ANALÍZIS 1. | **I. PÓTZÁRTHELYI** | **2012. október 27.**

Mérnök informatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (28 pont)

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n^2+1}$ $\quad$ $c)$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{3n^2-2n+1}-\sqrt{n^2+6n-3}$

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n+1}$ $\quad$ $d)$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2-2n+1}-\sqrt[n]{n^2+6n-3}$

2. feladat (18 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.

b) A definíció alapján lássa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n}{5+4n^3}=\frac{3}{4}.$$

c) Konvergens-e az

$$a_n=\left(\frac{3n^3+2n}{5+4n^3}\right)^n.$$

sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

3. feladat (16 pont)

Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén

$$a_{n+1}=\sqrt{8a_n-12}.$$

a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén $2 < a_n < 6$.

b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

4. feladat (12 pont)

Adja meg az

$$a_n=\sqrt[n]{n^4+(-8)^n+3^{n+1}+2^{3n}}$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat?

5. feladat (15 pont)
a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot.
b) Igazolja, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{3^n}$$

konvergens. Mutassa meg, hogy ha $n \geq 5$, akkor az $s \approx s_n$ közelítés hibája 10^{-2}-nál kisebb.

6. feladat (11 pont)
Abszolút illetve feltételesen konvergens-e a

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+1} + 2^{3n-2}}{3^{2n} + n}$$

sor?

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (8 pont)
Konvergens-e az

$$a_n = \frac{n^{10} + 10^n + (n-1)!}{(n+1)! + 3^{2n}}$$

sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

8. feladat (12 pont)
Konvergensek-e a

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

sorok?