ANALÍZIS 2.	**I. PÓTZÁRTHELYI**	**2013. március 28.**
Mérnök informatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (14 pont)
Adja meg az

$$y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin^3 x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

kezdetiérték-probléma megoldását.

A homogén egyenlet megoldása $y \equiv 0$, és:

$$\ln|y| = \int \frac{1}{y} dy = -\int \operatorname{ctg} x dx = -\ln|\sin x| + c, \qquad (\textbf{4 pont})$$

így $y_h = \frac{c}{\sin x}$, és $y_{ip} = \frac{c(x)}{\sin x}$, (**1 pont**)

$$\sin^3 x = \frac{c'(x)\sin x - c(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{c(x)}{\sin x}\operatorname{ctg} x = \frac{c'(x)}{\sin x} \qquad (\textbf{3 pont})$$

így

$$c(x) = \int \sin^4 x dx = \int \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{\sin^2(2x)}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{16},$$
(**3 pont**)

$$y_{\text{á}} = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + c\right). \qquad (\textbf{1 pont})$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ akkor teljesül, ha $c = \frac{32}{3\pi}$, vagyis

$$y = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{32}{3\pi}\right). \qquad (\textbf{2 pont})$$

---

2. feladat (13 pont)
Írja fel az

$$y' = \frac{e^x(y^2-9)}{(y-2)(\sqrt{e^{2x}-1})}$$

differenciálegyenlet általános megoldását. (Elég az implicit alak megadása.)

Szétválasztható változójú DE, $y \equiv \pm 3$ (**1 pont**) megoldás.

$$\int \frac{y-2}{y^2-9}dy = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Itt

$$\frac{y-2}{y^2-9} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3} = \frac{(A+B)y+3A-3B}{y^2-4}, \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

így $3A - 3(1-A) = -2$, vagyis $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{5}{6}$ (**1 pont**). A jobboldali integrálhoz használjuk a $z = e^x$ helyettesítést ($\ln z = x$):

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \cdot \frac{1}{z}dz = \operatorname{arch} z + c = \operatorname{arch} e^x + c \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

így a diffegyenlet általános megoldása:

$$\frac{1}{6}\ln|y-3| + \frac{5}{6}\ln|y+3| = \operatorname{arch} e^x + c. \qquad (\mathbf{4\ pont})$$

---

3. feladat (12 pont)

Megfelelő helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet

$$y' = 3 - (5x-y)^2.$$

Használjuk az $u = 5x - y$ (**2 pont**)helyettesítést. Ekkor $y' = (5x-u)' = 5 - u'$, amiből a

$$u' = u^2 + 2 \qquad (\mathbf{3\ pont})$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$x + c = \int 1dx = \int \frac{1}{u^2+2}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}du = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$$

(**4 pont**)

visszahelyettesítve

$$x + c = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5x-y}{\sqrt{2}}\right) \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

így

$$y = 5x - \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}(x+c)\right) \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

4. feladat (10 pont)

$$y' = 3x + x^2 - y^2$$

a) Rajzolja fel a $P_1(1,2)$ illetve $P_2(-1,2)$ pontokhoz tartozó vonalelemeket.

b) Van-e lokális szélsőértéke a a P_1 illetve P_2 pontokon átmenő megoldásoknak a P_1 illetve P_2 pontokban, és ha igen, milyen típusú ?

Rajz (**3 pont**) A P_2 pontban $y' \neq 0$, így nem lehet szélsőérték. (**2 pont**) A P_1 pontban $y' = 0$ és $y'' = 3 + 2x - 2yy' = 5 > 0$, tehát a görbének lokális minimuma van P_2-ben (**5 pont**).

5. feladat (17 pont)

Oldja meg az $y'' - 2y' + 2y = 5\sin x - 25xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot.

A homogén egyenlet megoldásához a $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ (**3 pont**), tehát

$$y_h = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Nincs külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$\begin{array}{rcl|l} y_{ip} & = & A\sin x + B\cos x + (Cx + D)e^x & \cdot 2+ \\ y'_{ip} & = & A\cos x - B\sin x + (Cx + D + C)e^x & \cdot(-2)+ \\ y''_{ip} & = & -A\sin x - B\cos x + (Cx + D + 2C)e^x & \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$(A + 2B)\sin x + (-2A + B)\cos x + (5Cx + 5D + 2C)e^x = 5\sin x - 25xe^x$$

$A = 1$, $B = 2$, $C = -5$, $D = 2$ (**3 pont**).

$$y_{á} = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \sin x + 2\cos x + (-5x + 2)e^x \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$y(0) = c_1 + 2 + 2 = 1$, $y'(0) = c_1 + c_2 + 1 - 3 = 0$, tehát $c_1 = -3$, $c_2 = 5$ (**3 pont**), így

$$y = e^{-x}(-3\cos x + 5\sin x) + \sin x - 2\cos x + (5x-2)e^x. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

6. feladat (12 pont)
Mennyi a rendje annak a legacsonyabbrendű állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletnek, melynek egy megoldása az

$$y = 4xe^{-3x}\cos(2x) + 3\,\mathrm{sh}\,x$$

függvény? Adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$4xe^{-3x}\cos(2x) \Rightarrow \lambda_{1,2,3,4} = -3 \pm 2i$ (3 pont), $3\,\mathrm{sh}\,x = 2e^x + 2e^{-x} \Rightarrow \lambda_5 = 1, \lambda_6 = -1$,(3 pont) vagyis a diffegyenlet rendje 6 (2 pont), általános megoldása pedig

$$y_{\text{á}} = (c_1 + c_2x)e^{-3x}\sin(2x) + (c_3 + c_4x)e^{-3x}\cos(2x) + c_5e^x + c_6e^{-x}. \quad \textbf{(4 pont)}$$

---

7. feladat (10 pont)
Írja fel az

$$f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$$

lineáris rekurzió általános megoldását, az $f(0) = 4$, $f(1) = -2$ kezdeti feltételeknek megfelelő megoldást, valamint az összes korlátos megoldást.

$q^n = 2q^{n-1} + 3q^n - 2$, így a $q^2 - 2q - 3 = 0$ (**2 pont**) egyenlet $q_1 = 3$, $q_2 = -1$ (**1 pont**) megoldásai adják a rekurzió általános megoldását:

$$f(n) = c_1 3^n + c_2(-1)^n. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A kezdeti feltételekhez: $f(0) = c_1 + c_2 = 4$, $f(1) = 3c_1 - c_2 = -2$, tehát $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{7}{2}$ (**3 pont**). Korlátos a megoldás, ha $c_1 = 0$. (**2 pont**)

8. feladat (12 pont)

Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot. Konvergens lesz-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{\binom{2n}{n}}$$

sor?

Ha $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c,$$

akkor a $\sum a_n$ sor $c < 1$ esetén konvergens, $c > 1$ esetén divergens. (**4 pont**)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!n!(2n)!}{n!n!(3n)!}}{\frac{(2n+2)!(n+1)!(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(3n+3)!}} = \qquad (\textbf{3 pont})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+1)!(3n+3)!(2n)!n!(2n)!}{(2n+2)!(n+1)!(2n+2)!n!n!(3n)!} = \qquad (\textbf{2 pont})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)^2(2n+1)^2} = \frac{27}{16} > 1 \qquad (\textbf{3 pont})$$

tehát a sor divergens.

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Írja fel az

$$y^{(7)} - 4y^{(5)} = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

$0 = \lambda^7 - 4\lambda^5 = \lambda^5(\lambda^2 - 4)$, $\lambda_{1,2,3,4,5} = 0$, $\lambda_6 = 2$, $\lambda_7 = -2$

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x4 + c_6e^{2x} + c_7e{-}2x.$$

---

10. feladat (10 pont)
Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2n+n^2}{n+n^2}\right)^{n^2}$$

numerikus sor?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \left(\frac{2n+n^2}{n+n^2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n = \frac{e^2}{e} > 1,$$

tehát a sor divergens.