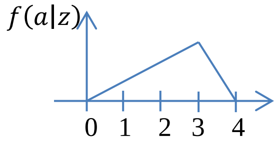
Méréselmélet 1. zárthelyi **2018.03.13.** **(100 perc) A**

1. N zajos megfigyelésre alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában jelen van-e a $sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ diszkrét időfüggvényű jel vagy nincsen? A zaj additív, Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_n=0.5 szórású valószínűségi változó. H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy a jel nincs jelen. Ennek a priori valószínűsége P_0=0.9. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy a jel jelen van. Ennek a priori valószínűsége P_1=0.1. A költségek: C_{10} =C_{01} =10; C_{00} =C_{11} =1. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját, és a hozzátartozó döntési küszöb értékét (max. 6 pont)! Számítsa ki a döntési küszöb numerikus értékét $N = 3$, és $n = 0,1,2$ diszkrét időpontokban vett minták esetére (max. 2 pont)!
2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 4 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 3 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) értékét! Hogyan jellemezné az egyes becslések bizonytalanságát (max. 2 pont)?



3. Mérendő egy ismert jel ismeretlen A amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + w(n)$, $n = 0,1, \dots N-1$. Az ismeretlen A paraméter és az w_k zaj Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és varianciával. $E\{A\} = \mu_A$, $var\{A\} = \sigma_A^2$, $E\{w(i)\} = 0$, $cov\{w(i), w(j)\} = \sigma_w^2\delta_{ij}$, $cov\{A, w(i)\} = 0$, $\forall i$-re, $\forall j$-re. Használja a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját, és adja meg a paraméter legjobb MAP ($\hat{a}_{MAP}$) becslését (max. 5 pont)! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő ($\hat{a}_{MS}$) értékét is (max. 1 pont)!
4. Zajjal terhelt megfigyeléseink vannak. Milyen mérési modell és milyen zaj modell esetén lesz optimális az ideális átlagolás (max. 2 pont)?
5. A mért adatainkról feltételezzük, hogy felírhatók: $y_n = a_0 + a_1 u_n + w_n, n = 0,1, \dots, N-1$; ill. vektorokkal-mátrixokkal $z = Ua + w$ formában. Ezzel lényegében modellt illesztünk. Határozza meg a paraméterek legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőjét, ha $\sum_{n=0}^{N-1} u_n = 0$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 = 100$, $\sum_{n=0}^{N-1} y_n = 5$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n = 100$, $N = 10$ (max. 5 pont)!
6. Mutassa be, hogy mire szolgál a Cramer-Rao alsó korlát (CRLB): Skalár paraméter esetére adja meg (1) alkalmazásának feltételeit (max. 2 pont); (2) számításának módját (max. 2 pont); (3) az alsó korlát elérésének feltételét (max. 2 pont)!
7. Mérési adatok négyzetének és köbének is képezzük az átlagát. Vezessen le ezekre a feladatokra rekurzív összefüggést (max. 3 pont)!

8.* A $z(n) = Asin\left(\frac{2\pi}{N}mn + \varphi\right) + w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj. Az illesztett jel m egész periódusából 100 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2}{\sigma_w^2} = 10$. Vezesse le a fázisbecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét (max. 5 pont)!

A *-os feladat nélkül elérhető pontszám: 40. Az elégségeshez 16 pont kell. A *-os feladattal többletpontok szerezhetők. A többletpontokat a tárgy végső értékelésénél figyelembe vesszük.