Megoldókulcs, Valószínűségszámítás vizsga

2010.06.18.

1. változat

1. *Először feldobunk két szabályos érmét. Ha nincs fej, egyszer, ha van fej, kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos? (20 pont)*

Megoldás. A teljes valószínűség tételét használjuk, a következő események bevezetésével (3 pont):

$$\begin{aligned} A &: \text{ van fej} \\ B &: \text{ van hatos} \end{aligned}$$

Az érmedobással kapcsolatos valószínűségek (5 pont):

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{1}{4} \\ P(A) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

A kockadobással kapcsolatos feltételes valószínűségek (5 pont):

$$\begin{aligned} P(B|A) &= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \\ P(B|\bar{A}) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Innen kiszámítható a végeredmény (7 pont a TVT felírásáért):

$$P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{4} + \frac{11}{36}\frac{3}{4} = \frac{6+33}{144} \approx 0.271$$

2. *Milyen c értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek a sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} ce^{|x|} & \text{, ha } x \in [-1, 2] \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

(20 pont)

Megoldás. A következőnek kell teljesülnie (3 pont):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

A konkrét esetben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{2} ce^{|x|}dx \overset{(4\text{ pont})}{=} \int_{-1}^{0} ce^{-x}dx + \int_{0}^{2} ce^{x}dx = \\ &= \left[-ce^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[ce^{x}\right]_{0}^{2} = -c + ce + ce^2 - c = \\ &\overset{(2\text{ pont})}{=} c\left(e + e^2 - 2\right) = 1, \end{aligned}$$

ahonnan (1 pont)

$$c = \left(e + e^2 - 2\right)^{-1}.$$

A várható érték (a képlet önmagában 3 pont):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= c\int_{-1}^{2} x e^{|x|} dx = c\int_{-1}^{0} x e^{-x} dx + c\int_{0}^{2} x e^{x} dx = \\
&\overset{(5\text{ pont})}{=} c\left(\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x} dx + \left[xe^{x}\right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx\right) = \\
&= c\left(-e - \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2\right) = \\
&= c\left(-e - 1 + e + 2e^2 - e^2 + 1\right) \overset{(2\text{ pont})}{=} ce^2 = \frac{e^2}{e^2 + e - 2} \approx 0.911
\end{aligned}$$

3. *Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X + Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét! (20 pont)*

Megoldás konvolúcióval. Könnyen belátható, hogy $2X \in U(0,2)$ (3 pont), ezután kiszámolhatjuk a konvolúciós sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned}
f_{2X+Y}(t) &\overset{(5\text{ pont})}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{2X}(\tau) f_Y(t-\tau) d\tau \overset{(5\text{ pont})}{=} \int_{\max\{0,t-1\}}^{\min\{t,2\}} \frac{1}{2} d\tau \overset{(2\text{ pont})}{=} \frac{1}{2}\left(\max\{0, t-1\} - \min\{t, 2\}\right) \\
&\overset{(5\text{ pont})}{=} \begin{cases} 0 & \text{, ha } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{, ha } t \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{, ha } t \in [1,2) \\ \frac{1}{2}(3-t) & \text{, ha } t \in [2,3) \\ 0 & \text{, ha } t \geq 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Megoldás geometriai módszerrel. Ábrázoljuk a $[0,1] \times [0,1]$ halmazon a következő területet t lehetséges értékeire:

$$2X + Y < t.$$

Ezen területek adják meg a $P(2X + Y < t) = F_{2X+Y}(t)$ valószínűségeket (10 pont). Kiszámolható, hogy a területek értékei t különféle értékeire a következőképp számolhatók (8 pont):

$$\begin{aligned}
t < 0: &\quad 0, \\
t \in [0,1): &\quad \frac{t^2}{4}, \\
t \in [1,2): &\quad \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, \\
t \in [2,3): &\quad 1 - \frac{1}{4}\left(t^2 - 6t + 9\right), \\
t \geq 3: &\quad 1.
\end{aligned}$$

Innen deriválással kapható a sűrűségfüggvény (2 pont).

4. *Dobjunk tízszer egy szabályos dobókockával! Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros dobások számát! Számolja ki az $\mathbb{E}[Y|X]$ regressziót! (20 pont)*

Megoldás. Számoljuk ki Y feltételes eloszlását az $X = x$ feltétel mellett (az összes $y \geq x$ értékre):

$$\begin{aligned}
P(Y = y | X = x) &\overset{(5\text{ pont})}{=} \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)} = \frac{\frac{10!}{x!(y-x)!(10-y)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{2}{6}\right)^{y-x} \left(\frac{3}{6}\right)^{10-y}}{\frac{10!}{x!(10-x)!}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}} \\
&= \frac{(10-x)!}{(y-x)!(10-y)!}\left(\frac{6}{5}\right)^{10-x}\left(\frac{2}{6}\right)^{y-x}\left(\frac{3}{6}\right)^{10-y}
\end{aligned}$$

$$\overset{(8 \text{ pont})}{=} \binom{10-x}{y-x}\left(\frac{2}{5}\right)^{y-x}\left(\frac{3}{5}\right)^{10-y},$$

amivel beláttuk, hogy $Y-X$ feltételes eloszlása az $X=x$ feltétel mellett binomiális, konkrétan $B\left(10-x, \frac{2}{5}\right)$ (2 pont, ha a fenti bizonyítás nélkül jön erre rá, akkor az eddigi 15 pont helyett 12 jár.). Innen adódik tehát, hogy (5 pont)

$$\mathbb{E}\left[Y|X=x\right] = \frac{2}{5}(10-x) = 4 - \frac{2}{5}x,$$

azaz

$$\mathbb{E}\left[Y|X\right] = 4 - \frac{2}{5}X.$$

5. *Legyen $X \in N(-1,2)$, $Y = 3X+8$, $Z = 5-2X$. Számolja ki az $R(Y,Z)$ korrelációs együtthatót! (10 pont)*

Megoldás. Jól látszik, hogy Y és Z között lineáris a kapcsolat:

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y-8}{3} \\ Z &= 5-2X = 5-2\frac{Y-8}{3} = 5+\frac{16}{3}-\frac{2}{3}Y = \frac{31}{3}-\frac{2}{3}Y. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy $|R(Y,Z)| = 1$ (7 pont), és mivel a fenti kifejezésben Y együtthatója negatív, így $R(Y,Z) = -1$ (3 pont).

6. *Mit állít a Chapman–Kolmogorov-tétel a homogén Markov-láncok átmenetvalószínűség-mátrixairól?*

Megoldás. Legyen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ n állapotú Markov-lánc Π átmenetvalószínűség-mátrixszal, melynek elemei (2 pont):

$$[\Pi]_{ij} = p_{ij} = P(X_1 = j|X_0 = i) \quad (1 \leq i,j \leq n).$$

Jelölje $\Pi^{(n)}$ a t-lépéses átmenetvalószínűség-mátrixot (1 pont):

$$\left[\Pi^{(t)}\right]_{ij} = p_{ij}^{(t)} = P(X_t = j|X_0 = i) \quad (1 \leq i,j \leq n).$$

Ekkor tetszőleges $t > 1$, $1 \leq s < t$ esetén teljesül a következő (7 pont):

$$\Pi^{(t)} = \Pi^{(s)}\Pi^{(t-s)},$$

azaz

$$\Pi^{(t)} = \Pi^t.$$

(Bármelyik alak elfogadható, a $t=2$ speciális eset is).