1. Zárthelyi megoldásokkal

2000 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok?

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^3}\,dx$

MO. a) Igen: $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{x=0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ és $\exists \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) Nem: $\frac{\sin x^2}{x^3} \underset{x=0}{\sim} \frac{1}{x}$ és $\nexists \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

MO. a) Nem. $a_n \not\to 0$: $a_n^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow 1/e \rightsquigarrow a_n^n \geq 1/3$ nagy n–ekre $\rightsquigarrow a_n \geq \sqrt[n]{1/3} \longrightarrow 1$

b) Igen. Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1/e < 1$

---

3. Konvergens ill. abszolút konvergens–e a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$ sor?

MO. Leibniz–kritériummal konvergens: $a_n \mathrel{\hat{=}} \frac{\ln n}{n} \rightsquigarrow a_n \searrow 0$ nagy n–ekre , hiszen $\ln x \lhd x$ és $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ ha $x \geq e$. Minoráns kritériummal nem abszolút konvergens: $a_n \geq 1/n$ (ha $n \geq 3$).

---

4. Konvergens–e a következő numerikus sor? $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} \pm \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \pm \ldots$

MO. Divergens mert egy bezárójelezése az: $\nexists \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$ hisz $\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

---

5. Létezik–e a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

MO. Igen. Polárhelyettesítéssel: $\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+r)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 1$

---

6. Hol folytonosak az alábbi függvények?

a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$. b) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$.

MO. Mindkettő az origó kivételével mindenütt, mert a koordináta–függvények folytonosak és ezekből alapműveletekkel vannak összerakva, melyek megőrzik a folytonosságot. Továbbá

a) nem folytonos az origóban, mert $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 1 \neq 0 \xleftarrow[0\longleftarrow x]{} 0 = \frac{0}{x^2+0} = f(x,0)$

b) folytonos az origóban is, mert $|f(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0.$
