# Matematika A3
## 3. vizsga, 2023. január 19.
Munkaidő: 45 perc

**1. feladat (18 pont)**
Számolja ki a $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}$ felület felszínét.

---

*Mo.* $\underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2 \cos v \sin v)$, $u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \cos v \sin v \\ -u \sin v & u \cos v & u^2(\cos^2 v - v \sin^2 v) \end{vmatrix} = (-u^2 \sin v, -u^2 \cos v, u),$$

így a felszín:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{u^4 + u^2} du dv = \pi \int_0^1 2u\sqrt{u^2 + 1} du = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{8} - 1)$$

---

**2. feladat (15 pont)**
Számolja ki a $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div}(\underline{r}^2 \underline{r})$ erőtér munkáját az $\underline{r}(t) = 2(\cos t, \sin t \cos t, \sin t)$ , $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$ paraméterezéssel megadott görbén növő paraméterérték irányában.

---

*Mo.* A definícióból adódóan a vektormező skalárpotenciálja

$$\operatorname{div}(\underline{r}^2 \underline{r}) = \frac{\partial(x(x^2 + y^2 + z^2))}{\partial x} + \frac{\partial(y(x^2 + y^2 + z^2))}{\partial y} + \frac{\partial(z(x^2 + y^2 + z^2))}{\partial z} = 5\underline{r}^2,$$

a görbe kezdőpontja $(2, 0, 0)$, végpontja pedig $(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$, így a munka $5(5-4) = 5$.

---

**3. feladat (17 pont)**
Legyen $F$ a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az $\underline{n}$ normális vektorára teljesüljön az hogy $\underline{n}\underline{k} \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen $\underline{v}(x, y, z) = (z^2, y^2, x^2)$ Határozza meg az $\int_F \operatorname{rot} \underline{v} d\underline{f}$ integrál értékét.

---

*Mo.* A határoló görbe $(2 \cos t, 2 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, a Stokes-tétel alapján

$$\int_F \operatorname{rot} \underline{v} d\underline{f} = \int_0^{2\pi} (0, 4 \sin^2 t, 4 \cos^2 t)(-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0.$$

---

**IMSC feladat** Adja meg a $3y = x^2$, $27z = 2x^3$ felületek metszésvonalának ívhosszát $0 \leq x \leq 3$ esetén.

---

*Mo.* A görbe paraméterezése: $\underline{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{3}, \frac{2}{27}t^3\right)$, $t \in [0, 3]$. $\underline{r}'(t) = \left(1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2\right)$ tehát az ívhossz:

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} dt = \int_0^3 1 + \frac{2}{9}t^2 dt = 5.$$

---