

Jelek és rendszerek 2.

1. Jelek modulációja és demodulációja - analóg moduláció.

1.1. Célja

Információ továbbítás elektronikus jelek segítségével. Analóg moduláció esetében a továbbítandó információ egy analóg jel $s_m(t)$ (pl. beszéd, zene, stb.), melynek a minél kisebb torzítással történő átvitele a cél.

A modulációval az átviendő $s_m(t)$ jelet belefoglaljuk az átvitelt megvalósító jelbe, majd a demoduláció során leválasztjuk azt.

1.2. Elvárások, szempontok a modulációra és demodulációra

1.2.1. $s_m(t)$ torzítatlan átvitele

Ez elvileg lehetséges, de gyakorlati szempontból nem, vagyis kis mértékű torzítás megengedett.

1.2.2. Megfelelő SNR a vételi oldalon

Az additív zajt nem lehet kiküszöbölni az elektronikai rendszerekből. A tervezés során természetesen törekszünk ezen zavaró jel szintjének minimalizálására. A vett jel minőségét a jellel egy időben megjelenő zaj rontja. A jelenség minősítésére a jel és a zaj teljesítményének az arányát vezették be mérőszámmal. Jelölése SNR (Signal to Noise Ratio) vagy S/N. A megkívánt SNR nagymértékben függ az alkalmazástól, pl. telefonos összeköttetés esetében sokkal kisebb SNR is megfelelő, mint FM műsorszórásnál.

1.2.3. EM hullámterjedés

Rádiós összeköttetés esetében fontos a modulált jel kisugározhatósága és a megfelelő EM hullámterjedés. Ezen követelményeknek az alapsávi $s_m(t)$ analóg jel általában nem felel meg, így szükséges annak vivőfrekvenciára történő megfelelő spektrális eltolása. Természetesen a modulációnak nem csak sugárzott esetben van létjogosultsága, vezetett esetben is nagyon fontos.

1.2.4. Csatornamegosztás

A rendelkezésre álló átviteli csatornát fel kell osztani az azonos időben ott lévő összeköttetések között. Ezen csatornamegosztás egyik elterjedt módszere a

frekvencia szerinti megosztás. Ez esetben az egyes összeköttetések vivőfrekvenciáit úgy kell megválasztani, hogy figyelembe véve az összeköttetések sávszélességét, közöttük ne jöjjön létre spektrális átlapolódás.

1.2.5. Energia hatékonyság

A moduláció tervezésénél figyelembe kell venni az átvitelhez szükséges átlagos teljesítményt. A célszerű ezt a teljesítményt minimalizálni.

1.2.6. Sávon belüli hatékonyság

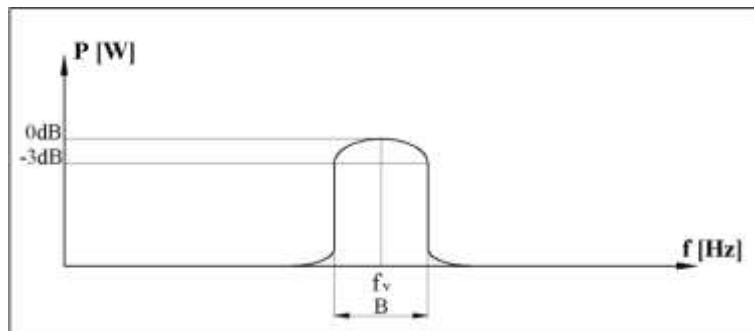
Információ-sávszélesség hányados maximalizálása, vagyis a rendelkezésre álló sávszélességen a lehető legtöbb információ átküldése. Előfordul ennek az ellenkezője a spektrális kiterjesztés is, zaj immunitási okból. Ekkor a minőség iránti követelmény felülírja a sávszélesség hatékonyság szempontját.

1.2.7. Áramköri realizálhatóság

Az alkalmazandó moduláció megválasztásánál figyelembe kell venni az áramköri realizációs szempontokat is.

1.3. Analóg modulációs módok

Először tekintsünk egy modulációs szempontból általános modulált jelet. Spektrális elvárásaink a modulált jele:



f_v vivőfrekvencián B sávszélességgel (sávhatárolt).

Az f_v a kisugározhatóságot és EM hullámterjedést, az f_v és B pedig a csatornamegosztást szolgálja.

A relative keskenysávú megközelítést ($B/f_v < 10\%$) alkalmazzuk, amely a leíráson túl sok kellemes következménnyel jár az áramköri realizáció szempontjából is.

Írjuk fel a modulált jelet:

$$s(t) = a(t) \cos \vartheta(t)$$

mivel a vivőfrekvenciás keskenysávú jelekkel foglalkozunk, ezért a $\vartheta(t)$ -t

$$\vartheta(t) = \omega_v t + \varphi(t)$$

$$\omega_v = 2\pi f_v$$

alakban keressük.

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_v t + \varphi(t))$$

Az $s_m(t)$ analóg jel befoglalása ezek szerint megtörténhet az $a(t)$ amplitúdóban, vagy a $\varphi(t)$ szögben. Ennek megfelelően beszélünk *amplitúdó-* és *szögmodulációról*. Sugárzott jel esetében még a polarizáció is megjelenik, így ott elvileg lehetséges lenne a polarizáció modulációja is, de ez a gyakorlatban nem terjedt el.

1.4. Foglalkozzunk először az amplitúdó modulációval - AM.

Ekkor a szögbe nem kívánunk belefoglalni semmit, ezért $\varphi(t) = \text{konst.}$ ill. az egyszerűbb jelölés miatt legyen ez a konstans nulla: $\varphi(t) = 0$

$$s_{AM}(t) = a(t) \cos \omega_v t$$

A vivőfrekvencia megfelelő megválasztásánál a kedvező kisugározhatóság és EM hullámterjedés kritériumokat figyelembe kell venni.

$s_m(t)$ átvíendő jel befoglalását kizárólag $a(t)$ -be kell megtennünk, úgy hogy a moduláció és demoduláció elvégzése ne okozzon torzítást (elvben).

Információ/sáv szélesség hatékonyság

Energetikai hatékonyság, kedvező csatornamegosztás, áramköri realizálhatóság – elvárásokat teljesítsük.

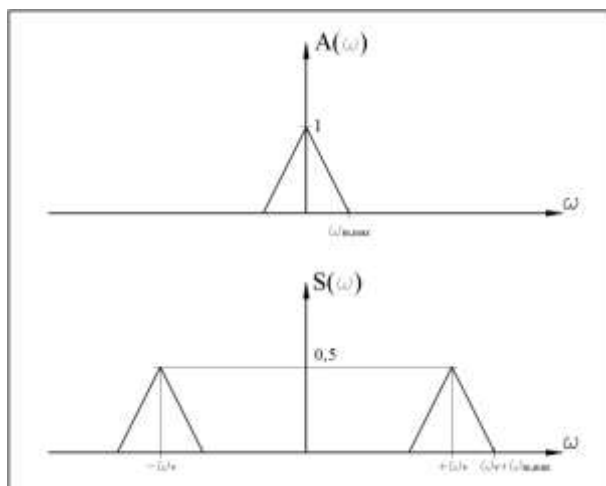
1.4.1. Az első, a torzításra vonatkozó kritériumot vizsgáljuk meg frekvencia tartományban.

Először tételezzük fel, hogy $s_m(t) \rightarrow a(t) \rightarrow s_m(t)$ jelút torzításmentes. Vagyis a $\cos \omega_v t$ -vel történő szorzást vizsgáljuk, hogy okoz-e torzítást.

Vizsgálatunkat az $a(t)$ jellel végezzük. Ez a jel általában sztochasztikus folyamat valamely realizációja. Az egyszerűbb vizsgálódás okán fogalmazzuk meg úgy a vizsgálatunkat, hogy $a(t)$ ugyan egy sztochasztikus folyamat realizációja, azonban a folyamat azonban már véget ért ($a(t) = 0$, ha $t > t_0$) vagyis ismert és így determinisztikussá vált számunkra, továbbá létezik a Fourier-transzformáltja $A(\omega)$. Ekkor:

$$S(\omega) = F\{s(t)\} = F\{a(t) \cos \omega_v t\} = F\{a(t)\} \otimes F\{\cos \omega_v t\} = A(\omega) \otimes \frac{e^{j\omega_v t} + e^{-j\omega_v t}}{2} = \frac{1}{2} A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2} A(\omega + \omega_v)$$

Vagyis a frekvenciatartományban:

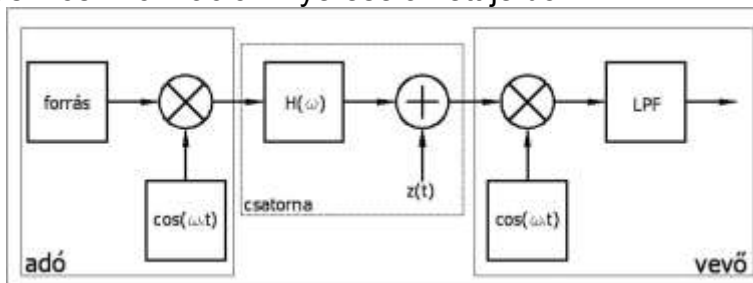


A torzítás akkor nem jön létre, ha a modulált jel spektrumában nincs átlapolódás, vagyis $f_m > f_{m,max}$, ahol $f_{m,max}$ az $a(t)$ jel legnagyobb frekvenciájú összetevője. Ebből az is következik, hogy a moduláló jelnek sávhatároltnak kell lennie.

Felkeverés esetére fenti megszorítást betartva a torzításmentesség biztosított.

1.4.2. Demoduláció:

Mint a neve is jelzi, a moduláció inverz műveletére van szükségünk. Tehát a számunkra hasznos információ kinyerése a vett jelből.



$$s_d(t) = s(t) \cos \omega_v t = a(t) \cos \omega_v t (\cos \omega_v t)^* = a(t) \cos \omega_v t \cos \omega_v t = \frac{1}{2} a(t) \cos 0 + \frac{1}{2} a(t) \cos(\omega_v t)$$

A $\omega_v t$ komponenst integrátorral (LPF) szűrhetjük ki és így megkapjuk a torzítatlan $a(t)$ jelet, ill. kétszeres erősítés után az eredeti $a(t)$ -t is. Ennek a demodulációnak a nehézségét az jelenti, hogy a vevőben pontosan ismerni kell az adó $\cos \omega_v t$ jelét (frekvencia és fázis).

1.4.3. Frekvencia tartományban:

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= S(\omega) \otimes F\{\cos \omega_v t\} = S(\omega) = \left[\frac{1}{2} A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2} A(\omega + \omega_v) \right] \otimes F\{\cos \omega_v t\} = \\ &= \left[\frac{1}{2} A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2} A(\omega + \omega_v) \right] \otimes \frac{e^{j\omega_v t} + e^{-j\omega_v t}}{2} = \frac{1}{4} A(\omega) + \frac{1}{4} A(\omega - 2\omega_v) + \frac{1}{4} A(\omega + 2\omega_v) + \frac{1}{4} A(\omega) = \\ &= \frac{1}{2} A(\omega) + \frac{1}{4} A(\omega - 2\omega_v) + \frac{1}{4} A(\omega + 2\omega_v) \end{aligned}$$

Vagyis a moduláció és demoduláció $a(t)$ sávhatárolt jelre $f_m > f_{m,max}$ betartása mellett torzításmentes $a(t) \xrightarrow{\text{moduláció}} s(t) \xrightarrow{\text{demoduláció}} a(t)$ jelutat tesz lehetővé.

A feladat ezek után $s_m(t) \rightarrow a(t) \rightarrow s_m(t)$ jelút torzítatlanságának a biztosítása megfelelő befoglalás alkalmazásával.

Sok lehetséges megoldás van. Ezek közül részletesebben a következőkkel foglalkozunk:

AM-DSB

AM-DSB/SC

AM-SSB

1.5. AM-DSB (kétoldalsávós amplitúdómoduláció)

$$a_{DSB}(t) = U_v + s_m(t)$$

A jobb érthetőség miatt minden modulációs mód vizsgálatát elvégezzük egy determinisztikus szinuszos jellel is.

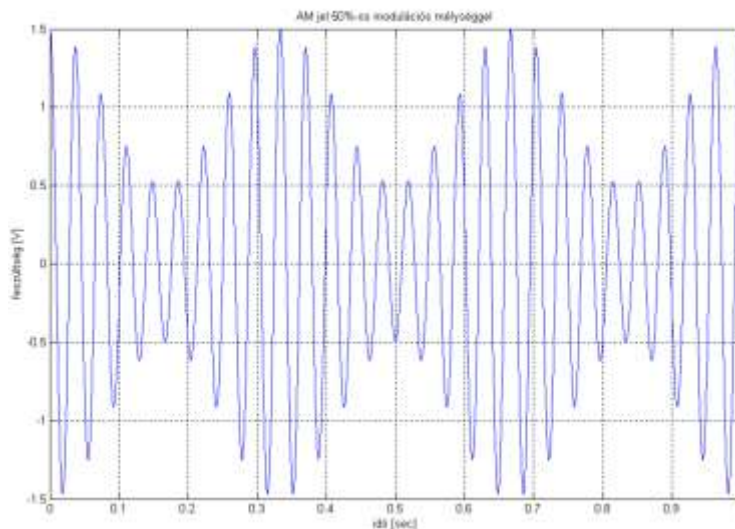
$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

$$a_{DSB}(t) = U_v + U_m \cos \omega_m t$$

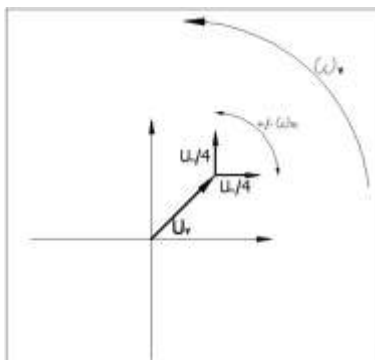
$$s_{DSB}(t) = a(t) \cos \omega_v t = [U_v + U_m \cos \omega_m t] \cos \omega_v t =$$

$$= U_v \cos \omega_v t + U_m \cos \omega_m t \cos \omega_v t =$$

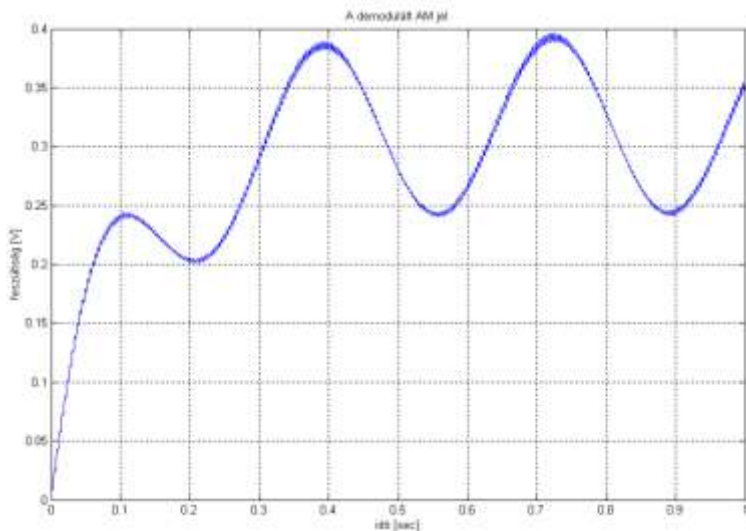
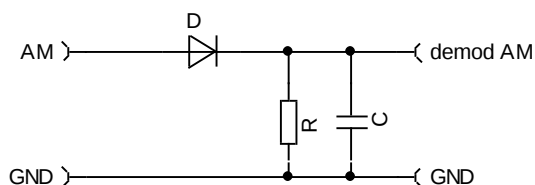
$$= U_v \cos \omega_v t + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v - \omega_m)t + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v + \omega_m)t$$



Vektoriálisan pedig:



Az idő ábrázoláson jól látható, hogy az átvendő jel $s_{\text{DSB}}(t)$ burkolójaként jelenik meg. Ennek hardveres leválasztása egyszerű feladat:

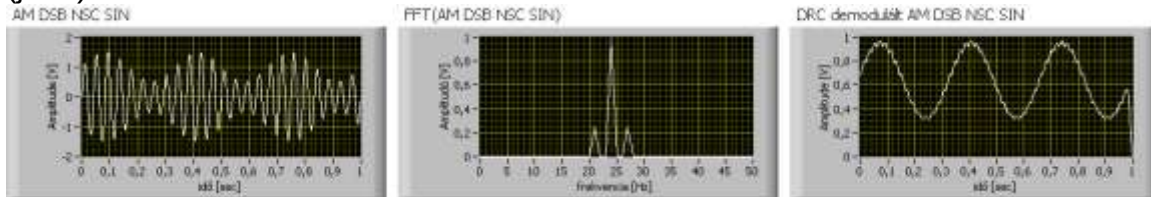


Ezért is alkalmazták ezt előszeretettel a műsorszórás őskorában, hiszen így a vevők egyszerűek és olcsók lehettek. Azonban a burkoló csak addig adja vissza az $s_m(t)$ moduláló jelet, amíg az a pozitív tartományban van. Ennek feltétele, hogy a vivőfrekvenciás komponenst okozó U_v érték legyen nagyobb mint U_m . Ugyanakkor láthatóan U_m -et nem célszerű picire választani, mert azzal a demodulált jel amplitúdója egyenes arányban van. Mivel ez a jelség az AM-DSB esetében meghatározó jelentőséggel bír, ezért definiálták a modulációs mélységet:

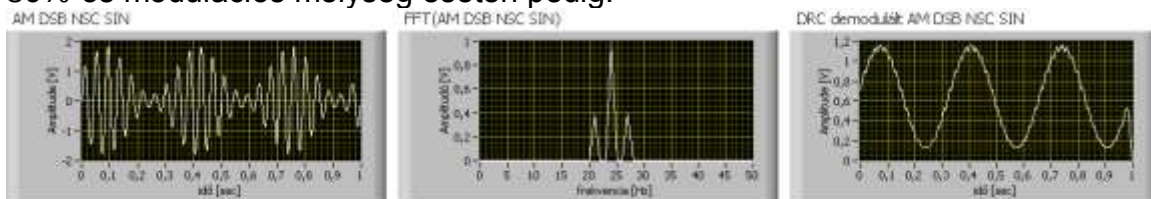
$$m_{\text{DSB}} = \frac{U_m}{U_v},$$

amit %-ban szokás kifejezni és értéke elvben (0...100%) tartományban lehet, de mint már említettük a kis értékek nem célszerűek.

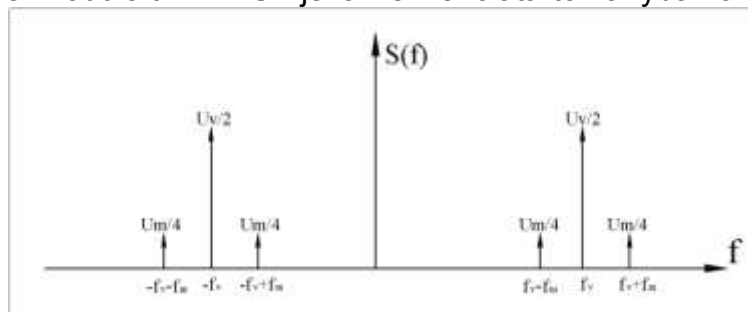
50%-os modulációs mélység esetén egy szinuszos AM jelalak idő (bal) és frekvencia tartományban (közép), valamint a burkoló demodulátor kimenete (jobb).



80%-os modulációs mélység esetén pedig:



Szinuszos jellel modulált AM-DSB jel a frekvenciatartományban a következő:



1.5.1. Moduláció sztochasztikus folyamattal

Sajnos szinuszos moduláló jel esetében a spektrális leírás szegényesen jellemzi a modulációt, ezért változtassuk meg a moduláló jelünket

$$s(t) = a(t) \cos \omega_v t$$

Legyen $a(t)$ legalább gyengén stacioner folyamat $m=0$ várható értékkel és $R_a(\tau)$ autokorrelációs függvényvel.

Ekkor az első és másodrendű átlaga a modulált jelnek:

$$m_s(t) = E\{s(t)\} = E\{a(t) \cos \omega_v t\} = m \cos \omega_v t = 0$$

$$\begin{aligned} R_s(t + \tau, t) &= E\{s(t + \tau)s(t)\} = E\{a(t + \tau) \cos(\omega_v t + \tau) a(t) \cos \omega_v t\} = \\ &= E\{a(t + \tau)a(t)\} \cos(\omega_v t + \tau) \cos \omega_v t = R_a(\tau) \cos(\omega_v t + \tau) \cos \omega_v t \end{aligned}$$

A vonatkozó addíciós tételt alkalmazva:

$$R_s(t + \tau, t) = R_a(\tau) \frac{1}{2} [\cos(\omega_v \tau) + \cos(2\omega_v t + \tau)]$$

Láthatóan a folyamat másodrendű átlaga függ t időtől, vagyis a stacionaritásával gondok vannak. Ugyanakkor a t függés periodikus $T_p = \frac{T_v}{2}$ -re, ahol $T_v = \frac{1}{f_v}$.

$$R_s(t + \tau, t) = R_s\left(t + k \frac{T_v}{2} + \tau, t + k \frac{T_v}{2}\right)$$

Az ilyen folyamatokat ciklikusan stacioner folyamatoknak nevezzük.

Az ilyen periodikus autokorrelációs függvénnyel rendelkező folyamatok esetében - számításainkat megkönnyítendő - célszerű bevezetni az $\bar{R}_s(\tau)$ periódusra átlagolt autokorrelációs függvényt.

$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} R_s(t + \tau, t) dt$$

Behelyettesítve

$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} R_a(\tau) \frac{1}{2} [\cos(\omega_v \tau) + \cos(2\omega_v t + \tau)] dt = \frac{1}{2} R_a(\tau) \cos(\omega_v \tau)$$

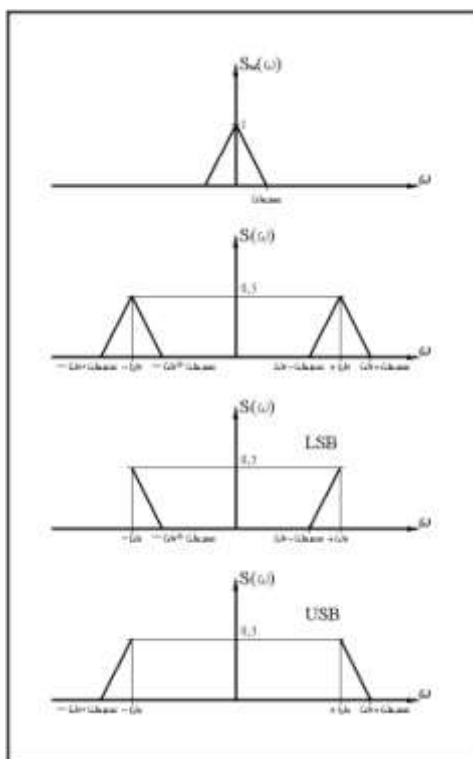
$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{2} R_a(\tau) \cos(\omega_v \tau)$$

$\bar{R}_s(\tau)$ már nem függ az időtől.

A modulált jel PSD-je előállítható $\bar{R}_s(\tau)$ Fourier-transzformáltjaként:

$$S(\omega) = F\{\bar{R}_s(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2} R_a(\tau) \cos(\omega_v \tau)\right\} = \frac{1}{2} S_a(\omega) \otimes \frac{e^{j\omega_v \tau} + e^{-j\omega_v \tau}}{2} = \frac{1}{4} S_a(\omega - \omega_v) + \frac{1}{4} S_a(\omega + \omega_v)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{4} S_a(\omega - \omega_v) + \frac{1}{4} S_a(\omega + \omega_v)$$



A PSD alapján jól megfigyelhető az AM-DSB redundanciája:

Az alsó és felső oldalsávok ugyan azt az információt tartalmazzák → a szükségeshez képest kétszeres sávszélességet használ el.

A vivő információt nem hordoz, ugyanakkor a kisugárzott teljesítmény nagyobbik része ott található.

Ezen problémák kiküszöbölésére módosították az AM-DSB modulációt.

1.6. AM-DSB/SC (kétoldalsávós elnyomott vivőjű amplitúdómoduláció)

$$a(t) = s_m(t)$$

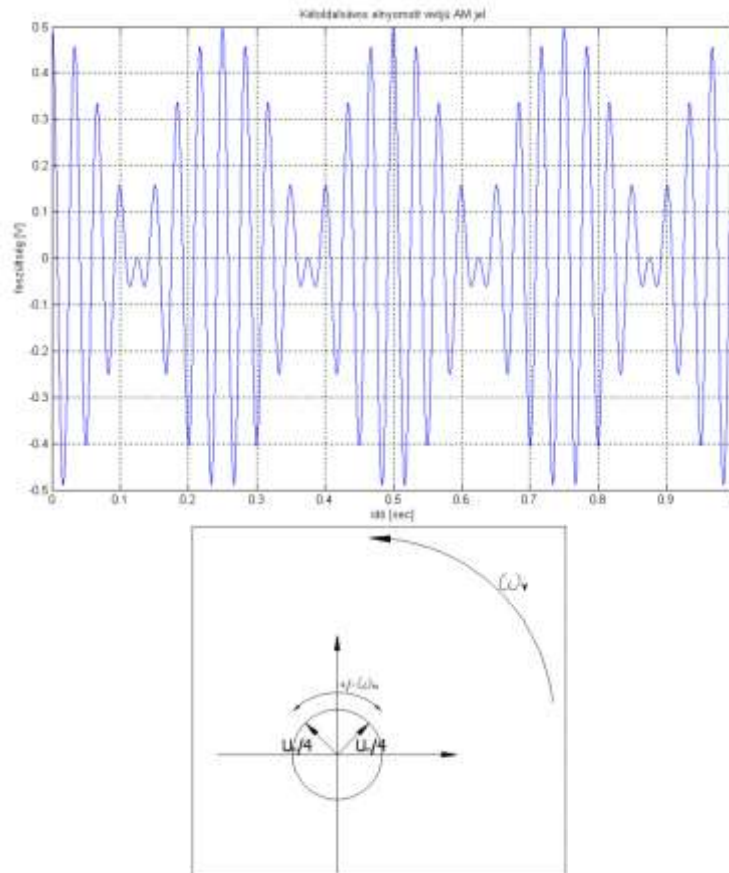
Így a vivő, -vagyis az információt nem hordozó rész-, nem kerül kisugárzásra.

Itt is determinisztikus szinuszos jellel vizsgálódunk először.

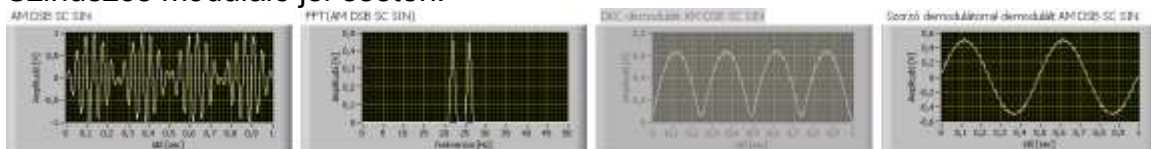
$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

$$a_{\text{DSB}}(t) = U_m \cos \omega_m t$$

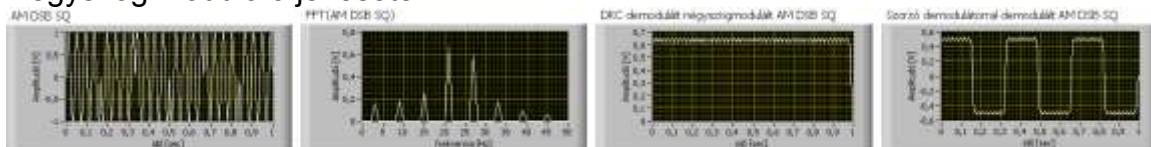
$$\begin{aligned} s_{\text{DSB}}(t) &= a(t) \cos \omega_v t = U_m \cos \omega_m t \cos \omega_v t = \\ &= \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v - \omega_m)t + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v + \omega_m)t \end{aligned}$$



Szinuszos moduláló jel esetén:



Négyszög moduláló jel esetén:



Sajnos a vivő kihagyása a demodulációt megnehezíti. Mint azt már korábbiakban említettük, szorzós demodulációval az eredeti jel torzítatlanul visszaállítható. A probléma azonban az, hogy pontosan ismerni kell az adóban elhelyezett vivőoszillátor frekvenciáját és fázisát. Ez gyakorlati okokból nem lehetséges, pl. a kívánt stabilitású oszillátor (adóban és vevőben egyaránt) túlságosan költséges, nagy méretű lenne. A probléma ennek ellenére megoldható, ha a vevő kinyeri a vett jelből a pontos vivőt. Ezt pl. PLL rendszerű áramkörrel oldható meg.

Az AM-DSB/SC még mindig redundáns, hiszen a szükséges sávszélesség kétszeresét foglalja el. Ezért ezt is továbbfejlesztették.

1.7. AM-SSB

$$s_{SSB}(t) = s_m(t) \cos \omega_v t \mp \hat{s}_m(t) \sin \omega_v t$$

ahol $\hat{s}_m(t)$ az $s_m(t)$ moduláló jel Hilbert-transzformáltja. A $\mp$ előjel az alsó vagy a felső oldalsávot választja ki.

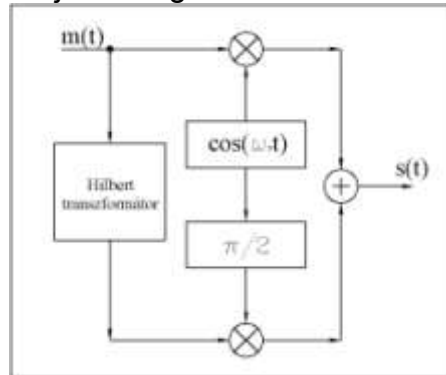
A Hilbert transzformáció súlyfüggvénye:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Amplitúdó átviteli karakterisztikája:

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

Ennek megfelelően az SSB jel elvileg előállítható:



Végezzük el az SSB jel előállítását a szokásos determinisztikus $s_m(t)$ szinuszos moduláló jelünk esetére.

1.7.1. Matematikai megközelítés:

$$s_{SSB}(t) = s_m(t) \cos \omega_v t \mp \hat{s}_m(t) \sin \omega_v t$$

$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

és ennek a Hilbert transzformáltja:

$$\hat{s}_m(t) = U_m \sin \omega_m t$$

behelyettesítve:

$$\begin{aligned} s_{SSB}(t) &= U_m \cos \omega_m t \cos \omega_v t \mp U_m \sin \omega_m t \sin \omega_v t = \\ &= \frac{1}{2} [U_m \cos(\omega_v - \omega_m)t + U_m \cos(\omega_v + \omega_m)t \mp U_m \cos(\omega_v - \omega_m)t - U_m \cos(\omega_v + \omega_m)t] \end{aligned}$$

(+ esetében ez az alsó oldalsáv).

$$s_{SSB}(t) = U_m \cos(\omega_v - \omega_m)t$$

(– esetében ez a felső oldalsáv).

$$s_{SSB}(t) = U_m \cos(\omega_v + \omega_m)t$$

1.7.2. HW megközelítés

Realizációs szempontból először tekintsük az AM-DSB/SC jelet:

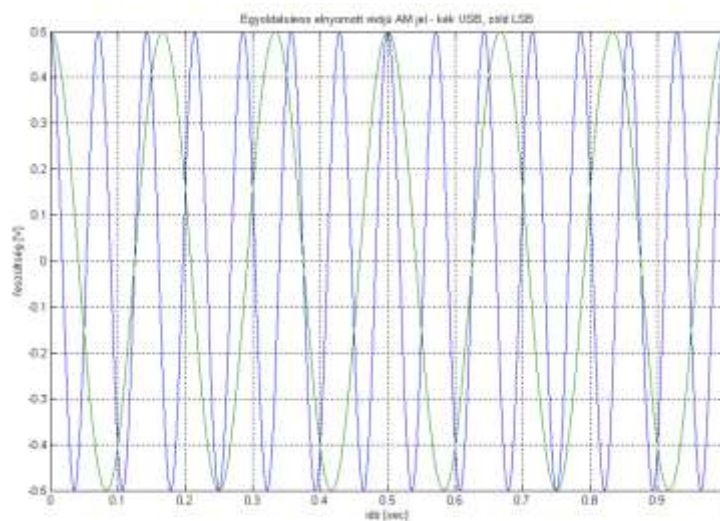
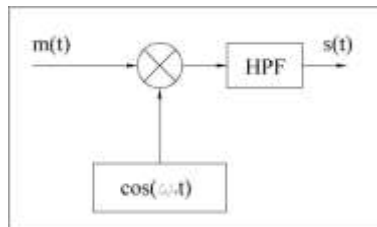
$$\begin{aligned} s_{DSB/SC}(t) &= a(t) \cos \omega_v t = U_m \cos \omega_m t \cos \omega_v t = \\ &= \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v - \omega_m)t + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v + \omega_m)t \end{aligned}$$

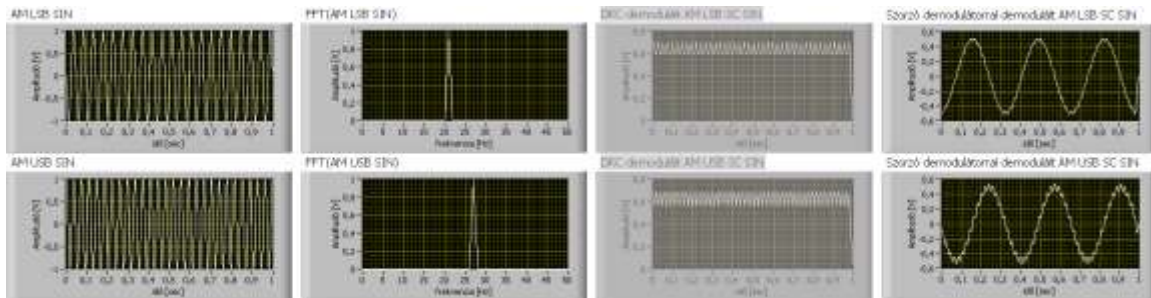
Az alsó és a felső oldalsávok közül kell választanunk. Válasszuk a felsőt. Ez esetben úgy tudjuk előállítani az SSB jelet, hogy a következő felüláteresztő szűrőt alkalmazzuk:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_v \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

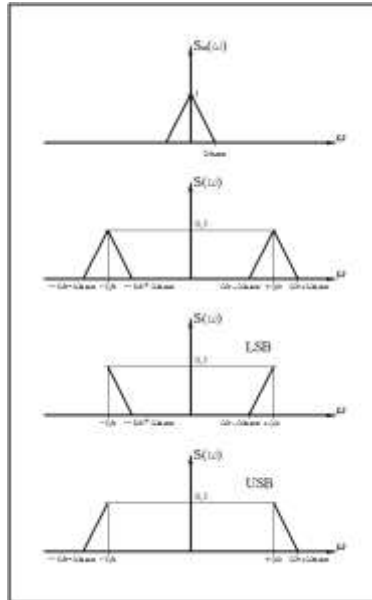
Ekkor az előállított jel:

$$s_{SSB}(t) = \frac{U_m}{2} \cos(\omega_v + \omega_m)t$$

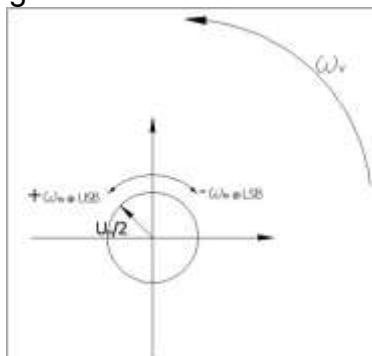




A frekvenciatartományban:



Az SSB jel fazorábrája pedig:



A két megközelítés eredménye megegyezik. Célszerű ezért bemutatni, hogy a HW megközelítésben hol van elrejtve a Hilbert-transzformáció.

A felüláteresztő szűrő egy más felírási módban

$$H(\omega) = \varepsilon(\omega - \omega_v) + \varepsilon(-\omega - \omega_v)$$

ahol $\varepsilon(\omega)$ az egységugrás fv.

$$\varepsilon(\omega) = F\left\{\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{j}{2\pi t}\right\} \quad \varepsilon(-\omega) = F\left\{\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right\}$$

A szűrő előtt a jel:

$$S(\omega) = F\{s(t)\} = F\{a(t)\cos \omega_v t\} = F\{a(t)\} \otimes F\{\cos \omega_v t\} = A(\omega) \otimes \frac{e^{j\omega_v t} + e^{-j\omega_v t}}{2} = \frac{1}{2}A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v)$$

A szűrő után a jel:

$$\begin{aligned} S_{SSB}(\omega) &= \left[\frac{1}{2}A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v) \right] H(\omega) = \left[\frac{1}{2}A(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v) \right] [\varepsilon(\omega - \omega_v) + \varepsilon(-\omega - \omega_v)] = \\ &= \frac{1}{2}A(\omega - \omega_v)\varepsilon(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega - \omega_v)\varepsilon(-\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v)\varepsilon(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v)\varepsilon(\omega + \omega_v) = \\ &= \frac{1}{2}A(\omega - \omega_v)\varepsilon(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v)\varepsilon(-\omega - \omega_v) \end{aligned}$$

vegyük az inverz Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned} F^{-1}\{S_{SSB}(\omega)\} &= F^{-1}\left\{\frac{1}{2}A(\omega - \omega_v)\varepsilon(\omega - \omega_v) + \frac{1}{2}A(\omega + \omega_v)\varepsilon(-\omega - \omega_v)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}F^{-1}\{A(\omega - \omega_v)\varepsilon(\omega - \omega_v) + A(\omega + \omega_v)\varepsilon(-\omega - \omega_v)\} = \frac{1}{2}a(t) \otimes F^{-1}\{\varepsilon(\omega)\}e^{j\omega_v t} + \frac{1}{2}a(t) \otimes F^{-1}\{\varepsilon(-\omega)\}e^{-j\omega_v t} = \\ &= \frac{1}{2}a(t) \otimes \left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{j}{2\pi t}\right]e^{j\omega_v t} + \frac{1}{2}a(t) \otimes \left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right]e^{-j\omega_v t} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a(t) - \frac{j}{2\pi t} \otimes a(t)\right]e^{j\omega_v t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a(t) - \frac{j}{2\pi t} \otimes a(t)\right]e^{-j\omega_v t} \end{aligned}$$

$$a(t) \otimes \frac{1}{\pi t} = \hat{a}(t)$$

$$F^{-1}\{S_{SSB}(\omega)\} = s_{SSB}(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a(t) - j\hat{a}(t)\right]e^{j\omega_v t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a(t) + j\hat{a}(t)\right]e^{-j\omega_v t}$$

$$s_{SSB}(t) = a(t)\cos \omega_v t - j\hat{a}(t)\cos \omega_v t$$

1.7.3. SSB Demoduláció

Az AM-SSB jel demodulációja hasonlóan szorzós demodulátorral történhet, mint az AM-DSB/SC esetében. Itt is szükséges a vivő frekvenciájának és fázisának pontos ismerete. Azonban a vivő kinyerése itt nem lehetséges az AM-DSB/SC-nél alkalmazott módszerekkel. Ezért némi teljesítmény veszteséggel ugyan, de a kedvező sáv szélesség tulajdonságot megtartva arányában kicsi vivőfrekvenciás komponenst is hozzáadnak a jelhez, amelyből a vételi oldalon kinyerhető a pontos vivő.

1.8. Szögmoduláció

A szögmodulációk nemlineárisak ellentétben az amplitúdó modulációkkal melyek lineárisak. További kellemetlen tulajdonsága a szögmodulációknak, hogy tipikusan spektrális kiterjesztést végeznek az alapsávi sávszélességhez képest. A nemlinearitás nagyobb HW követelményeket támaszt, míg a spektrális kiterjesztés a csatornában elhelyezhető összeköttetések számát csökkent. A HW komplexitás jelen technológiai fejlettség mellett nem jelent már gondot. Mégis széleskörűen alkalmazzák őket. Ennek oka az, hogy a spektrális kiterjesztés a zajjal szembeni immunitást növeli és így az átvitel minősége kisebb adóteljesítmény esetében is kiváló szinten tartható.

Itt is a relative keskenysávú megközelítést ($B/f_v < 10\%$) alkalmazzuk.

A szögmodulált jel általános alakja:

$$s(t) = a(t) \cos \vartheta(t)$$

Az $s_m(t)$ moduláló jelet a $\vartheta(t)$ szögbe foglaljuk bele. Az amplitúdóért felelős $a(t)$ értékét konstansnak választjuk.

$$a(t) = \text{konstans} = U_v$$

A kisugározhatóság, terjedés és csatornamegosztás miatt itt is szükséges valamiféle vivőfrekvencia megjelenítésére. Egyelőre megadjuk a fázis – frekvencia kapcsolatot:

$$\omega_p = \frac{d}{dt} \vartheta(t) \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \vartheta(t)$$

a p index a „pillanatnyi”-ra utal.

Mivel vivőfrekvenciás keskenysávú jelekkel foglalkozunk, ezért a fázist

$$\vartheta(t) = \omega_v t + \varphi(t) \text{ alakban kifejezhetjük.}$$

Ebből a pillanatnyi körfrekvencia és frekvencia:

$$\omega_p = \omega_v + \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad f_p = f_v + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi(t))$$

A befoglalás ezek szerint megtörténhet a $\varphi(t)$ fázisban vagy pillanatnyi frekvencia vivőfrekvenciától való eltérésében.

$$\Delta\omega = \omega_p - \omega_v = \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad \Delta f = f_p - f_v = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

Ennek megfelelően beszélünk fázis (PM) és frekvencia modulációról (FM).

$s_m(t)$ moduláló jel befoglalása a PM és FM esetekben következőképpen történik:

1.9. PM

$$\varphi(t) = k_{PM} s_m(t)$$

ahol k_{PM} a fázismodulációs tényező.

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi(t))$$

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + k_{PM} s_m(t))$$

1.10. FM

$$\Delta f = k_{FM} s_m(t)$$

ahol k_{FM} a frekvenciamodulációs tényező.

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + \varphi(t))$$

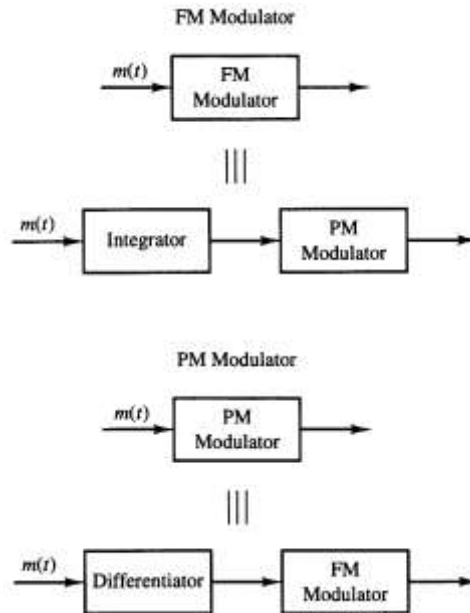
$$s(t) = U_v \cos\left(\omega_v t + k_{FM} 2\pi \int_{-\infty}^t s_m(\alpha) d\alpha\right)$$

A körfrekvencia a fázis változási sebessége (hasonlóan, mint út és sebesség) ezért indokolt az egységesebb felírása is.

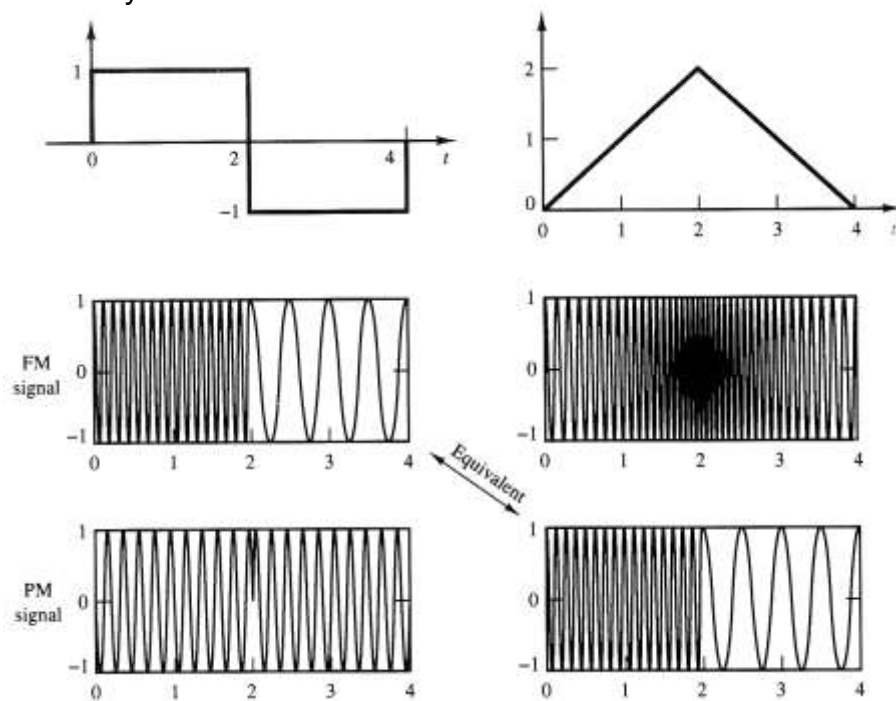
$$\varphi(t) = \begin{cases} k_{PM} s_m(t) & \text{PM} \\ k_{FM} 2\pi \int_{-\infty}^t s_m(\alpha) d\alpha & \text{FM} \end{cases}$$

$$\Delta\omega(t) = \begin{cases} k_{PM} \frac{d}{dt} s_m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_{FM} s_m(t) & \text{FM} \end{cases}$$

Ez a felírás jól bemutatja a PM és FM közötti átjárhatóságot.



Szimmetrikus négyszög illetve háromszög alakú moduláló jel esetén a PM és FM jelek időtartományban a következők:



1.11. PM moduláció szinuszos jellel

A modulált jel általános alakja:

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + k_{PM} s_m(t))$$

A moduláló jel:

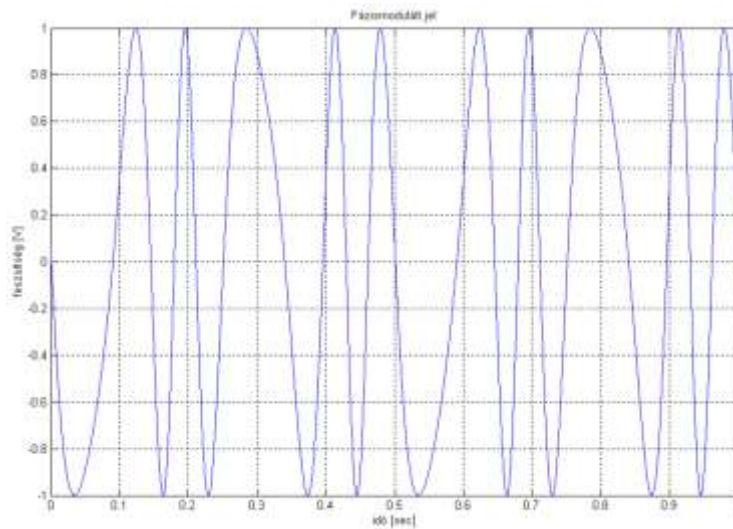
$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

A modulált jel:

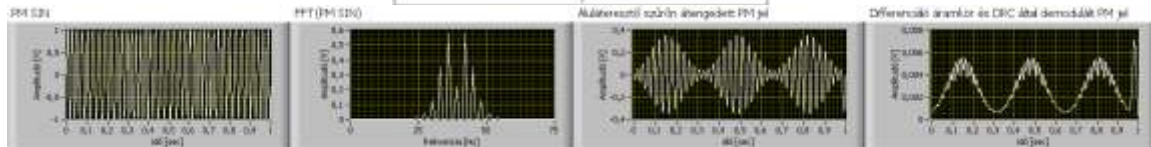
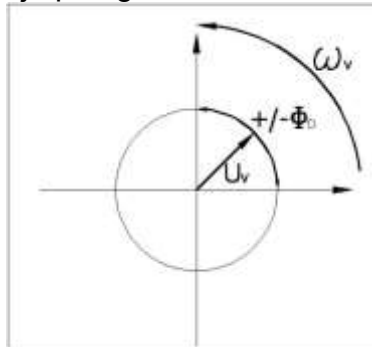
$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + k_{PM} U_m \cos \omega_m t)$$

A felírásból jól látható, hogy $\varphi(t)$ fázis $\pm k_{PM} U_m$ tartományban térhet el a vívő vezette értéktől. Ezért $k_{PM} U_m$ a fázislököt.

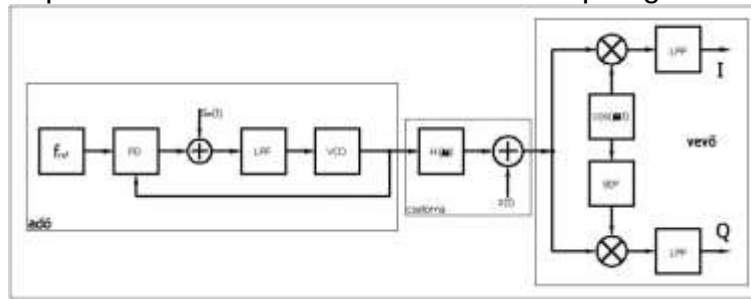
$$m_{PM} = k_{PM} U_m = \Phi_D$$



A fázismodulált jel fazorábrája pedig:



Egy PLL-ből felépített fázismodulátor és -demodulátor pedig:



1.12. FM moduláció szinuszos jellel

$$\Delta f = k_{FM} s_m(t)$$

$$s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

$$\Delta f = k_{FM} U_m \cos \omega_m t$$

A felírásból jól látható, hogy Δf frekvencia $\pm k_{FM} U_m$ tartományban térhet el a vivő frekvenciájától. Ezért $k_{FM} U_m$ -t frekvencia-öktnek nevezik, jelölése pedig f_D .

$$f_D = k_{FM} U_m$$

Végül az FM jel általános alakban:

$$s(t) = U_v \cos \left(\omega_v t + k_{FM} 2\pi \int_{-\infty}^t s_m(\alpha) d\alpha \right)$$

Szinuszos moduláció esetében:

$$s(t) = U_v \cos \left(\omega_v t + k_{FM} 2\pi \int_{-\infty}^t U_m \cos \omega_m \alpha d\alpha \right)$$

Elvégezve az integrálást:

$$s(t) = U_v \cos \left(\omega_v t + \frac{k_{FM} U_m}{\omega_m} 2\pi \sin \omega_m t \right)$$

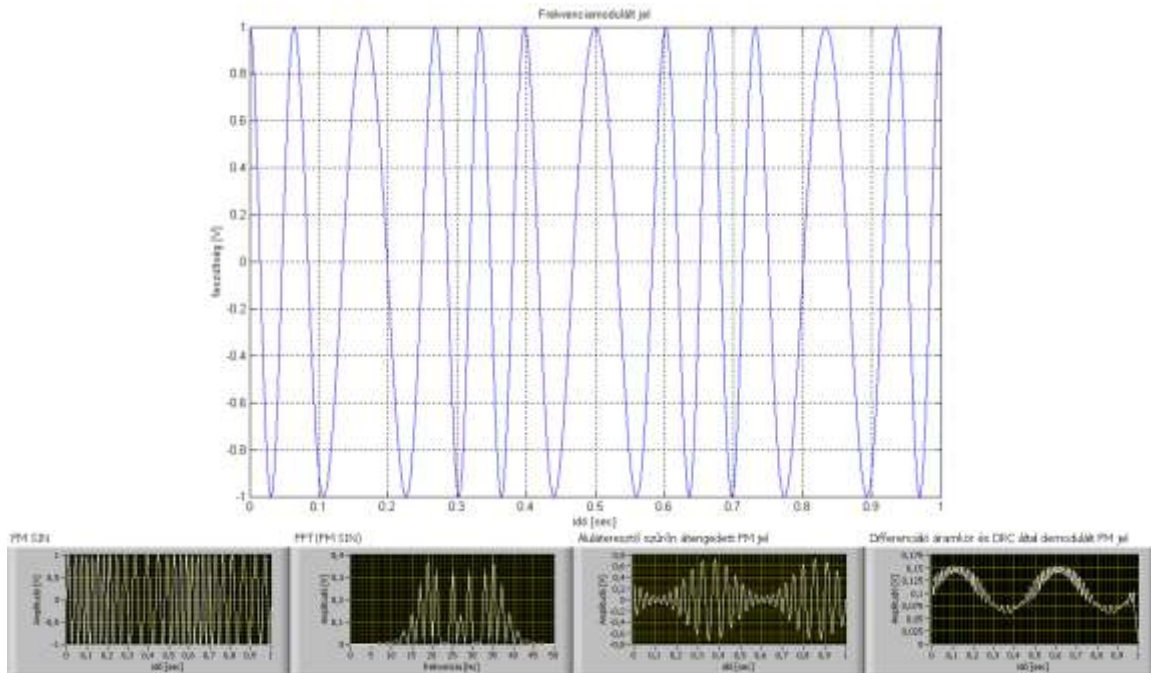
$$s(t) = U_v \cos \left(\omega_v t + \frac{k_{FM} U_m}{f_m} \sin \omega_m t \right)$$

Ezt összevetve a PM végeredményével

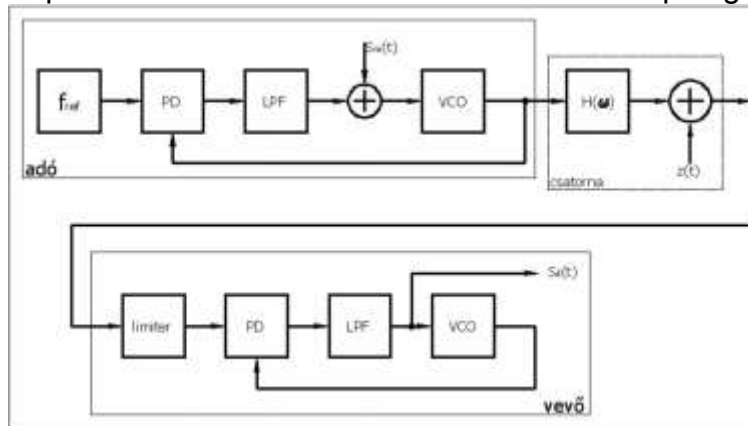
$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + k_{PM} U_m \cos \omega_m t)$$

adódik, hogy $\frac{k_{FM} U_m}{f_m}$ -t frekvencia modulációs tényezőnek definiáljuk:

$$m_{FM} = \frac{k_{FM} U_m}{f_m}$$



Egy PLL-ből felépített frekvenciamodulátor és -demodulátor pedig:



1.13. Szögmodulált jelek sávszélessége

Tekintettel a szögmoduláció nemlineáris jellegére a modulált jel spektrumának meghatározása meglehetősen nehézkes. Egyszerű, pl. szinuszos moduláló jel esetében a spektrum zárt alakban is kifejezhető, bár itt sem egyszerűen. Bonyolultabb, vagyis gyakorlati jelentőséggel bíró esetekben általában közelítéseket alkalmazunk, melyek a szinuszos megoldásra épülnek.

1.13.1. Szinuszos moduláció

PM és FM esetre egyaránt a következő képletet kapjuk

$$s(t) = U_v \cos(\omega_v t + \beta \cos \omega_m t)$$

$$\text{ahol modulációs tényező } \beta = \begin{cases} k_{PM} U_m & \text{PM} \\ \frac{k_{FM} U_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

A szinusz/koszinusz nem érdemi különbség. A modulált jel spektrumának meghatározásához a Bessel-függvényeket kell segítségül hívni.

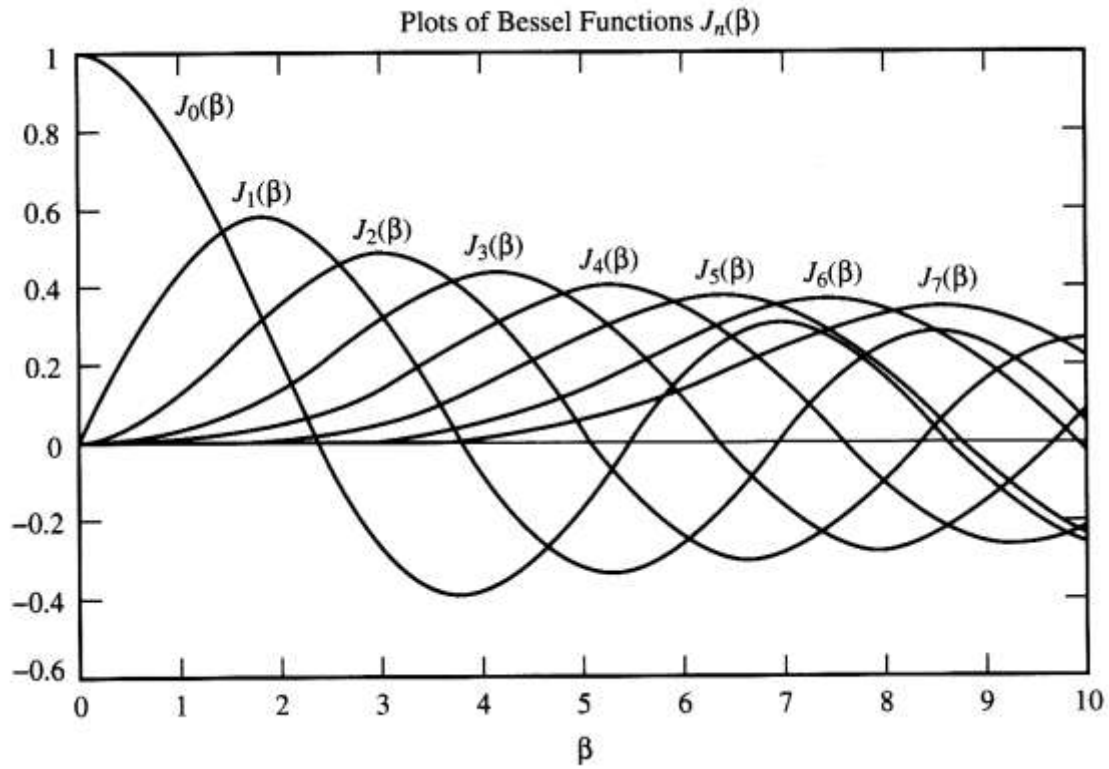


TABLE 5-1 VALUES OF THE BESSEL FUNCTION $J_n(\beta)$.

n	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$
0	0.997	0.990	0.938	0.765	0.224	-0.178	0.172	-0.246
1	0.050	0.100	0.242	0.440	0.577	-0.328	0.235	0.043
2	0.001	0.005	0.031	0.115	0.353	0.047	-0.113	0.255
3				0.020	0.129	0.365	-0.291	0.058
4				0.002	0.034	0.391	-0.105	-0.220
5					0.007	0.261	0.186	-0.234
6					0.001	0.131	0.338	-0.014
7						0.053	0.321	0.217
8						0.018	0.223	0.318
9						0.006	0.126	0.292
10						0.001	0.061	0.207
11							0.026	0.123
12							0.010	0.063
13							0.003	0.029
14							0.001	0.012
15								0.004
16								0.001

Az összegzés hosszadalmas elvégzése helyett a gyors gyakorlati becslésre elterjedt egy egyszerű formula, amelyben a meghatározott sávszélesség kb. 98%-ban tartalmazza a jel teljesítményét.

$$B = 2(\beta + 1)f_m$$

$$\beta = \begin{cases} k_{PM} U_m & \text{PM} \\ \frac{k_{FM} U_m}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 2(k_{PM} U_m + 1)f_m & \text{PM} \\ 2(k_{FM} U_m + f_m) & \text{FM} \end{cases}$$

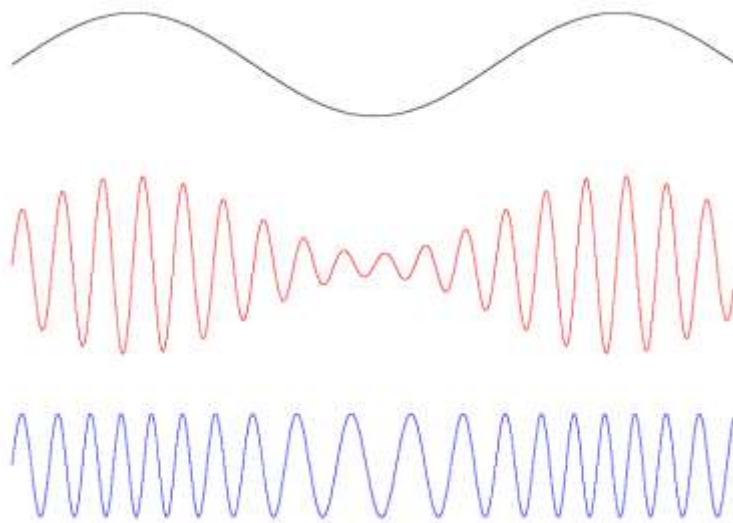
$k_{PM} U_m$ a fázislöklet,

$f_D = k_{FM} U_m$ a frekvencialöklet.

$$B = \begin{cases} 2(\Delta\Phi + 1)f_m & \text{PM} \\ 2(\Delta f + f_m) & \text{FM} \end{cases}$$

Ez az un. Carlson-féle formula.

A vivő és a oldalsávok amplitúdói különböző modulációs tényezők esetében:



Modulációs tényező	vivő	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.00	1.00														
0.25	0.98	0.12													
0.5	0.94	0.24	0.03												
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02											
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01										
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03										
2.41	0	0.52	0.43	0.20	0.06	0.02									
2.5	-0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02	0.01								
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01								
4.0	-0.40	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02							
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02						
5.53	0	-0.34	-0.13	0.25	0.40	0.32	0.19	0.09	0.03	0.01					
6.0	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02					
7.0	0.30	0.00	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02				
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03			
8.65	0	0.27	0.06	-0.24	-0.23	0.03	0.26	0.34	0.28	0.18	0.10	0.05	0.02		
9.0	-0.09	0.25	0.14	-0.18	-0.27	-0.06	0.20	0.33	0.31	0.21	0.12	0.06	0.03	0.01	
10.0	-0.25	0.04	0.25	0.06	-0.22	-0.23	-0.01	0.22	0.32	0.29	0.21	0.12	0.06	0.03	0.01

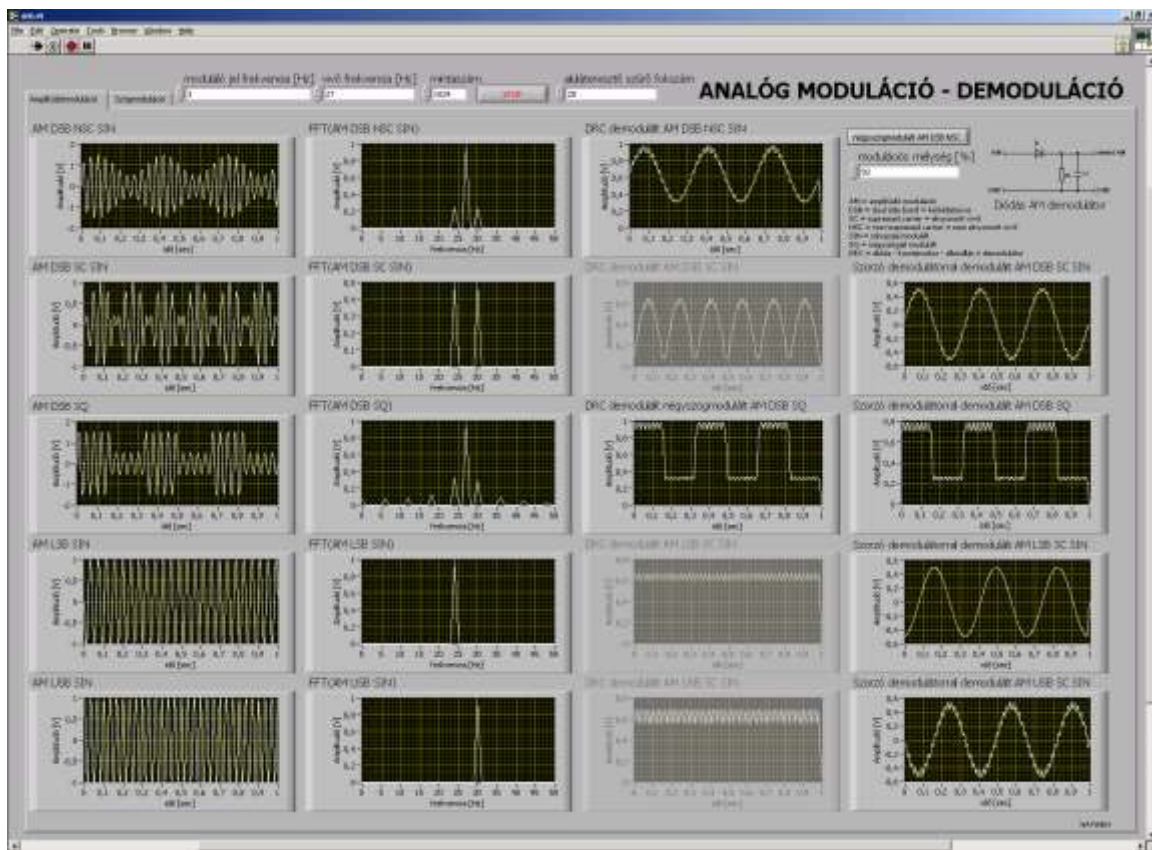
2. Az analóg modulációk vizsgálatához használt MATLAB program forráskódja a következő

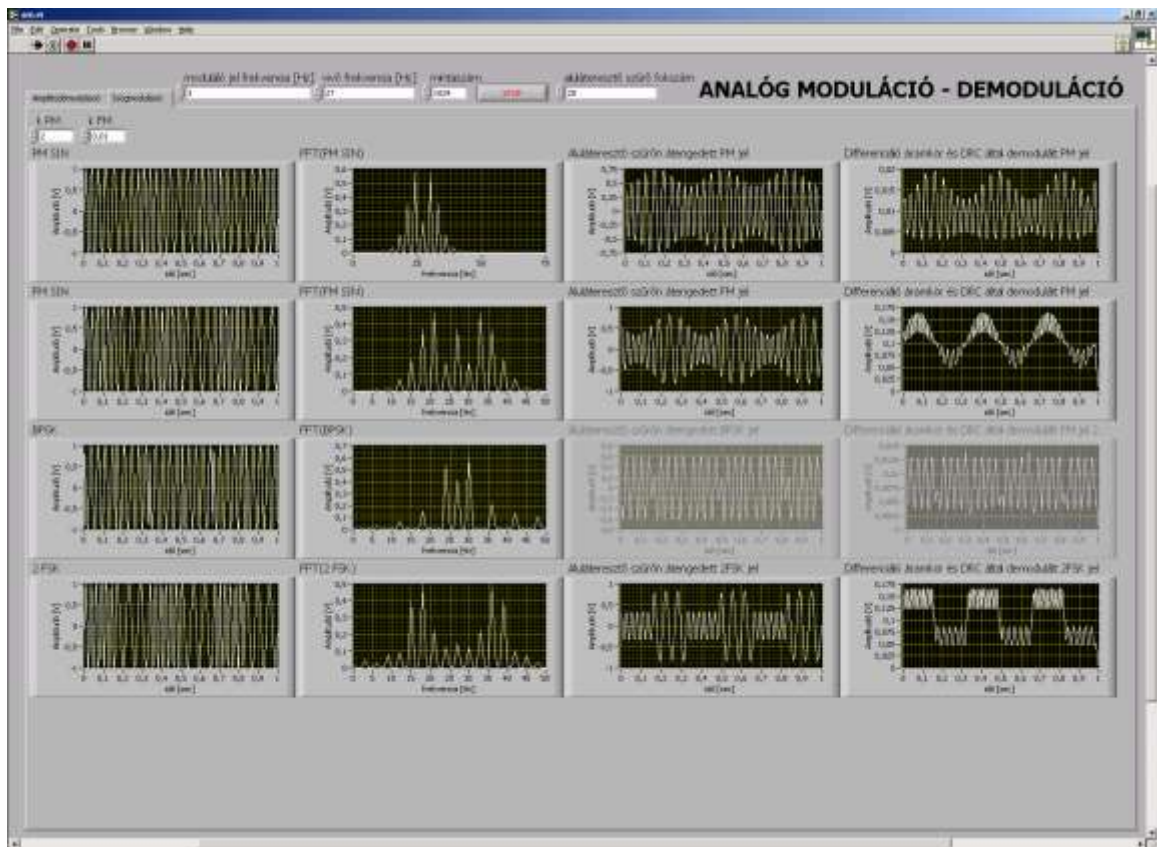
```

close all
clear all
clc
%AM
uv=1;
um=0.5;
fv=27;
fm=3;
t=0:0.0005:1;
stam=uv*cos(2*pi*fvt)+um*cos(2*pi*fmt).*cos(2*pi*fvt);
figure(1);
plot(t,stam);grid
title('AM jel 50%-os modulációs mélységgel');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
n=length(stam);
sfam=fft(stam)/n;
asfam=2*abs(sfam);
fsfam=angle(sfam);
df=1/(t(2)-t(1));
f=(0:df:n*df-df)/n;
figure(2);
bar(f,asfam);grid
title('AM jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');
for i=1:n
if stam(i)>=0 sdam(i)=stam(i); end;
if stam(i)<0 sdam(i)=0; end;
end;
num=1;
den=[.1 1];
sdam=lsim(num,den,sdam,t);
figure(3);
plot(t,sdam);grid
title('A demodulált AM jel');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
%DSB
fv=30;
fm=2;
stdsb=um*cos(2*pi*fmt).*cos(2*pi*fvt);
figure(4);
plot(t,stdsb);grid
title('Kétoldalsávós elnyomott vivőjű AM jel');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
sfdsb=fft(stdsb)/n;
asfdsb=2*abs(sfdsb);
fsfdsb=angle(sfdsb);
figure(5);
bar(f,asfdsb);grid
title('Az AM-DSB-SC jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');
%SSB
fv=10;
fm=4;
stusb=um*cos((fv+fm)*2*pi*t);
stlsb=um*cos((fv-fm)*2*pi*t);
figure(6);
plot(t,stusb,t,stlsb);grid
title('Egyoldalsávós elnyomott vivőjű AM jel - kék USB, zöldLSB');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
sfusb=fft(stusb)/n;
asfusb=2*abs(sfusb);
fsfusb=angle(sfusb);
sflsb=fft(stlsb)/n;
asflsb=2*abs(sflsb);
fsflsb=angle(sflsb);
figure(7);
bar(f,asfusb);grid
title('Az USB jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');
figure(8);
bar(f,asflsb);grid
title('Az LSB jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');
%PM
kpm=3;
stpm=uv*cos(2*pi*fvt+kpm*um*cos(2*pi*fmt));
figure(9);
plot(t,stpm);grid
title('Fázismodulált jel');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
sfpm=fft(stpm)/n;
asfpm=2*abs(sfpm);
fsfpm=angle(sfpm);
figure(10);
bar(f,asfpm);grid
title('A fázismodulált jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');
%FM
kfm=9;
fd=kfm*um;
fv=12;
fm=3;
stfm=uv*cos(2*pi*fvt+fd/fm*sin(2*pi*fmt));
figure(11);
plot(t,stfm);grid
title('Frekvenciamodulált jel');
xlabel('idő [sec]');
ylabel('feszültség [V]');
sffm=fft(stfm)/n;
asffm=2*abs(sffm);
fsffm=angle(sffm);
figure(12);
bar(f,asffm);grid
title('A frekvenciamodulált jel spektruma');
xlabel('frekvencia [Hz]');
ylabel('feszültség [V]');

```

3. Az analóg modulációk vizsgálatához használt LabView-program





A programok letölthetők a következő oldalról:

<http://mht41.mht.bme.hu/~levi/am.zip>