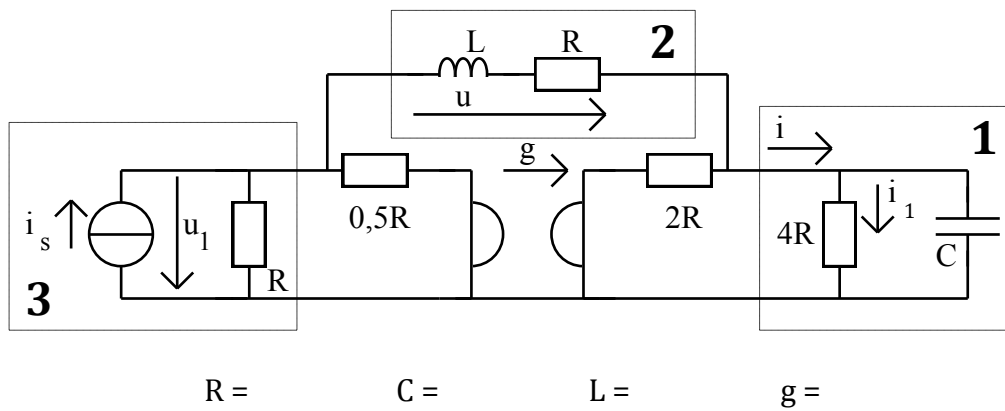


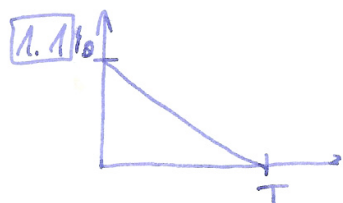
H17

Válaszjel: u , u_1 , i , i_1

A vizsgált kétpólus: 1, 2, 3



1. Feladat



$$I_S = \frac{A_0}{R} = \frac{10V}{4k\Omega} = 2.5mA$$

$$i(t) = I_0 - I_0 \frac{t}{T}$$

Fourier sor, valószínűleg: $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (I_k^A \cos k\omega_0 t + I_k^B \sin k\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \frac{t}{T} dt = \frac{I_0}{T} [T] - \frac{I_0}{T^2} \int_0^T t dt = \\ &= I_0 - \frac{I_0}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = I_0 - \frac{I_0}{T^2} \left[\frac{T^2}{2} - 0 \right] = I_0 - \frac{I_0}{2} = \underline{\underline{\frac{I_0}{2}}} \end{aligned}$$

$$I_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cos k\omega_0 t dt = 0, \text{ mert párosan függvények a cos komponens 0.}$$

$$I_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^T I_0 \sin k\omega_0 t dt - \frac{2}{T} \int_0^T I_0 \frac{t}{T} \sin k\omega_0 t dt =$$

$$= \frac{2I_0}{T} \left[\underbrace{-\frac{\cos k\frac{2\pi}{T}T}}_{-1} + \underbrace{\frac{\cos k\frac{2\pi}{T} \cdot 0}}_1 \right] - \frac{2I_0}{T^2} \int_0^T t \sin k\omega_0 t dt =$$

$$= 0 - \frac{2I_0}{T^2} \left[\left[t \cdot \frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0} \right]_0^T - \int_0^T 1 \cdot \frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0} dt \right] = -\frac{2I_0}{T^2} \left[\left[T \cdot \frac{-\cos k\frac{2\pi}{T}T}{k\frac{2\pi}{T}} - 0 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k\omega_0} \left[\frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0} \right]_0^T \right] = -\frac{2I_0}{T^2} \left[\left[T \cdot \frac{\cos k\frac{2\pi}{T}}{k\frac{2\pi}{T}} \right] + \frac{1}{k\omega_0} \left[\frac{\sin k\frac{2\pi}{T}T}{k\frac{2\pi}{T}} - 0 \right] \right] =$$

$$= -\frac{2I_0}{T^2} \left[\left[-\frac{T}{k\frac{2\pi}{T}} \right] + 0 \right] = -\frac{2I_0}{T^2} \cdot \frac{T}{k\frac{2\pi}{T}} = \underline{\underline{\frac{I_0}{k\pi}}}$$

$$i(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega_0 t + \frac{I_0}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{I_0}{4\pi} \sin 4\omega_0 t$$

$$\underline{\underline{i(t) = 1,25 + 0,795 \sin \omega_0 t + 0,397 \sin 2\omega_0 t + 0,265 \sin 3\omega_0 t + 0,199 \sin 4\omega_0 t [mA]}}$$

1.2 A gerjentes effektív értéke pontosan:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(I_0 - I_0 \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(I_0^2 - 2I_0^2 \frac{t}{T} + I_0^2 \frac{t^2}{T^2} \right) dt} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \left(1 - 2\frac{t}{T} + \frac{t^2}{T^2} \right) dt} = \sqrt{\frac{1 \cdot I_0^2 T}{T} \int_0^T 1 dt - \frac{2I_0^2 T}{T^2} \int_0^T t dt + \frac{I_0^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt} = \\
 &= \sqrt{\frac{I_0^2}{T} [T] - \frac{2I_0^2}{T^2} \left[\frac{T^2}{2} \right] + \frac{I_0^2}{T^3} \left[\frac{T^3}{3} \right]} = \sqrt{I_0^2 - I_0^2 + \frac{I_0^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot I_0^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot I_0
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot 2,5 \text{ mA} = \underline{\underline{1,443 \text{ mA}}}$$

$$I_{\text{efffounic}} = \sqrt{1,25^2 + \left(\frac{0,795}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{0,397}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{0,265}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{0,199}{\sqrt{2}} \right)^2} = \underline{\underline{1,4185 \text{ mA}}}$$

$$\text{Relatív hiba: } H = \frac{I_{\text{eff}} - I_{\text{efffounic}}}{I_{\text{eff}}} \cdot 100 = \frac{1,443 - 1,4185}{1,443} \cdot 100 = \underline{\underline{1,697\%}}$$

1.3 Átírteli karakterisztika

Hálózati egyenletek:

$$① i_s = \frac{U_1}{R} + i_L + i_a$$

$$② i_L = i_b + \frac{U_c}{4R} + C\dot{U}_c$$

$$③ U_1 = 0,5R \cdot i_a - \frac{1}{g} i_b$$

$$④ U_c = 2R \cdot i_b + \frac{1}{g} i_a$$

$$⑤ i_L = \frac{U_1 - L i_L - U_c}{R}$$

Az állapotváltozók leírás normálalakja:

$$\dot{U}_c = -0,017 U_c + 0,0815 i_L + 0,0184 i_s$$

$$\dot{i}_L = -0,986 U_c - 4,7 i_L + 1,367 i_s$$

$$U_1 = -0,184 U_c - 1,64 i_L + 1,64 i_s$$

Kohérens egységek: [V mA kΩ μF H ms]

Az értékek behelyettesítése után, MATHEMATICA programmal ezt kaptam:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0,017 & 0,0815 \\ -0,986 & -4,7 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,0184 \\ 1,367 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} -0,184 & -1,64 \end{bmatrix} \quad D = 1,64$$

$\lambda_1 = -0,0342$, $\lambda_2 = -4,6828$, > 0 , tehát a rendszer aszimptotikusan stabilis, így létezik az átírteli karakterisztika.

Ennek meghatározása MATLAB-ban:

$\gg [s2, nev] = ss2tf(A, B, C, D)$

$s2 = 1,64 \quad 5,49 \quad 0,2181$

$nev = 1 \quad 4,717 \quad 0,1603$

Tehát az átírteli karakterisztika:

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{U_1}{i_s} = \frac{1,64(j\omega)^2 + 5,49(j\omega) + 0,2181}{(j\omega)^2 + 4,717j\omega + 0,1603}$$

1.4 A válan Fourier polinomia

$$i(t) = 1,25 \cdot 0,795 \sin \omega_0 t + 0,397 \sin 2\omega_0 t + 0,2652 \sin 3\omega_0 t + 0,199 \sin 4\omega_0 t \text{ [mA]}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,42} = 14,96 \text{ krad/s}$$

$$\omega = 0$$

$$1,25 \cdot H(j\omega) = 1,25 \cdot \frac{0+0+0,2181}{0+0+0,1603} = 1,7 \text{ V}$$

$$\omega = \omega_0 = 14,96 \text{ krad/s}$$

$$0,795 \cdot H(j\omega) = 0,795 \cdot \frac{1,64j^2 \cdot 14,96^2 + 5,49j \cdot 14,96 + 0,2181}{j^2 \cdot 14,96^2 + 4,717j + 0,1603} = 1,274 \cdot e^{j4,89^\circ}$$

$$\omega = 2\omega_0 = 29,92 \text{ krad/s}$$

$$0,397 \cdot H(j\omega) = 0,397 \cdot \frac{1,64j^2 \cdot 29,92^2 + 5,49j \cdot 29,92 + 0,2181}{j^2 \cdot 29,92^2 + 4,717j + 0,1603} = 0,647 \cdot e^{j2,57^\circ}$$

$$\omega = 3\omega_0 = 44,88 \text{ krad/s}$$

$$0,2652 \cdot H(j\omega) = 0,2652 \cdot \frac{1,64j^2 \cdot 44,88^2 + 5,49j \cdot 44,88 + 0,2181}{j^2 \cdot 44,88^2 + 4,717j + 0,1603} = 0,433 \cdot e^{j1,73^\circ}$$

$$\omega = 4\omega_0 = 59,84 \text{ krad/s}$$

$$0,199 \cdot H(j\omega) = 0,199 \cdot \frac{1,64j^2 \cdot 59,84^2 + 5,49j \cdot 59,84 + 0,2181}{j^2 \cdot 59,84^2 + 4,717j + 0,1603} = 0,325 \cdot e^{j1,3^\circ}$$

A válanak tehát:

$$u_i(t) = 1,7 + 1,274 \cos(\omega_0 t + 4,89^\circ) + 0,647 \cdot \cos(2\omega_0 t + 2,57^\circ) + 0,433 \cos(3\omega_0 t + 1,73^\circ) + 0,325 \cdot \cos(4\omega_0 t + 1,3^\circ) \text{ [V]}$$

A válan effektív értéke:

$$U_{i,eff} = \sqrt{1,7^2 + \left(\frac{1,274}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,647}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,433}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,325}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2,014 \text{ V}$$

2. feladat

$$2.1 \quad i(t) = (I_0 - I_0 \frac{t}{T}) \cdot (\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t-T))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{i(t)\} &= \int_0^T i(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T (I_0 - I_0 \frac{t}{T}) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T I_0 e^{-j\omega t} dt - \int_0^T I_0 \frac{t}{T} e^{-j\omega t} dt \\ &= I_0 \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T - \frac{I_0}{T} \int_0^T t e^{-j\omega t} dt = I_0 \left[\frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} \right] - \frac{I_0}{T} \left[\left[t \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} dt \right] \\ &= I_0 \left[\frac{-1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \right] - \frac{I_0}{T} \left[\left[T \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} \right] + \frac{1}{j\omega} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} \right] \right] = \\ &= I_0 \cdot \frac{-1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{I_0}{T} \left[T \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega T} - 1}{j\omega^2} \right] = \\ &= I_0 \cdot \frac{-1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} - I_0 \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega T} - 1}{j\omega^2} = I_0 \cdot \left[-\frac{1}{j\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2 T} \right] \end{aligned}$$

$$I_0 = 2,5 \text{ mA}$$

$$T = 0,42 \text{ ms}$$

$$\underline{\underline{I(j\omega) = -\frac{2,5}{j\omega} - \frac{2,5 - 2,5 e^{-j\omega \cdot 0,42}}{j\omega^2 \cdot 0,42}}}$$

2.3. A rólán komplex spektruma

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot i(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{2,5j\omega T - 2,5 + 2,5e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2 T} \cdot \frac{1,64(j\omega)^2 + 5,49(j\omega) + 0,2181}{(j\omega)^2 + 4,717j\omega + 0,1603}$$

$$= \frac{+2,5j\omega T \cdot (1,64(j\omega)^2 + 5,49(j\omega) + 0,2181) - 2,5(1,64(j\omega)^2 + 5,49j\omega + 0,2181)}{(j\omega)^2 T \cdot (j\omega^2 + 4,717j\omega + 0,1603)} +$$

$$+ \frac{2,5e^{-j\omega T} (1,64(j\omega)^2 + 5,49j\omega + 0,2181)}{(j\omega)^2 T \cdot (j\omega^2 + 4,717j\omega + 0,1603)} =$$

$$= \frac{+2,5(1,64(j\omega)^2 + 5,49(j\omega) + 0,2181)}{(j\omega^2 + 4,717j\omega + 0,1603) \cdot (j\omega)} - \frac{4,1(j\omega)^2 + 13,725(j\omega) + 0,5452}{T \cdot (j\omega)^2 (j\omega^2 + 4,717j\omega + 0,1603)}$$

$$+ \frac{(4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452)e^{-j\omega T}}{T \cdot (j\omega)^2 (j\omega^2 + 4,717j\omega + 0,1603)}$$

$$= \frac{+4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452}{(j\omega)^3 + 4,717(j\omega)^2 + 0,1603j\omega} - \frac{4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452}{T \cdot (j\omega)^4 + T(j\omega)^3 4,717 + T(j\omega)^2 0,1603}$$

$$+ \frac{(4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452) \cdot e^{-j\omega T}}{T(j\omega)^4 + 4,717 T(j\omega)^3 + 0,1603 \cdot T j\omega^2} =$$

$$= \frac{+4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452}{1 \cdot e^{-j\omega T}} \cdot \left[\frac{1}{(j\omega)^3 + 4,717(j\omega)^2 + 0,1603j\omega} - \frac{1}{T((j\omega)^4 + (j\omega)^3 4,717 + (j\omega)^2 0,1603)} \right] + \frac{1 \cdot e^{-j\omega T}}{T \cdot (j\omega)^4 + 4,717 T(j\omega)^3 + 0,1603 T(j\omega)^2}$$

$$Y(j\omega) = \frac{4,1(j\omega)^2 + 13,725j\omega + 0,5452}{1 \cdot e^{-j\omega T}} \cdot \left[\frac{1}{(j\omega)^3 + 4,717(j\omega)^2 + 0,1603j\omega} - \frac{1}{T} \cdot \frac{1 + e^{-j\omega T}}{(j\omega)^4 + 4,717(j\omega)^3 + 0,1603(j\omega)^2} \right]$$

3. feladat

3.1 Átírteli függvény:

Mivel a rendszer kauszális, ezért az átírteli karakterisztikából adódik az átírteli függvény, $j\omega = s$ helyettesítéssel.

$$H(s) = \frac{1,64s^2 + 5,49s + 0,2181}{s^2 + 4,717s + 0,1603}$$

Pólusok: ahol az átírteli függvény értéke ∞ , tehát a nevező 0.

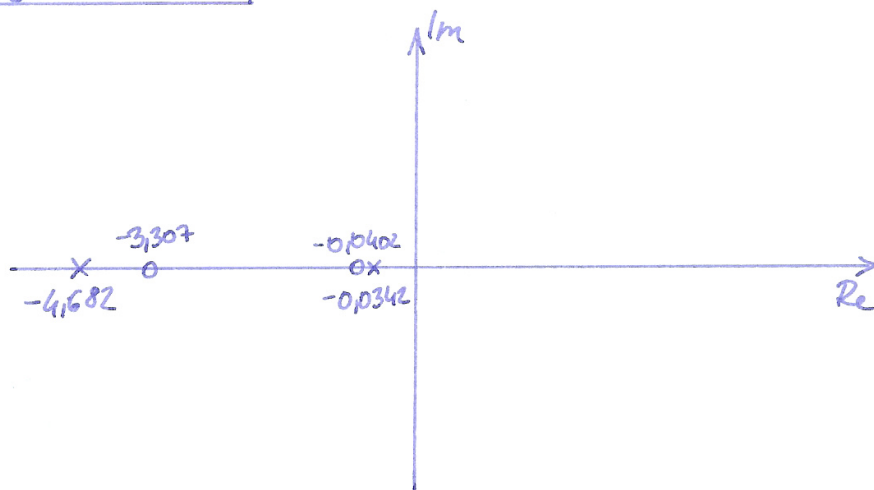
$$s^2 + 4,717s + 0,1603 = 0$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -0,0342 \\ p_2 &= -4,682 \end{aligned}$$

Zérusok: ahol az átírteli függvény értéke 0, tehát a számláló 0

$$1,64s^2 + 5,49s + 0,2181 = 0$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -0,0402 \\ z_2 &= -3,307 \end{aligned}$$



3.2 Az impulzusválat az átviteli függvény inverz Laplace transzformálásával kaphatjuk meg.

A Maple programmal parciális törtékre bontottam az átviteli függvényt.

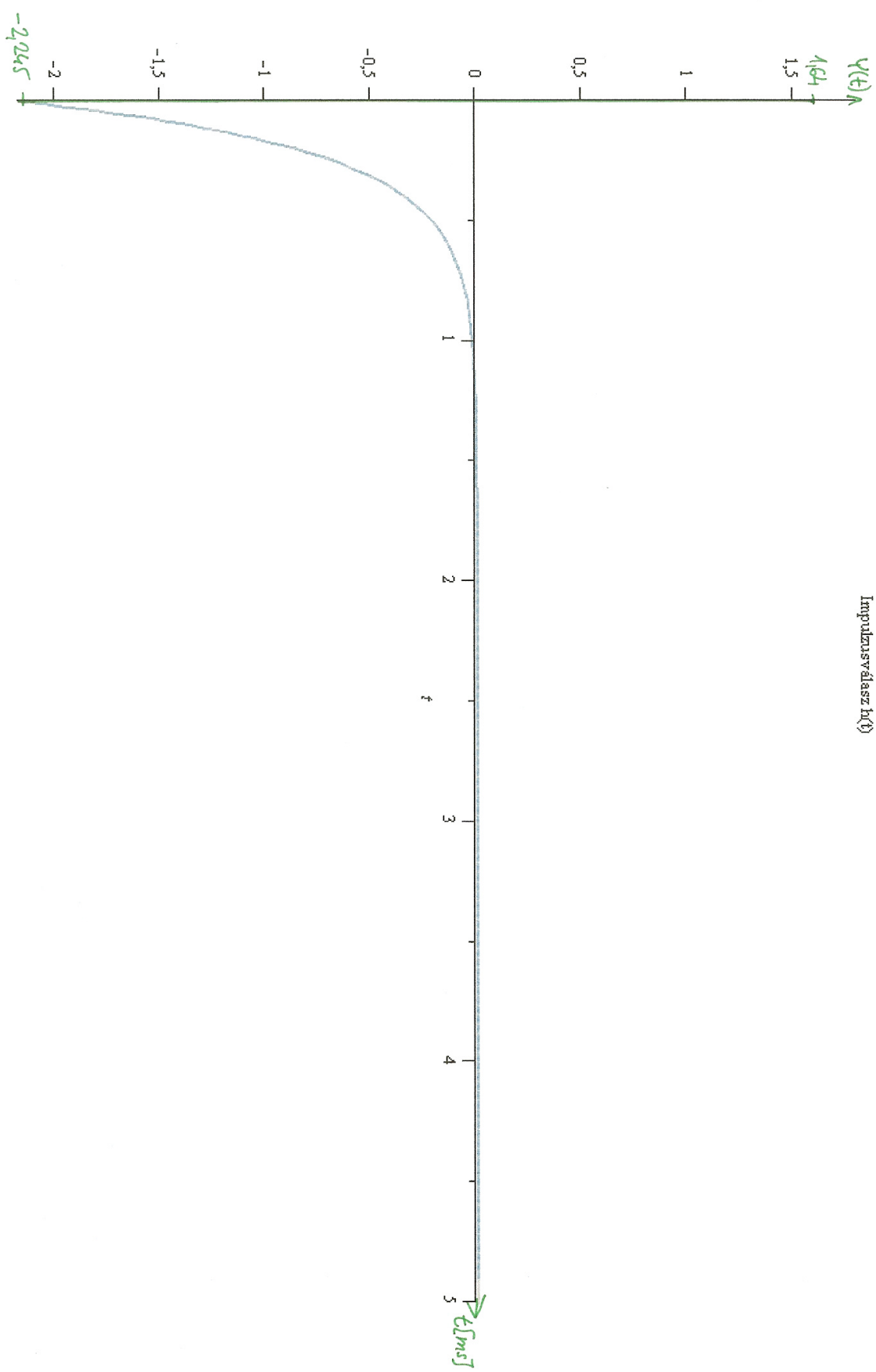
$$H(s) = \frac{1,64s^2 + 5,49s + 0,218}{s^2 + 4,717s + 0,1603} = 1,64 + \frac{0,006902}{s + 0,03423} - \frac{2,25278}{s + 4,6827}$$

Igy $\frac{C}{s+\alpha} - \frac{C}{s+\beta}$ alakba került, aminek inverzje az inverz Laplace transzformáltja, mert $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s+\alpha}$.

A konstans inverz Laplace transzformáltja pedig a $\delta(t)$, mivel $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Igy az impulzusválat:

$$\underline{\underline{h(t) = 1,64 \delta(t) + 0,0069 \cdot e^{-0,0342t} - 2,252 \cdot e^{-4,682t}}}$$

Impulzusválasz $h(t)$ 

3.3 A rendszer válaszára meghatározása

$$Y(s) = H(s) \cdot i(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3 + Ds + E} \cdot \frac{+10sT - 10 + 10e^{-sT}}{s^2T}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{+10sT(As^2 + Bs + C)}{s^3T(s^3 + Ds + E)}}_{\text{I.}} - \underbrace{\frac{10(As^2 + Bs + C)}{s^2T(s^3 + Ds + E)}}_{\text{II.}} + \underbrace{\frac{10(As^2 + Bs + C)}{s^2T(s^3 + Ds + E)}}_{\text{III.}} \cdot e^{-sT}$$

Parcális törtre bontás külön:

$$\textcircled{\text{I.}} \frac{+2,5(1,64s^2 + 5,49s + 0,218)}{s^3 + 4,67s^2 + 0,218} = +\frac{1,198}{s + 4,67} + \frac{0,401}{s + 0,046} + \frac{2,5}{s}$$

$$\textcircled{\text{II.}} \frac{-2,5(1,64s^2 + 5,49s + 0,218)}{0,42 \cdot (s^3 + 4,67s^2 + 0,218s)} = +\frac{0,61}{s + 4,67} + \frac{20,48}{s + 0,046} - \frac{21,09}{s} - \frac{5,95}{s^2}$$

$\textcircled{\text{III.}}$ Meggyújt a $\textcircled{\text{II.}}$ -al, de T-vel el lenni a időben. ($T = 0,42$)

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I+II.}} \\ Y(s) &= +\frac{1,198}{s + 4,67} + \frac{0,401}{s + 0,046} + \frac{2,5}{s} + \frac{0,61}{s + 4,67} + \frac{20,48}{s + 0,046} - \frac{21,09}{s} - \frac{5,95}{s^2} = \\ &= +\frac{1,808}{s + 4,67} + \frac{20,881}{s + 0,046} - \frac{18,59}{s} - \frac{5,95}{s^2} \end{aligned}$$

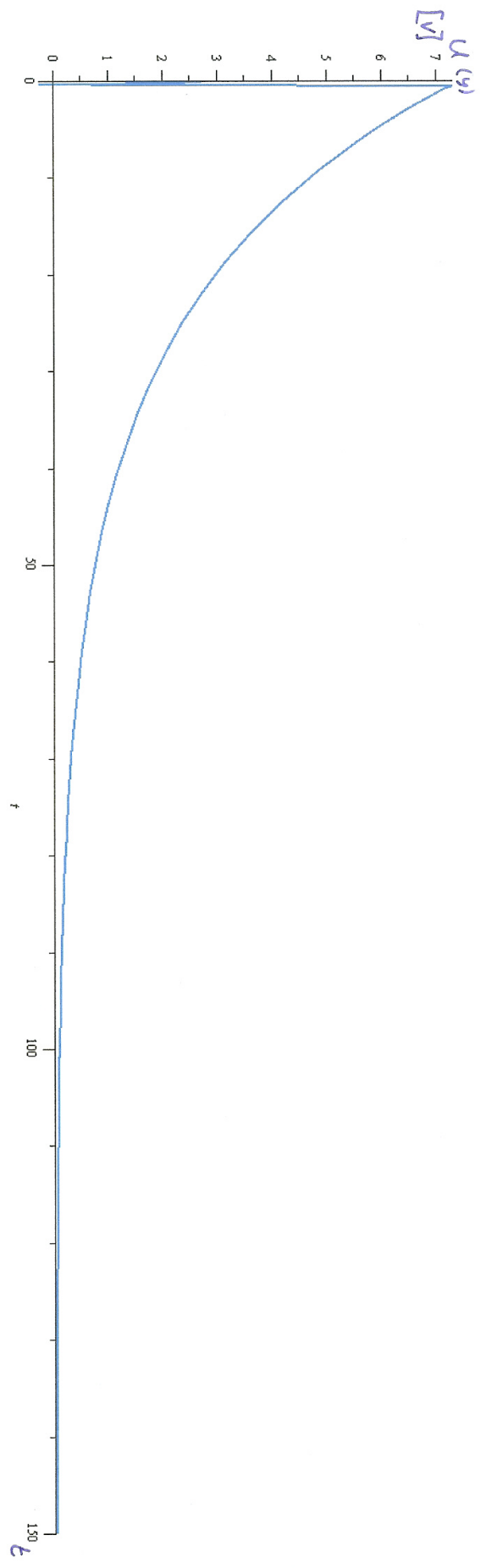
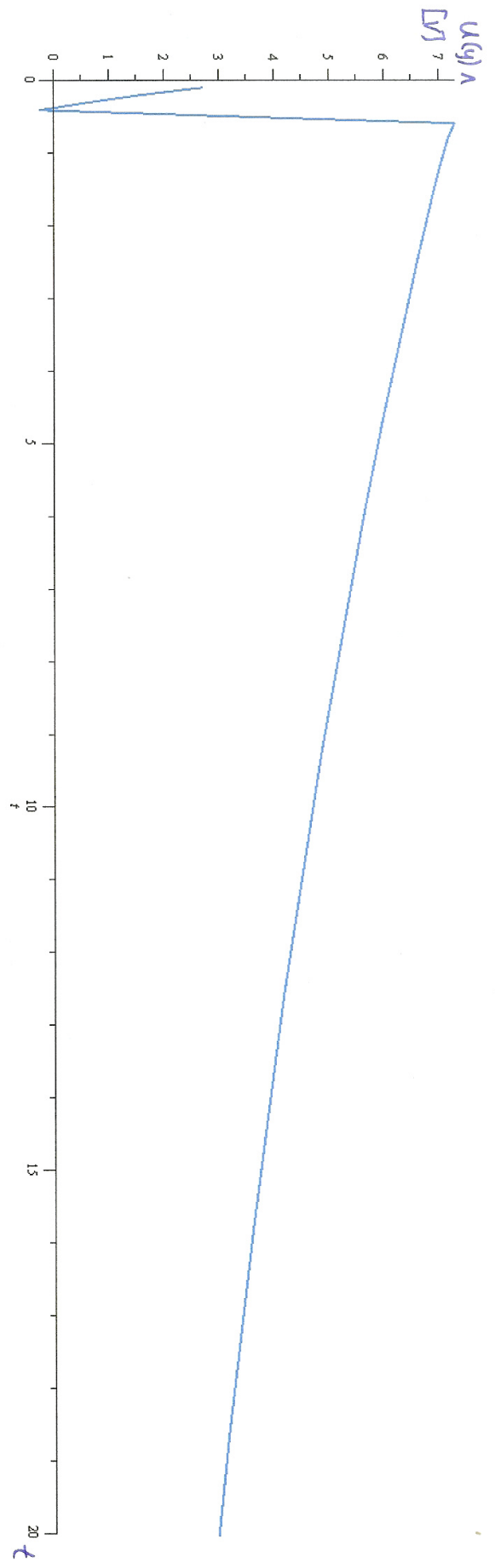
$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}^{\text{I+II}} = \left(+1,808 \cdot e^{-4,67t} + 20,881 \cdot e^{-0,046t} - 18,59E(t) - 5,95t \cdot E(t) \right) \cdot E(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}^{\text{III}} = \left(-0,61 \cdot e^{-4,67t - 0,42} + 20,48 \cdot e^{-0,046t - 0,42} + 21,09E(t - 0,42) + 5,95t \cdot E(t - 0,42) \right) E(t - 0,42)$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}^{\text{I+II}} + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}^{\text{III}} = \left[+1,808 \cdot e^{-4,67t} + 20,881 \cdot e^{-0,046t} - 18,59E(t) - 5,95t \cdot E(t) \right] \cdot$$

$$\cdot E(t) + \left[-0,61 \cdot e^{-4,67t - 0,42} - 20,48e^{-0,046t - 0,42} + 21,09E(t - 0,42) + 5,95(t - 0,42) \cdot E(t - 0,42) \right] \cdot E(t - 0,42).$$

$\cdot E(t + 0,42)$



11