 = 2 e^{i \frac{4\pi}{3}} = 2 e^{-i \frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$$



(c)
$$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{5}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) (-1 - i\sqrt{3}) = \frac{5}{2} + \frac{15}{2} + \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) i = 10$$

(d)
$$z_2^{10} = \left(2 e^{i \frac{4\pi}{3}} \right)^{10} = 2^{10} \cdot e^{i \frac{40\pi}{3}} = 2^{10} \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

4. feladat (10+10+10=30 pont)

$$f(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{x^2 - 1}$$

Határozza meg a következő határértékeket! (Tanult szabályokat, tételeket használhat.)

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = ?$

(c) $\lim_{x \rightarrow +1+0} f(x) = ?$

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 1/x - 2/x^2}{1 - 1/x^2} \stackrel{(4)}{=} \underline{1} \quad (2)$
 Ha x elég nagy,
 $x^2 + x - 2 > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{|x^2 + x - 2|}{x-1} \stackrel{(4)}{=} (-\infty) \cdot \frac{|-2|}{-2} \stackrel{(2)}{=} \underline{+\infty} \quad (2)$

(c) $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1); \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

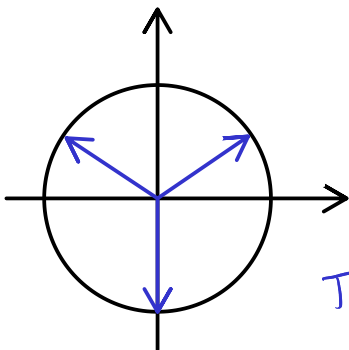
$\lim_{x \rightarrow +1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1+0} \frac{|x-1|}{x-1} \cdot \frac{|x+2|}{x+1} \stackrel{(5)}{=} \lim_{x \rightarrow +1+0} \underbrace{\frac{x+1}{x+1}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{|x+2|}{x+1}}_{\frac{3}{2}} \stackrel{(1)}{=} \underline{\frac{3}{2}} \quad (2)$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

Határozza meg az

$$a_n = \sin \left(n \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

numerikus sorozat torlódási pontjait, limesz inferiorját és limesz superiorját! Létezik-e a sorozat határértéke? (Indokoljon!)



$$a_n = \begin{cases} \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1, & \text{ha } n = 3k \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}, & \text{ha } n = 3k+1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{2}, & \text{ha } n = 3k+2 \end{cases} \quad (5) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\text{Torl}(a_n) = \{-1, \frac{1}{2}\}; \quad \limsup a_n = \frac{1}{2}; \quad \liminf a_n = -1$

$\limsup a_n \neq \liminf a_n \Rightarrow \nexists \lim a_n \quad (2)$