INFO, AN2. ZH1. MINTAMEGOLDÁS —1— 2017. 03. 09.

α változat

1, $\boxed{20}$ $y \cdot y' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln y}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; $y \in (0, \infty)$

Szeparálható: $y \cdot \ln y \, dy = \operatorname{tg} x \, dx$ (4)

$$\int \underset{u'}{y} \underset{v}{\ln y} \, dy \overset{(5)}{=} \frac{y^2}{2} \ln y - \int \underbrace{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{y}}_{\frac{y}{2}} dy = \underline{\frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} + C} \quad (3)$$

$u = \frac{y^2}{2}$; $v' = \frac{1}{y}$ parc. int.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \overset{\frac{f'}{f} \text{ alak}}{=} \underline{-\ln(\cos x) + C} \quad (6) \quad \left(\cos x > 0, \ln |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

Implicit megoldás:

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{4} y^2 = -\ln(\cos x) + C}} \quad (2)$$

2, $\boxed{30}$ $y' - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} y = \dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$ (I) lineáris, elsőrendű. (2)

(H) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} y \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (2) ($y \equiv 0$ mo.)

$f' \cdot f^{-1/2}$ alak

$\ln|y| \overset{(2)}{=} \sqrt{1+x^2} + C$ (3) ; $\rightarrow$ $\underline{y_{H,\text{ált}}(x) = K \cdot e^{\sqrt{1+x^2}}}$; (2) $K \in \mathbb{R}$ $\boxed{11}$

$y_{I,p}(x) = K(x) \cdot e^{\sqrt{1+x^2}}$ (2) ; $y'_{I,p}(x) = K'(x) e^{\sqrt{1+x^2}} + K(x) \cdot e^{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$ (3)

Beírva (I)-be:

$$K'(x) \cdot e^{\sqrt{1+x^2}} + \cancel{K(x) e^{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} K(x) \cdot e^{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{e^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$K'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (3) ; $K(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x$ (3) ; $\underline{y_{I,p}(x) = \operatorname{arsh} x \cdot e^{\sqrt{1+x^2}}}$ (1)

$$y_{I,\text{ált}}(x) = y_{H,\text{ált}}(x) + y_{I,p}(x) = \underline{\underline{(K + \operatorname{arsh} x)\, e^{\sqrt{1+x^2}}}} \quad (2) \; ; \; K \in \mathbb{R} \quad \boxed{14}$$

Kezd. felt. illesztése: $y(0)=3e$

$$(K+\underbrace{\operatorname{arsh} 0}_{0})\underbrace{e^{\sqrt{1+0^2}}}_{e}=3e \Rightarrow K\cdot e=3e;\ \underline{K=3}$$

$$\underline{\underline{y_{kezd}(x)=(3+\operatorname{arsh} x)\,e^{\sqrt{1+x^2}}}}$$ $\boxed{5}$

3, $\boxed{25}$ $y''-6y'+9y=3e^{3x}$

(H): $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3$ (5) (Belső rez.)

$\underline{y_{H,ált}(x)=C_1 e^{3x}+C_2 x e^{3x}}$ (5); $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\boxed{10}$

(I): Külső rez. is van!

$y_{I,p}(x)=Ax^2e^{3x}$ (5) $/\cdot(9)$

$y'_{I,p}(x)=2Axe^{3x}+3Ax^2e^{3x}$ (2) $/\cdot(-6)$

(+) $y''_{I,p}(x)=2Ae^{3x}+6Axe^{3x}+6Axe^{3x}+9Ax^2e^{3x}$ (2) $/\cdot(1)$

$$3e^{3x}=Ae^{3x}(\cancel{9x^2}-\cancel{12x}-\cancel{18x^2}+2+\cancel{12x}+\cancel{9x^2})$$

$3\cancel{e^{3x}}=2A\cancel{e^{3x}} \Rightarrow A=\frac{3}{2}$ (3); $\underline{y_{I,p}(x)=\frac{3}{2}x^2e^{3x}}$ (1) $\boxed{13}$

$y_{I,ált}(x)=y_{H,ált}(x)+y_{I,p}(x)=\underline{\underline{C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{3}{2}x^2e^{3x}}}$ $\boxed{2}$

4, a, $\boxed{10}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}}_{a_n}$

$a_n\sim\frac{1}{n}$, $\sum\frac{1}{n}=\infty$; sejtés: div. ⇒ minoráns kell (4)

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}\geq\frac{1}{\sqrt{(n+3)(n+3)}}=\frac{1}{n+3},\ \text{és}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$$ (6)

így a minoráns krit. alapján <u>a sor divergens</u>.

4/b, $\boxed{15}$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+4}}_{a_n}$ Igazoljuk, hogy Leibniz-sor.

i, alternáló ✓ ② ii, $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+4} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ✓ ③

iii, $|a_n| \overset{?}{\geq} |a_{n+1}|$; $\frac{\sqrt{n}}{n+4} \overset{?}{\geq} \frac{\sqrt{n+1}}{n+5}$ / nevezőkkel szorzunk

⑧

$\sqrt{n}\,(n+5) \overset{?}{\geq} \sqrt{n+1}\,(n+4)$ / négyzetre emelünk

$n\underbrace{(n+5)^2}_{n^2+10n+25} \overset{?}{\geq} (n+1)\underbrace{(n+4)^2}_{n^2+8n+16}$

$\cancel{n^3} + 10n^2 + 25n \overset{?}{\geq} \cancel{n^3} + 9n^2 + 24n + 16$

$n^2 + n - 16 \overset{?}{\geq} 0$ $\forall n \geq 4$-re teljesül

ekviv. átalakítások.

Tehát $n \geq 4$-re a Leibniz-krit. teljesül, így a sor konvergens ②

IMSC $\boxed{6}$ Határozza meg $x \in [0,1]$ azt, hogy a medence hányad része van vízzel töltve.

Kiürülés: $\dot{x}(t) = -k\sqrt{x(t)}$ ①; $\overbrace{x(0)=1;\ x(T_1)=0}^{\text{peremfeltételek}}$ ①

Szeparálható

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = -k\,dt$

$\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -k\int_0^{T_1} dt$ Vagy a peremfeltételeket figyelembe véve integrálunk

$\left[2\sqrt{x}\right]_1^0 = -k\left[t\right]_0^{T_1}$ ⟸ vagy az ált. megoldást illesztjük a peremfeltételekre

$(0-2) = -k(T_1 - 0)$

$\boxed{k = \frac{2}{T_1}}$ ②

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = -k\int dt$

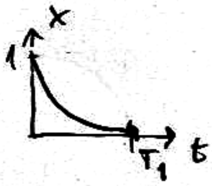
$2\sqrt{x} = -kt + C$

$x(0)=1 \Rightarrow 2 = C$

$x(T_1)=0 \Rightarrow 0 = -kT_1 + C$

$\Rightarrow k = \frac{2}{T_1}$

$x(t) = \left(1 - \frac{t}{T_1}\right)^2$



Feltöltődés: $\dot{x} = \frac{1}{T_2}$ ①

Egyensúly: $0 = \dot{x}_{ki} + \dot{x}_{be} = -k\sqrt{x} + \frac{1}{T_2} = -\frac{2}{T_1}\sqrt{x} + \frac{1}{T_2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2 = \frac{4}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$ ①

β-variáns: A pontozás az α variáns hasonló feladatáéval azonos.

1, Hasonló az α variánshoz, csak tg x helyett ctg x szerepel.

$$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \int \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{\frac{f'}{f}\text{ alak}}\,dx = \ln(\sin x) + C; \qquad \sin x > 0, \text{ ha } x \in (0,\pi)$$

Végeredmény: $\underline{\underline{\frac{1}{2}y^2 \ln y - \frac{1}{4}y^2 = \ln(\sin x) + C; \quad C \in \mathbb{R}}}$

2, Hasonló az α variáns 3. feladatához.

részeredmények: $\lambda_{1,2} = 2$; $\underline{y_{H,ált}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}$

$$y_{I,p}(x) = A x^2 e^{2x} \qquad /\cdot(4)$$

$$y'_{I,p}(x) = A e^{2x}(2x + 2x^2) \qquad /\cdot(-4)$$

$$y''_{I,p}(x) = A e^{2x}(2 + 8x + 4x^2) \qquad /\cdot(1)$$

$$3e^{2x} = A e^{2x}(\cancel{4x^2} - \cancel{8x} - \cancel{8x^2} + 2 + \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) \Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{3}{2}}}$$

$$\underline{\underline{y_{I,ált}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}}}$$

3, Csak a kezdeti feltétel különbözik az α/3 feladattól. Így $y_{I,ált}(x) = (K + \mathrm{arsh}\,x)e^{\sqrt{1+x^2}}$, és $5e = (K+0)\cdot e \Rightarrow \underline{\underline{K = 5}}$

4, a, Mint α/4/b; Monotonitás: $\frac{\sqrt{n+5}}{n} \overset{?}{\geq} \frac{\sqrt{n+6}}{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2n+1}(n+5) \overset{?}{\geq} (n+6)n^2 \Rightarrow \cancel{n^3} + 7n^2 + 11n + 5 \overset{?}{\geq} \cancel{n^3} + 6n^2$$

$$n^2 + 11n + 5 \geq 0 \quad \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re}$$

leírás ⇒ konv.

b, Mint α/4/a; minorálás, divergens.

IMSC – lásd: α variáns.