121. Mik a kovariancia tulajdonságai?

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$, vagyis kommutatív
2) $\operatorname{cov}(X,X) = \sigma^2(X)$
3) $\operatorname{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \operatorname{cov}(X,Z) + \beta \operatorname{cov}(Y,Z)$
4) $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \pm 2 \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$

122. Mi a feltételes eloszlásfüggvény definíciója?

A $\mathbf{P}(X = x \mid Y = y) = F_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$ kétváltozós függvényt az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénynek nevezzük.

123. Mi a feltételes sűrűségfüggvény definíciója?

A feltételes eloszlásfüggvény x-szerinti parciális derivált-függvényét az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényének nevezzük:

$$f_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x}}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

124. Mi a lineáris regresszió képlete?

X és Y valószínűségi változók lineáris regresszióján azt az $a^*Y + b^*$ valószínűségi változót értjük, amire $\mathbf{E}\big(X - (a^*Y + b^*)\big)^2$ minimális értékű.

$$a^* = \mathbf{R}(X,Y) \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}, \qquad b^* = \mathbf{E}(Y) - \mathbf{R}(X,Y) \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot \mathbf{E}(X)$$

125. Mi a feltételes várható érték definíciója diszkrét esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ valószínűségi változót értjük, melynek eloszlása: $\mathbf{P}(\mathbf{E}(X \mid Y) = i) = \sum_{\forall k: i = \mathbf{E}\{X_k\}} \mathbf{P}(Y = y_k)$.

126. Mi a feltételes várható érték definíciója folytonos esetben?

Az X-nek az Y-ra vett feltételes várható értékén az $\mathbf{E}(X \mid Y) = r(Y)$ valószínűségi változót értjük, ahol:

$$r(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_{X|Y}(u \mid v)\, du = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u\, f_{X,Y}(u,v)\, du}{f_Y(v)}$$

127. Mik a korrelációs együttható tulajdonságai?

1) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{R}(X,Y) = 0$
2) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, akkor $-1 \le \mathbf{R}(X,Y) \le 1$
3) Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$

128. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ és $\mathbf{R}(X,Y) = 0$.

129. Mikor korrelálatlan két valószínűségi változó?

Az X és Y valószínűségi változók korrelálatlanok, ha:
$\mathrm{R}(X,Y) = cov(X,Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) = 0$.

130. Mik a feltételes várható érték tulajdonságai?

4) $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid Y)\big) = \mathbf{E}X$
5) $\mathbf{E}(h(Y) \cdot X \mid Y) = h(Y) \cdot \mathbf{E}(X \mid Y)$
6) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X$

131. Ha X, Y együttes eloszlása normális, akkor mi az X-nek az Y-ra vett regressziós összefüggése?

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)\, dx = \mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \varrho \cdot (y - \mu_2)$$

132. Mi a kapcsolat a függetlenség és a korrelálatlanság között kétdimenziós normális esetben?

Ha X és Y együttes eloszlása normális, akkor X és Y akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

133. Mik a kovariancia-mátrix tulajdonságai?

$\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$ és $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^p$-re $\underline{a}^T \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{a} \ge 0$.

134. Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) =$?

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X$.

135. Ha $X = \alpha Y + \beta$, akkor $R(X,Y) = $?

Ha X és Y szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$

136. Mi a kritériuma annak, hogy egy valószínűségi változó szórása 0 legyen?

A valószínűségi változó legyen konstans.

137. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke 1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen (egyenes arányosság).

138. Mi a kritériuma annak, hogy a korrelációs együttható értéke –1 legyen?

A két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat legyen, de ellentétes (fordított arányosság).

139. Mondjon példát olyan valószínűségi változókra, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek!

140. Milyen eloszlásnál lesz a regresszió lineáris?

Normális eloszlás esetén.

$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = aY + b$, ahol $a = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f$ és $b = \mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f \mu_2$

141. Adja meg az Y -nak az X-re vonatkozó lineáris regresszió képletét, amikor X és Y függetlenek!

142. Mondjon példát Markov-láncra!

$X_1, X_2, \dots, X_n \in S$ állapottér esetén, ha $\forall n \geq 1$-re:

$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$, akkor a valószínűségi változó-sorozat Markov-lánc.

143. Mivel egyenlő $\mathbf{cov}(X - Y,\ X + Y)$?

$\mathrm{cov}(X + Y, X - Y) = \mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(Y, X) - \mathrm{cov}(X, Y) - \mathrm{cov}(Y, Y)$

$= \mathrm{cov}(X, X) - \mathrm{cov}(Y, Y) =$

$= \sigma^2(X) - \sigma^2(Y)$

144. Mivel egyenlő $\mathbf{cov}(X, X)$?

$\sigma^2(X)$

145. Mondja ki a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak ($\mathbf{E}(X_i) = p$). Ekkor: $r_n(A) \xrightarrow{st} \mathbf{P}(A)$, vagyis:

$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|r_n(A) - \mathbf{P}(A)| > \epsilon) = 0, \qquad \forall \epsilon > 0$

146. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetük.

Legyen $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$Ekkor: $Z_n \xrightarrow{st} \mu$, vagyis:

$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Z_n - \mu| > \epsilon) = 0, \qquad \forall \epsilon > 0$

147. Mondja ki a nagy számok törvényének Kolmogorov-féle alakját!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetükre: $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2(X_i) \cdot \frac{1}{i^2} < \infty$.

Legyen $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, amire: $Z_n \xrightarrow{1v} \mu$, vagyis:

$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = \mu\right) = 1$

148. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!

Legyenek X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = p$) és közös szórásnégyzetük $\big(p(1 - p)\big)$.

Legyen $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Ekkor: $Z_n \xrightarrow{e} Z$, ahol $Z \in N(0,1)$, vagyis:

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \qquad n \longrightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$$

149. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!

Legyenek X_i valószínűségi változók páronként függetlenek és azonos eloszlásúak. Létezik közös várható értékük ($\mathbf{E}(X_i) = \mu$) és közös szórásnégyzetük.

Legyen $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. Ekkor: $Z_n \xrightarrow{e} Z$, ahol $Z \in N(0,1)$, vagyis:

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \qquad n \longrightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$$

150. Adja meg a karakterisztikus függvény fogalmát!

Adott X valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor X karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\, dF_X(x), \qquad \varphi_X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$