| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Alkalmazott algebra ZH 18-11-06** **Neptun:** ____________ **Név:** ______________________________

*A dolgozat feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

**1.** *(3 pont)* Írja az I vagy H betűt a négyzetbe aszerint, hogy az állítás igaz vagy hamis! Állításpáronként 0 vagy 1 pont.

*a)* A végtelen sorozatok vektorterének egy bázisát adják azok a sorozatok, melyekben egyetlen 1-es van, a többi elem 0. $\boxed{\text{H}}$

$\mathbb{R}$ vektorteret alkot $\mathbb{Q}$ fölött, de e tér végtelen dimenziós. $\boxed{\text{I}}$

*b)* $\mathbb{R}^n$ és a legföljebb $n-1$-edfokú valós polinomok $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ vektortere izomorf. $\boxed{\text{I}}$

Bármely két $\mathbb{R}$ fölötti $n$-dimenziós euklideszi tér izomorf. $\boxed{\text{I}}$

*c)* Ha $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|\mathbf{Qx}| = |\mathbf{x}|$, akkor $\det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$. $\boxed{\text{I}}$

Ha egy valós vagy komplex négyzetes mátrix sorvektorai páronként merőleges egységvektorok, akkor oszlopavektorai is azok. $\boxed{\text{I}}$

**2.** Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve fejezzük be a mondatot valamely tétel alapján!

*a)* *(1 pont)* Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix nullterének merőlegese $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$

*b)* *(1 pont)* Ha $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotens, akkor karakterisztikus polinomja $\chi_\mathbf{M}(x) = x^n$

*c)* *(1 pont)* A $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$ bázisról a $\hat{\mathcal{B}} = \{(3,2,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$ bázisra való áttérés mátrixa (csak jelöljük a műveletet, kiszámolni nem kell):

$$\mathbf{T}_{\hat{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\hat{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\hat{\mathcal{B}}}\mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$$
$$= \begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

*d)* *(1 pont)* Az $(1,5,12,2)$ vektort a $(1,13,0,2)$ vektorba vivő Givens-forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{5}{13}&\frac{12}{13}&0\\0&-\frac{12}{13}&\frac{5}{13}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

*e)* *(1 pont)* Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$ egy egységvektor, akkor tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorhoz az $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetületét rendelő leképezés mátrixa:

$$\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{H}$$

(mert $\mathbf{x}$ merőleges vetülete $\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{H}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{H})\mathbf{x}$ vagy mert a merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{H}\mathbf{e})^{-1}\mathbf{e}^\mathsf{H}$, de $\mathbf{e}$ egységvektor, így $\mathbf{e}^\mathsf{H}\mathbf{e} = 1$)

**3.** Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + \phantom{2}y + z &= 3\\ 2x + \phantom{2}y - z &= 2\\ 3x + 2y \phantom{{}-z} &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes megoldását a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve! *(4 pont)*

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\operatorname{rref}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&-1&2\\3&2&0&5\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&-1\\0&1&3&4\end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}t$$

A minimális abszolút értékű megoldás meghatározása, majd az összes felírása a minimális absz. értékűvel:

$$\operatorname{rref}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&3&4\\2&-3&1&0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}t$$

**4.** Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix}1&-3\\4&9\\4&-2\\4&6\end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}4\\-5\\6\\-2\end{bmatrix}$$

egyenletrendszer optimális megoldását a QR-felbontás segítségével! *(6 pont)*

Gram–Schmidt:

$$(-3,9,-2,6) - \frac{(-3,9,-2,6)\cdot(1,4,4,4)}{(1,4,4,4)\cdot(1,4,4,4)}(1,4,4,4) = (-4,5,-6,2)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix}1/7&-4/9\\4/7&5/9\\4/7&-6/9\\4/7&2/9\end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}7&7\\0&9\end{bmatrix},$$

amiből az $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ megoldásával

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

**5.** Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix}2&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét! *(2 pont)*

Az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$ képletbe való helyettesítéssel

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\\1&-2\end{bmatrix}$$