ANALÍZIS(1) Műszaki Informatika szak **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2004. jan. 15.** Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (12 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorozatok:

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n + \sqrt[n]{2^{n+1}}, \qquad b_n = \sqrt[n]{3n^4 - n^3 + 2n^2}$$

Ha n páros: 1 $a_n = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0} + 1 + 2\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \to 3$ 1 1 1

Ha n páratlan: $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 + 2\sqrt[n]{2} \to 1$ 1

$\Rightarrow$ (a_n) nem konvergens, mert 2 torlódási pontja van. 1

$$\underbrace{\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{\to 1} = \sqrt[n]{3n^4 - n^4 + 0} \le b_n = \sqrt[n]{3n^4 - n^3 + 2n^2} \le \sqrt[n]{3n^4 - 0 + 2n^4} = \underbrace{\sqrt[n]{5}\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{\to 1}$$

1 1 1 1 1

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 1, tehát konvergens.

2. feladat (15 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy egy sor konvergens?

A definíció alapján döntse el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$

b) Abszolút konvergens-e, illetve konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{(3n+1)\,n!}$$

a.) Ha $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{=s_n} = s$, akkor s-et tekintjük a sor összegének. 2

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt3} - \frac{1}{\sqrt4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) =$$ 1

$= \frac{1}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \to \frac{1}{\sqrt2} = s$ a sor összege. 2 1

an1 v1 040115/1

b.) $\sum\limits^{\infty} |b_n|$:

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{4^{n+2}\,(3n+1)\,n!}{(3n+4)\,(n+1)!\,4^{n+1}} = \underbrace{\frac{4}{n+1}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{3n+1}{3n+4}}_{=\frac{1+1/3n}{1+4/3n}\to 1} \to 0 < 1$$

1 1 1 2 2

$\Rightarrow$ a sor abszolút konv. 1 $\Rightarrow$ a sor konv. 1

3. feladat (11 pont)

Bizonyítsa be , hogy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (ne használjon L'Hospital szabályt)!

Bizonyítsa be, hogy:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow \cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$ 1

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\ \underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 0} = 0$$ 2 1 1

$f(x) := \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$ 1 1

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sin x\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right) =$$ 1 2

$= \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ 1

4. feladat (10 pont)

$$\lim_{x\to 0}\left(2 - \cos x\right)^{\left(\frac{1}{\operatorname{sh} 5x^2}\right)} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh}5x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(2-\cos x)\cdot 1/\operatorname{sh}5x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{sh}5x^2}} = e^{1/10}$$ 1 1 1 1

Ugyanis

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{sh}5x^2}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{2-\cos x}}{\operatorname{ch}5x^2\cdot 10x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1}}{10\underbrace{\operatorname{ch}5x^2}_{\to 1}\underbrace{(2-\cos x)}_{\to 1}} = \frac{1}{10}$$ 1 1 1 1 1 1

an1 v1 040115/2.

5. feladat (18 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+3)\,\sin(\pi x)\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+6}{x^2+4x+13}\,dx = ?$

9

a.) $\displaystyle\int_0^1 (x+3)\sin\pi x\,dx = (x+3)\frac{-\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi x\,dx =$ 4 parc. int. 1 N-L 5

$u = x+3 \quad v' = \sin\pi x$

$u' = 1 \quad v = -\frac{\cos\pi x}{\pi}$

$\displaystyle = \frac{\sin\pi x}{\pi}\Big|_0^1$ 1

$\displaystyle = -\frac{1}{\pi}\underbrace{(4\cos\pi - 3\cos 0)}_{-7} + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{(\sin\pi - \sin 0)}_{0} = \frac{7}{\pi}$ 1 1 1

9

b.) $\displaystyle I_b = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx + 2\int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx =$ 2 2 1

$\frac{f'}{f}$ $\displaystyle \frac{2}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}dx$ 1

$\displaystyle = \ln(x^2+4x+13) + \frac{2}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}}{\frac{1}{3}} + C$ 1 1 1

6. feladat (21 pont)

a) (8p)

Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyen az

$$f(x) = x^3 e^{-x^4}$$

függvény monoton! Van-e lokális szélsőértéke f-nek?

b) (7p) *

$$\int_1^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx = ?$$

c) (6p)

Írja le a numerikus sorokra vonatkozó integrálkritériumot, majd ennek alapján döntse el, hogy konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^4}}$$

an1 v1 04011513.

8

a.) $f'(x) = 3x^2 e^{-x^4} + x^3 e^{-x^4}(-4x^3) = \underbrace{x^2}_{\geq 0}\,\underbrace{e^{-x^4}}_{>0}\,\underbrace{(3-4x^4)}$ 1 1 $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ 1

	$(-\infty,-\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$	$-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$	$(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}},0)$	0	$(0,\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$	$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$	$(\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
f	↘	lok. min.	↗		↗	lok. max	↘

2

Lok. sz.é: 1

f mon. csökken: $(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$, $(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \infty)$ intervallumokon 1

f mon. nő: $(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}})$ intervallumon 1

7

b.*) $\displaystyle\int_3^\infty x^3 e^{-x^4}dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega x^3 e^{-x^4}dx = -\frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega -4x^3 e^{-x^4}dx =$ 1 1 $f'e^f$ 1

$\displaystyle = -\frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty} e^{-x^4}\Big|_3^\omega = -\frac{1}{4}\lim_{\omega\to\infty}\left(e^{-\omega^4} - e^{-81}\right) = \frac{1}{4e^{81}}$ 1 1 1 $e^{-\omega^4} \to 0$ 1

6 c.)

T Legyen f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1,\infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$

1. Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergens 2

2. Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergens 1

$f(x) = x^3 e^{-x^4}$ mon. csökkenő $x \geq 3$-ra 1 $f(n) = a_n = \frac{n^3}{e^{n^4}} > 0$ 1

$\Rightarrow$ Alkalmazható az integrálkritérium.

Mivel $\int_3^\infty f(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_3^\infty a_n$ is konvergens. 1

an1 v1 04011514.

7. feladat (13 pont)*

Vezesse be az $x = \frac{1}{3}\sin t$ új változót, majd határozza meg az alábbi integrált:

$$\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$$

$dx = \frac{1}{3}\cos t\,dt$ 2

$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\frac{1}{3}\cos t\,dt = \frac{1}{3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$ 1 1 2

$= \frac{1}{6}\left(t + \underbrace{\frac{\sin 2t}{2}}_{=\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}\right) + C$ 1 3 és $t = \arcsin 3x$ 1

$\frac{\sin(2\arcsin 3x)}{2}$ 1

$I = \frac{1}{6}\left(\arcsin 3x + 3x\sqrt{1-(3x)^2}\right) + C$ 1

Csak a kettes (indokolt esetben a hármas) vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki:

8. feladat (9 pont)

A derivált definíciója alapján határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{2x-3}$$

függvény $x_0 = 6$ pontbeli deriváltját!

$f'(6) = \lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(6+h)-3}-3}{h} =$ 2 1

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} = \lim_{h\to 0}\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} =$ 1 2 1

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\,\frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \frac{1}{3}$ 1 1

9. feladat (11 pont)

Hol konvex, illetve hol konkáv az

$$f(x) = \frac{\ln(ex)}{x}$$

függvény? Van-e inflexiós pontja?

$f'(x) = \frac{\frac{1}{ex}\cdot e\cdot x - \ln ex}{x^2} = \frac{1-\ln ex}{x^2}$, $x>0$ 1 1

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{ex}e\cdot x^2 - (1-\ln ex)2x}{x^4} = \frac{(2\ln(ex)-3)x}{x^4}$, $x>0$ 1

$f''=0$: $2\ln ex - 3 = 0 \Rightarrow \ln ex = \frac{3}{2} \Rightarrow ex = e^{3/2} \Rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$ 1 1 1

	$(0,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},\infty)$	
f''	$-$	0	$+$	2
f	$\frown$	infl. pont	$\smile$	3