

- (20p) 1. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$  szerint periodikus, páratlan függvény;  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ , ha  $0 < x \leq \pi$ ;  $f(0) = 0$ .
- (a) Határozza meg  $f$  trigonometrikus Fourier-sorát ! Előállítja-e a sor a függvényt ?
  - (b) Egyenletes-e a sor konvergenciája ?
  - (c) Mekkora az együtthatók négyzetösszege ?
- (20p) 2. (a) Létezik-e a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^4)}$  határérték ?
- (b) Legyen  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$ , ha  $x \neq 0$  vagy  $y \neq 0$ , és  $f(0, 0) = 0$ . Legyen  $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Számítsa ki  $f$   $\mathbf{e}$  irány menti deriváltját a  $(0, 0)$  pontban !
- (c) Differenciálható-e az  $f$  függvény a  $(0, 0)$  pontban ?
- (10p) 3.  $u = \left( \sum_{k=1}^4 x_k^2 \right)^{-1}$ ,  $\sum_{k=1}^4 x_k^2 > 0$ . Számítsa ki a  $\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$  kifejezést !
- (10p) 4. Határozza meg az  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$  egyenletű ellipszoidnak az  $x + 4y + 9z = 0$  egyenletű síkkal párhuzamos érintősíkjait !
- (10p) 5. Legyen  $K$  egy pozitív szám,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény,  $|f'(\mathbf{x})| \leq K$ . Bizonyítsa be, hogy  $\mathbf{t}$  és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  esetén  $|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| \leq K |\mathbf{t} - \mathbf{x}|$  és  $f$  egyenletesen folytonos !
- (10p) 6. Három nemnegatív szám összege 3. Legalább mekkora a négyzetösszegük ?

70-80 pont = jeles  
60-69 pont = jó  
50-59 pont = közepes  
40-49 pont = elégséges