

Algoritmusok és gráfok
NYOLCADIK GYAKORLAT, 2019. november 8.
Megoldások pár feladathoz

1. (a) Hány csúcsa és hány éle van az alábbi szomszédossági mátrix-szal adott irányítatlan gráfnak?
(b) Mennyi az egyes csúcsok fokszáma?
(c) Rajzolja le a gráfot!
(d) Van-e kör ebben a gráfban? Van-e út a gráfban az 1-es csúcsból az 4-es csúcsba?
(e) Rajzoljon be egy feszítőfát a gráfba!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás

- (a) $n = 5$, mert 5-ször 5-ös a mátrix és $e = 7$, mert 14 darab 1 van a mátrixban.
(b) $d(1) = 2, d(2) = 4, d(3) = 2, d(4) = 3, d(5) = 3$, azt kell nézni, hogy hány 1 van a megfelelő sorban.
(d) Ha jól lerajzoltuk a gráfot, akkor látható, hogy pl. 1,2,5 egy kör és 1,2,4 egy út az 1-ből a 4-be.
(e) Feszítőfát alkot például az 15, 12, 23, 24 élhalmazú rész.
2. (a) Honnan látjuk, hogy az alábbi szomszédossági mátrix irányított gráfhoz tartozik?
(b) Hány csúcsa és hány éle van a gráfnak?
(c) Mennyi az egyes csúcsok ki- és be-foka?
(d) Rajzolja le a gráfot!
(e) Mely csúcsokba van irányított út a 3-as csúcsból? Van-e irányított kör ebben a gráfban?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás

- (a) A mátrix nem szimmetrikus.
(b) $n = 5$, mert 5-ször 5-ös a mátrix és $e = 7$, mert 7 darab 1 van a mátrixban.
(c) $d_{ki}(1) = 2, d_{ki}(2) = 1, d_{ki}(3) = 3, d_{ki}(4) = 1, d_{ki}(5) = 0$, azt kell nézni, hogy hány 1 van a megfelelő sorban.
 $d_{be}(1) = 0, d_{be}(2) = 2, d_{be}(3) = 1, d_{be}(4) = 2, d_{be}(5) = 2$, azt kell nézni, hogy hány 1 van a megfelelő oszlopban.
(e) Ha jól lerajzoltuk a gráfot, akkor látható, hogy a 2, 4, 5 csúcsokba van irányított út. Irányított kör pedig nincsen a gráfban.
3. A G irányítatlan gráf csúcsai $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, élei pedig $ab, ac, ad, bc, be, bf, cf, df, dg, fe, fh, gh$ (ezt a gráfot néztük az előadáson).

Futassa le az órán tanult szélességi bejárás algoritmus pseudokódját a-ból kiindulva úgy, hogy lépésről lépésre végigköveti, hogy hogyan változik a *bejárva* tömb, a *Q* sor és a *honnán* tömb.

Megoldás A jegyzetben le van írva részletesen.

4. Tegyük fel, hogy egy n csúcsú irányítatlan G gráf szomszédossági mátrix-szal adott. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza a gráf éleinek számát.

Megoldás

Végigmegyünk a szomszédossági mátrix elemein (két egymásba ágyazott ciklussal, a külső ciklus a sorokon fut, a belső pedig a sorokon belül az oszlopok indexein), megszámloljuk, hogy hány 1 van és ennek a számnak a fele lesz a keresett érték:

```
egyesek_száma := 0
ciklus i =1-től n-ig:
    ciklus j = 1-től n-ig:
        ha A[i,j] == 1:
            egyesek_száma += 1
    ciklus vége
ciklus vége
return egyesek_száma / 2
```

Ez azért jó, mert minden élet kétszer reprezentálunk az irányítatlan esetben. A lépésszám pedig $O(n^2)$, mert a külső ciklus n -szer fut le, ennek a magja egy n -szer lefutó belső ciklus, aminek a magja $O(1)$ lépés, vagyis a belső ciklus $O(n)$, az egész eljárás pedig $O(1) + O(n)$, azaz $O(n)$.

5. Hogy néz ki az öt pontú teljes gráf szomszédossági mátrixa? (A teljes gráf olyan gráf, ahol minden csúcspár között van él.)

Megoldás

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. (**Vizsga 2018**) Egy irányítatlan G gráfon szélességi bejárást futtattunk az A csúcsból. A csúcsoakat A, C, B, D, E, F sorrendben látogattuk meg, a felfedező élek által alkotott feszítőfa élei AC, AB, CD, BE, BF .
- (a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él D és E között?
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él C és E között?

Válaszait indokolja!

Megoldás

(a) Lehet, hogy van él D és E között, például, ha a gráfban csak a feszítőfa élei és az ED él van, akkor is így fut le a bejáráás, mert amikor a D csúcs szomszédait, tehát például E -t vizsgáljuk, akkor E már be van járva, nem számít, hogy az ED él van-e vagy nincs.

(b) Nem lehetséges ez az él, mert ha a CE él lenne a gráfban, akkor C szomszédainak vizsgálatakor bejárnánk az E csúcsot a CE éllel és így E -t nem B -ből érnénk el.

7. (**Vizsga 2018**) Egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú irányított G gráfban adott a csúcsoknak egy u_1, u_2, \dots, u_n sorrendje (itt minden csúcs pontosan egyszer szerepel). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a csúcsok ebben a sorrendben irányított kört alkotnak-e a gráfban. Adjon erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust.

Megoldás

Végigmegyünk a csúcsokon az u_1, u_2, \dots, u_n sorrendben és minden i esetén megnézzük, hogy $A[u_i, u_{i+1}]$ 1-e vagy sem vagyis, hogy van-e él u_i -ből u_{i+1} -be, továbbá megnézzük még az $A[u_n, u_1]$ értéket is. Ha mindenhol 1 van, akkor minden él megvan, ez egy kör, különben meg nem.

Ez azért jó, mert a szomszédossági mátrixban $A[i, j] = 1$ pontosan azt jelenti, hogy van él i -ből j -be. A kétdimenziós tömbben egy lépésben tudunk az adott cellára ugrani u_i és u_{i+1} ismeretében, vagyis összesen n értéket kell megnéznünk, aminek darabja egy-egy lépés, ez $O(n)$.