4. Analízis a komplex frekvenciatartományban

Mint az előző részben láttuk: a jeleknek és a lineáris, invariáns rendszereknek a frekvenciatartományban történő leírásának és analízisének sok előnye van az időtartománybeli leíráshoz képest. Így például egy lineáris, invariáns rendszer válaszát az időtartománybeli konvolúció helyett a frekvenciatartományban szorzással állíthatjuk elő.

A frekvenciatartománybeli leírásnak természetesen hátrányai is vannak. Ezek egyike az, hogy – nagyon egyszerű esetektől eltekintve – a válasz időfüggvényének meghatározása numerikus eljárást igényel, ezért általános következtetések levonása gyakran nehéz. Egy további nehézséget jelenthet nem stabilis rendszerek és nem abszolút összegezhető DI gerjesztések illetve nem abszolút integrálható FI gerjesztések kezelése.

A rendszer jellemzése az időtartományban impulzusválaszával különösen akkor szemléletes, ha a rendszer első- vagy másodrendű. A rendszer jellemzése a frekvenciatartományban átviteli karakterisztikájával (lineáris vagy logaritmikus amplitúdó-karakterisztikájával és fázis-karakterisztikájával) szemléletes, de alkalmazása gyakorlatot igényel. Sok esetben a két leírásmód közül csak az egyik használható, de néha az időtartománybeli és a frekvenciatartománybeli leírás egyaránt nehezen kezelhető.

A vázolt nehézségek indokolttá teszik egy harmadik leírásmód bevezetését is, amelyet ebben a részben tárgyalunk. Ez a komplex frekvenciatartománybeli analízis (matematikailag a folytonos idejű illetve a diszkrét idejű Laplace-transzformáció alkalmazása). Amint látni fogjuk ez egy kényelmes és tömör leírásmód, alkalmazása nem igényel mély matematikai ismerteket. A rendszeranalízis a komplex frekvenciatartományban különösen egyszerű a gyakran előforduló bekapcsolási folyamatok esetén. Ez a leírásmód megkönnyíti bizonyos realizációs feladatok megoldását is.

Ezeknek az előnyöknek azonban az az ára, hogy a módszer fizikailag nehezen értelmezhető, a komplex frekvenciatartománybeli leírások közvetlenül nem mérhetők.

A háromféle leírásmód (időtartomány, frekvenciatartomány, komplex frekvenciatartomány) nem helyettesíti, hanem kiegészíti egymást. Az időtartománybeli leírás tekinthető a legáltalánosabbnak. Mint láttuk: az állapotváltozós leírás és a hálózati reprezentáció egyszerűen általánosítható nemlineáris és variáns rendszerekre. Mivel ez az általánosítás a frekvenciatartománybeli és a komplex frekvenciatartománybeli leírással csak nagyon korlátozottan tehető meg, ezért azzal nem is foglakozunk.

A 4.1. fejezetben a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű jelek komplex frekvenciatartománybeli leírását tárgyaljuk, ami a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű Laplace-transzformáció alkalmazását jelenti. Ez a leírás önmagában nem különösen hasznos, mivel a jelek komplex frekvenciatartománybeli alakjához nehéz fizikai tartalmat kapcsolni, de ez teszi lehetővé a rendszeranalízist a komplex frekvenciatartományban, továbbá lehetőséget ad a hálózati realizációknak a megismertnél rugalmasabb előállítására.

A 4.2. fejezetben először a lineáris, invariáns, kauzális rendszer komplex frekvenciatartománybeli leírását ismertetjük, majd a rendszernek az adott gerjesztéshez tartozó válaszának számítását.

A 4.3. fejezetben a jelfolyam hálózatok komplex frekvenciatartománybeli analízisét tárgyaljuk, továbbá módszereket mutatunk az adott átviteli függvényhez tartozó jelfolyam hálózatok meghatározására.

A 4.4. fejezetben bemutatjuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek és rendszerek két kapcsolatát: először a FI rendszerek DI szimulációjának néhány módszerét, azután a mintavételezett jelek leírásának módjait. Ebben a fejezetben felhasználjuk az időtartománybeli, frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli leírást. Az alapvető gondolatok és egyes eljárások nem kapcsolódnak a komplex frekvenciatartományhoz, azokat a korábbi részekben is tárgyalhattuk volna.

4.1. Jelek leírása a komplex frekvenciatartományban

Jelek széles osztálya egyszerűen leírható a komplex frekvenciatartományban. Ennek a leírásmódnak azonban az a hátránya, hogy nincs fizikai tartalma, ezért közvetlenül nem mérhető.

E fejezet 4.1-1. szakaszában bemutatjuk a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű jelek Laplace-transzformációjának legfontosabb szabályait.

A 4.1-2. szakaszban az inverz DI és FI Laplace-transzformáció technikáját tárgyaljuk. A transzformációk nagy előnye, hogy viszonylag enyhe feltételeknek eleget tevő jelekre is alkalmazhatók, a transzformáció formális alkalmazásához nincs szükség mély matematikai ismeretekre.

A továbbiakban a Laplace-transzformáció az ún. egyoldalas Laplace-transzformációt jelenti, amely nullának tekinti a $k = 0$ illetve $t = 0$ időpont előtt fellépő jelértékeket. Ez úgy is megfogalmazható, hogy az (egyoldalas) Laplace-transzformáció minden jelet belépőnek tekint. A gyakorlati esetek jelentékeny részében belépő jeleket és kauzális rendszereket vizsgálunk, ezért az egyoldalas Laplace-transzformáció alkalmazása nem jelent lényeges megszorítást.

Az irodalomban a diszkrét idejű Laplace-transzformáció (illetve az inverz DI Laplace-transzformáció) elterjedt neve z-transzformáció (illetve inverz z-transzformáció). Az egységes tárgyalásmód érdekében ezt az elnevezést nem fogjuk használni.

4.1-1. A DI és a FI Laplace-transzformáció

4.1-1.1. A transzformációk definíciója

A DI és a FI jel Laplace-transzformáltját formálisan fogjuk definiálni, mivel szemléletesen nehezen értelmezhetők.

A Laplace-transzformált kapcsolatát a Fourier-transzformálttal a 4.1-1.5. pontban tárgyaljuk. Ez lehetővé teszi bizonyos feltételek mellett a jel Laplace-transzformáltjának szemléltetését is.

Egy $x[k]$ diszkrét idejű jel $X(z) = \mathscr{L}\{x[k]\}$ DI *Laplace-transzformáltjának* (más néven z-transzformáltjának) illetve egy $x(t)$ folytonos idejű jel $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ FI *Laplace-transzformáltjának* definíciója

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:}\quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} \equiv x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots ; \\ &\text{FI:}\quad X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t . \end{aligned}} \qquad (4.1\text{-}1)$$

Az x jel komplex értékű is lehet. A z vagy az s változó neve a mérnöki gyakorlatban *komplex frekvencia*. Matematikailag ezek komplex értékű változók.

A z változó dimenzió nélküli mennyiség, néha radián (rad) mértékegységben adják meg, mint a DI körfrekvenciát. Az s változó dimenziója reciprok idő, rendszerint radián per másodperc (rad/s) mértékegységben adják meg, mint a FI körfrekvenciát.

A FI Laplace-transzformációban szereplő -0 alsó határ arra utal, hogy ha a jel tartalmaz $\delta(t)$ Dirac-impulzus összetevőt, akkor azt figyelembe kell venni az integrál számítása során.

A transzformációk figyelmen kívül hagyják a jeleknek a $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve a $t \in \mathbf{R}_-$ intervallumban felvett értékeit. Ebből következik, hogy ha $x_1[k]=x_2[k], k \in \mathbf{N}$ illetve ha $x_1(t)=x_2(t), t \in \mathbf{R}_+$, akkor $X_1(z)=X_2(z)$ illetve $X_1(s)=X_2(s)$. Annak érdekében, hogy a $\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}$ illetve az $\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ inverz transzformáltat egyértelművé tegyük, azt *belépő jelnek* tekintjük, azaz a

$$\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=0,\ k \in \mathbf{Z}_-; \qquad \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=0,\ t \in \mathbf{R}_- \tag{4.1-2}$$

választással élünk. Az alkalmazások során $x[k]$ illetve $x(t)$ többnyire valóban belépő jel.

Szorítkozzunk olyan jelekre, amelyekre a $k=0$ helyen $x[0]$ véges illetve a $t=0$ helyen $x(t)$ vagy véges vagy legfeljebb $\delta(t)$ Dirac-impulzusként válik végtelenné. Ekkor az (1) definícióból következik, hogy $z^{-1} \to 0$ (vagyis $z \to \infty$) esetén $X(z) \to x[0]$ illetve $s \to \infty$ esetén $\mathscr{R}e\{s\}>0$ mellett $e^{-st} \to 0$, tehát $X(s) \to 1$. Ebből az következik, hogy az említett enyhe feltételek mellett

$$\lim_{z\to\infty} X(z)<\infty; \qquad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathscr{R}e\{s\}>0}} X(s)<\infty. \tag{4.1-3}$$

Speciálisan, ha $X(z)$ vagy $X(s)$ *racionális* függvénye változójának (ez DI esetben szinte mindig, a FI esetben pedig gyakran teljesül), akkor számlálójának fokszáma nem lehet nagyobb nevezőjének fokszámánál. Azok a jelek, amelyek nem tesznek eleget a feltételnek (például k^{-1}, t^{-2}, a Dirac-impulzus deriváltja) a gyakorlatban ritkán fordulnak elő, ezért további vizsgálatainkból kirekesztjük őket.

A DI Laplace-transzformáció (1) definíciójából látható, hogy $X(z)$ a z^{-1} változó hatványsora. A konkrét alakban vagy z vagy z^{-1} szerepel, sőt vegyes alkalmazás is előfordul. Ez a többféleség a FI Laplace-transzformáció során ritkán fordul elő.

A következő szakaszban részletesen foglalkozunk az inverz Laplace-transzformáció technikájával. A teljesség kedvéért megadjuk a Laplace-transzformáció *inverziós integrálját,* amelyet azonban a tényleges számítás során nem fogunk alkalmazni (részletesebben l. a 4.1-1.5. pontot)

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=r_1} X(z) z^{k-1} \mathrm{d}z, \quad k \in \mathbf{Z}; \\ \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma_1-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_1+\mathrm{j}\infty} X(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{4.1-4}$$

Az r_1 sugarat illetve a σ_1 abszcisszát olyan nagynak kell választani, hogy az $X(z)$ minden szingularitása az $|z|=r_1$ sugarú körön belül, az $X(s)$ minden szingularitása a $\mathscr{R}e\{s\}=\sigma_1$ abszcisszától balra helyezkedjék el. Ezek az integrálok egy olyan jelet eredményeznek,

amelynek DI illetve FI Laplace-transzformáltja az adott $X(z)$ illetve $X(s)$ és amely nulla a k illetve t negatív értékeire. Az integrálok a komplex függvénytan reziduum-tételének felhasználásával számíthatók. Akik nem érdekeltek a matematikai részletekben, azoknak elegendő annyit tudni, hogy létezik általános összefüggés a transzformáció megfordítására, amelynek tényleges alkalmazására a továbbiakban nem lesz szükség.

Megjegyezzük, hogy az $x_1(t), x_2(t)$ két jel Laplace-transzformáltja akkor is megegyezik, ha a két jel t pozitív értékeire csak bizonyos pontoktól eltekintve (például csak t nem-egész értékeire) egyezik meg. Ilyen jelek gyakorlati feladatok során nem fordulnak elő, ezért ennek nincs jelentősége az alkalmazások során.

4.1-1.2. Az impulzusok és az egységugrás transzformáltja

Az általános tételek ismertetése előtt határozzuk meg néhány fontos DI illetve FI jel Laplace-transzformáltját a definíció alapján.

A DI *egységimpulzus* ($\delta[0]=1, \delta[k]=0$ egyébként) DI Laplace-transzformáltja az (1) definícióból közvetlenül adódik:

$$\boxed{\mathscr{Z}\{\delta[k]\}=1. \qquad (4.1\text{-}5)}$$

Ugyancsak közvetlenül belátható, hogy a késleltetett, illetve a siettetett egységimpulzusra

$$\mathscr{Z}\{\delta[k-r]\}=z^{-r},\ r\in\mathbf{N}; \qquad \mathscr{Z}\{\delta[k-r]\}=0,\ r\in\mathbf{Z}_-. \qquad (4.1\text{-}6)$$

Ebből következik, hogy a *véges hosszúságú* belépő diszkrét idejű jel DI Laplace-transzformáltja a z^{-1} változó polinomja:

$$\begin{aligned} &x_L[k]=C_0\delta[k]+C_1\,\delta[k-1]+C_2\,\delta[k-2]+\ldots+C_L\,\delta[k-L] \quad\Rightarrow \\ &X_L(z)=C_0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\ldots+C_L\,z^{-L}. \end{aligned} \qquad (4.1\text{-}7)$$

Ez kifejezhető a z változó két polinomjának hányadosaként is:

$$X_L(z)=\frac{C_0\,z^L+C_1\,z^{L-1}+C_2\,z^{L-2}+\ldots+C_L}{z^L}. \qquad (4.1\text{-}8)$$

Egyes alkalmazásoknál ez az alak a hasznosabb.

A Dirac-impulzus FI Laplace-transzformáltja az (1) definíció értelmében

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=\int_{-0}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}=1.$$

Ezek szerint *Dirac-impulzus* FI Laplace-transzformáltja

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1. \qquad (4.1\text{-}9)}$$

Hasonló módon kapjuk, hogy a késleltetett, illetve a siettetett Dirac-impulzusra

$$\mathscr{L}\{\delta(t-T)\}=\mathrm{e}^{-sT},\ T\in\mathbf{R}_+; \qquad \mathscr{L}\{\delta(t-T)\}=0,\ T\in\mathbf{R}_-. \qquad (4.1\text{-}10)$$

Ennek alapján már nem jelent nehézséget a késleltetett Dirac-impulzusok sorozatából álló $x(t)=C_0\,\delta(t)+C_1\,\delta(t-T_1)+\ldots+C_n\,\delta(t-T_n),\ 0<T_1<\cdots<T_n$ jel FI

Laplace-transzformáltjának meghatározása sem. A (10)-ből látható, miért szükséges (3)-ban a $\mathcal{R}e\{s\}<0$ megkötés. Ha például s valós, negatív és $s \to \infty$, akkor e^{-sT} pozitív T esetén végtelenhez tart és nem nullához mint pozitív valós s esetén.

A DI illetve az FI egységugrás Laplace-transzformáltja az (1) definíció értelmében

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^{k}; \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}=\int_{-0}^{\infty}\varepsilon(t)\,e^{-st}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\,dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0}^{\infty}.$$

A mértani sor konvergens, ha $\left|z^{-1}\right|<1$, azaz ha $|z|>1$. Az e^{-st} nullához tart $t \to \infty$ esetén, ha $\mathcal{R}e\{s\}>0$. Ezek szerint

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\}=\frac{1}{1-z^{-1}}\equiv\frac{z}{z-1}, \quad |z|>1; \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s}, \quad \mathcal{R}e\{s\}>0. \tag{4.1-11}$$

A gyakorlatban elhagyjuk a z illetve az s változóra vonatkozó feltételt. Az eredményt a z illetve az s minden értékére (az egész z illetve s számsíkon) érvényesnek tekintjük a $z=1$ illetve az $s=0$ szinguláris pont kivételével (az analitikus folytatás elve, l. a 4.1-1.5. pontot is). Foglaljuk össze eredményeinket.

A DI illetve a FI *egységugrás* Laplace-transzformáltja

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\}=\frac{z}{z-1}; \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s}.} \tag{4.1-12}$$

A Laplace-transzformáció definíciójából következik, hogy a nem belépő $f[k]=1$ vagy $g[k]=2-\varepsilon[k]$ DI jel Laplace-transzformáltja megegyezik $\varepsilon[k]$ fenti Laplace-transzformáltjával. Az Olvasóra bízzuk néhány olyan nem belépő FI jelek megkonstruálását, amelyek Laplace-transzformáltja $1/s$, továbbá $\mathcal{Z}\{\operatorname{sgn} k\}$ és $\mathcal{L}\{\operatorname{sgn} t\}$ meghatározását.

4.1-1.3. A transzformációk néhány tétele

A következőkben megadjuk a DI és a FI Laplace-transzformáció számunkra fontos néhány tételét. A bizonyításokat elhagyjuk vagy csak vázoljuk, gyakran mellőzzük.

Linearitás

Mivel (1) és (4) értelmében mind a transzformációk, mind az inverzük lineáris művelet, ezért érvényes rájuk a szuperpozíció elve, amely szerint összegtartók és aránytartók, vagyis

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{C_1\,x_1[k]+C_2\,x_2[k]\}&=C_1\,\mathcal{Z}\{x_1[k]\}+C_2\,\mathcal{Z}\{x_2[k]\};\\ \mathcal{L}\{C_1\,x_1(t)+C_2\,x_2(t)\}&=C_1\,\mathcal{L}\{x_1(t)\}+C_2\,\mathcal{L}\{x_2(t)\}.\end{aligned} \tag{4.1-13}$$

Az inverz transzformációkra vonatkozóan

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\{C_1\,X_1(z)+C_2X_2(z)\}&=C_1\,\mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)\}+C_2\,\mathcal{Z}^{-1}\{X_2(z)\};\\ \mathcal{L}^{-1}\{C_1X_1(s)+C_2X_2(s)\}&=C_1\,\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}+C_2\,\mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}.\end{aligned} \tag{4.1-14}$$

Ezek az összefüggések véges számú tagra könnyen általánosíthatók, sőt (a gyakorlati esetek többségében teljesülő konvergencia-feltételek mellett) végtelen sok tagra is.

Csillapítási tétel

Ha $X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$ illetve $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$, akkor bármely komplex q illetve p esetén

$$\mathscr{Z}\left\{q^k x[k]\right\}=X\left(\frac{z}{q}\right); \qquad \mathscr{L}\left\{e^{pt}x(t)\right\}=X(s-p). \tag{4.1-15}$$

Ha q valós és $-1<q<1$ illetve ha p valós és $-\infty<p<0$, akkor az x jel szorzófüggvénye az időtartományban exponenciális csillapítást jelent – ez indokolja a csillapítási tétel elnevezést. Az igazolás egyszerű, nem részletezzük.

A tétel alkalmazásaként a (12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]\}=\frac{z}{z-1} \Rightarrow \mathscr{Z}\left\{q^k\varepsilon[k]\right\}=\frac{z/q}{(z/q)-1}; \quad \mathscr{L}\{\varepsilon(t)\}=\frac{1}{s} \Rightarrow \mathscr{L}\left\{e^{pt}\varepsilon(t)\right\}=\frac{1}{s-p}.$$

Gyakori előfordulása miatt érdemes megjegyezni, hogy

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]q^k\right\}=\frac{z}{z-q}; \qquad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)e^{pt}\right\}=\frac{1}{s-p}. \tag{4.1-16}$$

A $q=1$ vagy a $p=0$ speciális eset a (12)-re vezet.

1. példa Legyen (16)-ban $q=e^{j\Theta}$ és $q=e^{-j\Theta}$. Ekkor

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]e^{j\Theta k}\right\}=\frac{z}{z-e^{j\Theta}}; \quad \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]e^{-j\Theta k}\right\}=\frac{z}{z-e^{-j\Theta}}.$$

Az Euler-reláció felhasználásával összeadás illetve kivonás után kapjuk, hogy

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\cos\Theta k\right\}=\frac{z^2-(\cos\Theta)z}{z^2-2(\cos\Theta)z+1}, \quad \mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\sin\Theta k\right\}=\frac{(\sin\Theta)z}{z^2-2(\cos\Theta)z+1}.$$

Hasonló módon kapjuk FI jelekre, hogy (a számítást az Olvasóra bízzuk)

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)e^{j\Omega t}\right\}=\frac{1}{s-j\Omega}, \qquad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)e^{-j\Omega t}\right\}=\frac{1}{s+j\Omega};$$

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\cos\Omega t\right\}=\frac{s}{s^2+\Omega^2}, \quad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\sin\Omega t\right\}=\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}.$$

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy a Θ vagy az Ω valós paraméter szerinti időtartománybeli páros és páratlan tulajdonságot a Laplace-transzformáció megőrzi a komplex frekvenciatartományban. #

Paraméter szerinti differenciálás

Ha $X(z,q)=\mathscr{Z}\{x[k,q]\}$ illetve $X(s,p)=\mathscr{L}\{x(t,p)\}$, akkor bármely komplex q illetve p paraméter esetén a paraméter szerinti differenciálás és a Laplace-transzformáció felcserélhető:

$$\mathscr{Z}\left\{\frac{\partial x[k,q]}{\partial q}\right\}=\frac{\partial X(z,q)}{\partial q}; \quad \mathscr{L}\left\{\frac{\partial x(t,p)}{\partial p}\right\}=\frac{\partial X(s,p)}{\partial p}. \tag{4.1-17}$$

Alkalmazzuk a tételt az $x[k,q]=\varepsilon[k]\,q^k$ DI jelre. A (16) értelmében

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k\,q^{k-1}\}=\frac{z}{(z-q)^2}, \quad \mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k\,(k-1)q^{k-2}\}=\frac{2\,z}{(z-q)^3}. \tag{4.1-18}$$

Teljes indukcióval nehézség nélkül belátható, hogy

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\frac{k\,(k-1)(k-2)\ldots(k-(m-1))}{m!}q^{k-m}\right\}=\frac{z}{(z-q)^{m+1}}, \quad m\in\mathbf{Z}_+. \tag{4.1-19}$$

Az összefüggésben szereplő tört a k változó m-edfokú polinomja, amely a binomiális együtthatóval $\binom{k}{m}=\frac{k!}{m!(k-m)!}$ alakban is kifejezhető.

Hasonló módon (16) alapján FI jelre, hogy (a számítást az Olvasóra bízzuk)

$$\mathscr{L}\{\varepsilon(t)t\,\mathrm{e}^{pt}\}=\frac{1}{(s-p)^2}, \quad \mathscr{L}\{\varepsilon(t)t^2\mathrm{e}^{pt}\}=\frac{2}{(s-p)^3}. \tag{4.1-20}$$

Teljes indukcióval általánosítva kapjuk, hogy

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{m!}t^m\,\mathrm{e}^{pt}\right\}=\frac{1}{(s-p)^{m+1}}, \quad m\in\mathbf{N}. \tag{4.1-21}$$

Ezek az összefüggések majd az inverz transzformáció során hasznosak lesznek (4.1-2.4. pont, többszörös pólusok esete).

2. példa Legyen (18)-ban $q=1$, akkor

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k\}=\frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k\,(k-1)\}=\frac{2z}{(z-1)^3} \Rightarrow \mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k^2\}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

Hasonlóan számítható k^3, k^4, stb. DI jel Laplace-transzformáltja is. Nem ismert azonban egyszerű összefüggés a $\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k^m\}$, $m\in\mathbf{N}$ függvényre. #

Késleltetett belépő jel transzformáltja

Ha $X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$ illetve $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$, akkor

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathscr{Z}\{\varepsilon[k-r]x[k-r]\}=z^{-r}X(z), \quad r\in\mathbf{N};\\ &\mathscr{L}\{\varepsilon(t-T)x(t-T)\}=\mathrm{e}^{-sT}X(s), \quad T\in\mathbf{R}_+.\end{aligned}} \tag{4.1-22}$$

A tételt szokás *eltolási tételnek* vagy késleltetési tételnek nevezni.

A tétel igazolását a következő, általánosabb tétel után tárgyaljuk.

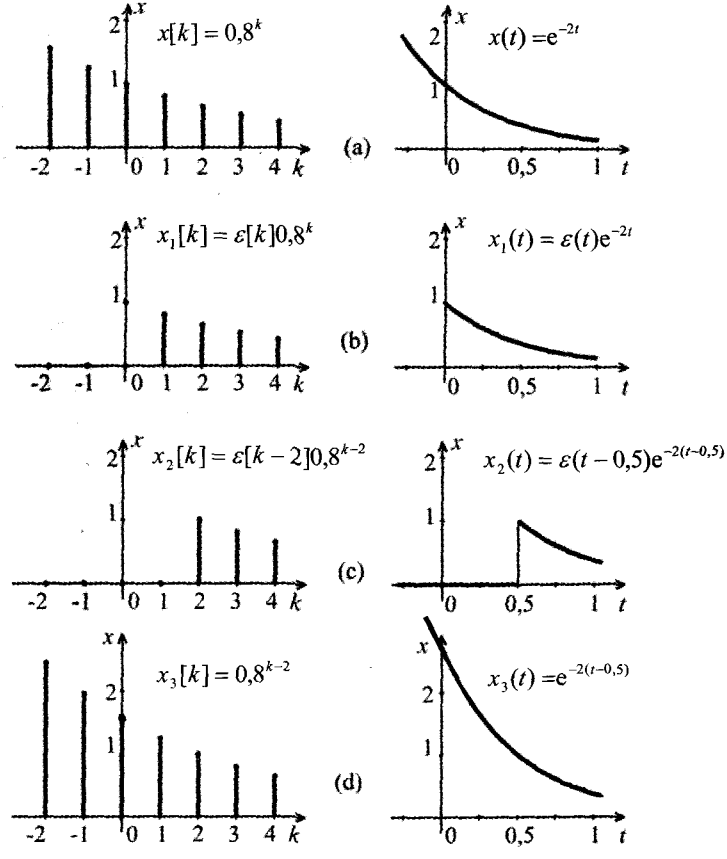
Érdemes felírni a tétel inverz alakját is:

$$\begin{aligned} &\mathscr{Z}^{-1}\left\{z^{-r}X(z)\right\} = \varepsilon[k-r]x[k-r], \quad r \in \mathbf{N}; \\ &\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-sT}X(s)\right\} = \varepsilon(t-T)x(t-T), \quad T \in \mathbf{R}_+, \end{aligned} \tag{4.1-23}$$

vagyis az időfüggvény nulla a $k = r \geq 0$ illetve a $t = T \geq 0$ időpont előtt. Azt is mondhatjuk, hogy a jel az r illetve a T időpontban lép be.

A tételek alkalmazásaként határozzuk meg a következő DI illetve FI jelek Laplace-transzformáltját (1. ábra):

$$\begin{aligned} &x[k] = 0{,}8^k, && x(t) = \mathrm{e}^{-2t}; \\ &x_1[k] = \varepsilon[k]0{,}8^k, && x_1(t) = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-2t}; \\ &x_2[k] = \varepsilon[k-2]0{,}8^{k-2}, && x_2(t) = \varepsilon(t-0{,}5)\mathrm{e}^{-2(t-0{,}5)}; \\ &x_3[k] = 0{,}8^{k-2}, && x_3(t) = \mathrm{e}^{-2(t-0{,}5)}. \end{aligned}$$



4.1-1. ábra Exponenciális jel, belépő exponenciális jel, késleltetett belépő exponenciális jel, **késleltetett** exponenciális jel

A (16) értelmében azonnal felírhatjuk, hogy

$$X(z)=X_1(z)=\frac{z}{z-0{,}8}; \qquad X(s)=X_1(s)=\frac{1}{s+2}.$$

A (22) alkalmazásával vagy az (1) definíció alapján

$$X_2(z)=z^{-2}\frac{z}{z-0{,}8}\equiv\frac{1}{z(z-0{,}8)}, \qquad X_2(s)=\mathrm{e}^{-0{,}5s}\frac{1}{s+2}.$$

Végül $x_3[k]=0{,}8^{-2}\,(0{,}8)^k$ illetve $x_3(t)=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-2t}$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$X_3(z)=0{,}8^{-2}\frac{z}{z-0{,}8}; \qquad X_3(s)=\mathrm{e}\frac{1}{s+2}.$$

Tekintsük most adottnak az X_i transzformált jeleket és keresettnek az eredetileg adott x_i időfüggvényeket. Közvetlenül felírhatjuk, hogy

$$\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=\mathscr{Z}^{-1}\{X_1(z)\}=0{,}8^k,\ k\in\mathbf{N}; \qquad \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\}=\mathrm{e}^{-2t},\ t\in\mathbf{R}_+;$$
$$\mathscr{Z}^{-1}\{X_3(z)\}=0{,}8^{-2}\,0{,}8^k,\ k\in\mathbf{N}; \qquad \mathscr{L}^{-1}\{X_3(s)\}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-2t}, \qquad t\in\mathbf{R}_+.$$

A (2) szerinti konvenciónknak megfelelően azt is írhatjuk, hogy

$$\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=\mathscr{Z}^{-1}\{X_1(z)\}=\varepsilon[k]0{,}8^k,\ k\in\mathbf{Z}; \qquad \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\}=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-2t},\ t\in\mathbf{R};$$
$$\mathscr{Z}^{-1}\{X_3(z)\}=\varepsilon[k]0{,}8^{k-2}, \qquad k\in\mathbf{Z}; \qquad \mathscr{L}^{-1}\{X_3(s)\}=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-2(t-0{,}5)}, \qquad t\in\mathbf{R}.$$

Az x_1 és x_3 ezen alakja nem egyezik meg az eredetileg megadottal, óvatosságból nem is jelöltük így. Tudnunk kell ugyanis, hogy az inverz Laplace-transzformáció negatív k illetve t értékekhez mindig nulla jelértéket rendel.

Hiba lenne arra következtetni, hogy $X_2(z)$ inverz transzformáltja $0{,}8^{k-2}$ illetve hogy $X_2(s)$ inverz transzformáltja $\mathrm{e}^{-2(t-0{,}5)}$. Ezek a jelek ugyanis nem nulla értékűek a k = 0 és 1 helyen vagy a $0<t<0{,}5$ intervallumban, ténylegesen e jelek Laplace-transzformáltja $X_3(z)$ illetve $X_3(s)$. Ha mindig kiírjuk az $\varepsilon[k-r]$ illetve az $\varepsilon(t-T)$ tényezőt, akkor az ilyen hibákat elkerülhetjük.

3. példa Határozzuk meg a következő DI illetve FI jel Laplace-transzformáltját:

$$x[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-10]\}\{1+k\}+\varepsilon[k-10];$$
$$x(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\}\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon(t-2).$$

Alakítsuk a jelek ablakozott kifejezését a következőképpen:

$$x[k]=\varepsilon[k]\{1+k\}+\varepsilon[k-10]\{-(k-10)-10\};$$
$$x(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon(t-2)\left\{-\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}+1\right\}.$$

Most már közvetlenül alkalmazhatjuk a (22) eltolási tételt:

$$X(z)=\left\{\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z-1)^2}\right\}-z^{-10}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{10\,z}{z-1}\right\}=\frac{z^2}{(z-1)^2}-z^{-10}\,\frac{z(10\,z-9)}{(z-1)^2};$$

$$X(s)=\frac{1}{s+1}+\mathrm{e}^{-2s}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2}}{s+1}+\frac{1}{s}\right\}=\frac{1}{s+1}+\mathrm{e}^{-2s}\,\frac{(1-\mathrm{e}^{-2})s+1}{s(s+1)}.$$

Az eredmények más alakra is rendezhetők, de talán az itt megadottak a legkényelmesebbek a további számítások során. Az inverz Laplace-transzformáció során nem feltétlenül az eredetileg megadott időfüggvények adódnak, de célszerű az eredményt arra az ablakozott alakra hozni.

A DI illetve az FI jel ábrázolását az Olvasóra bízzuk. #

Nem belépő DI jel késleltetése

Ha $X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$, akkor a késleltetett jel DI Laplace-transzformáltja (igazolást l. alább)

$$\mathscr{Z}\{x[k-r]\}=z^{-r}X(z)+x[-r]+x[-r+1]z^{-1}+\ldots+x[-1]z^{-(r-1)},\ r\in\mathbf{Z}_+. \quad (4.1\text{-}24)$$

A nem belépő és késleltetett jel DI Laplace-transzformáltját $X(z)$ ismeretében nem határozhatjuk meg, hiszen annak számításakor az $x[-1]$, $x[-2]$,... értékeket nullának tekintettük, tehát ezeket külön figyelembe kell vennünk. Ha ezek mindegyike nulla, akkor (24) a (22) szerinti alakra egyszerűsödik. Speciálisan $r = 1$ és 2 esetén

$$\mathscr{Z}\{x[k-1]\}=z^{-1}X(z)+x[-1],\ \mathscr{Z}\{x[k-2]\}=z^{-2}X(z)+x[-2]+x[-1]z^{-1}. \quad (4.1\text{-}25)$$

E tétel FI megfelelőjére ritkán van szükség, ezért azzal nem is foglalkozunk.

4. példa Határozzuk meg $x_3[k]=0{,}8^{k-2}$ DI Laplace-transzformáltját annak felhasználásával, hogy ha $x[k]=0{,}8^k$, akkor $x_3[k]=x[k-2]$.

Tudjuk, hogy $\mathscr{Z}\{0{,}8^k\}=z/(z-0{,}8)$. A (25) értelmében ezért

$$X_3(z)=z^{-2}\frac{z}{z-0{,}8}+0{,}8^{-2}+0{,}8^{-1}z^{-1}=0{,}8^{-2}\frac{0{,}8^2+z(z-0{,}8)+0{,}8(z-0{,}8)}{z(z-0{,}8)}\equiv 0{,}8^{-2}\frac{z}{z-0{,}8}.$$

Amint azt korábban láttuk, valóban ez a helyes eredmény. #

A (22) és (24) tétel igazolásához az (1) definíció értelmében

$$\mathscr{Z}\{x[k-r]\}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k-r]z^{-r}=\sum_{m=-r}^{\infty}x[m]z^{-(r+m)}=z^{-r}\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m}+\sum_{m=-r}^{-1}x[m]z^{-(r+m)},\ r\in\mathbf{Z}_+.$$

Az első összeg az $X(z)$ függvényt adja, a második összeg a (24) többi tagját, illetve zérust, ha $x[k]$ belépő jel, ami a (22) szerinti összefüggésre vezet.

Siettetett DI jel

Ha $X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$, akkor az egy ütemmel siettetett („hátratolt") jel transzformáltja

$$\boxed{\mathscr{Z}\{x[k+1]\}=z\,X(z)-x[0]z. \quad (4.1\text{-}26)}$$

Az általánosítás több ütemre nem okoz nehézséget. A tétel FI megfelelőjének kicsi a gyakorlati fontossága, ezért nem tárgyaljuk.

Az (1) definíció értelmében ugyanis

$$\mathscr{Z}\{x[k+1]\}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k+1]z^{-k}=\sum_{m=1}^{\infty}x[m]z^{-(m-1)}=z\left\{\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m}-x[0]\right\},$$

és ebből (26) már következik.

5. példa Legyen $x[k]=0{,}8^k$. Ekkor $x[k+1]=0{,}8^{k+1}=0{,}8\,x[k]$.

A (26) értelmében a $0{,}8^{k+1}$ jel DI Laplace-transzformáltja

$$\mathscr{Z}\left\{0{,}8^{k+1}\right\}=z\frac{z}{z-0{,}8}-1\cdot z\equiv\frac{0{,}8\,z}{z-0{,}8},$$

ami valóban 0,8 $X(z)$, amint lennie is kell. #

Folytonos idejű jel deriváltja

Ha $\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)$, akkor $x(t)$ általánosított deriváltjának, az $x'(t)\equiv x^{(1)}(t)$ jelnek a FI Laplace- transzformáltja

$$\boxed{\mathscr{L}\{x'(t)\}=s\,X(s)-x(-0).\qquad(4.1\text{-}27)}$$

Ha $x(-0)=0$, mint minden *belépő jel* esetén, akkor (27) a $\mathscr{L}\{x'(t)\}=s\,X(s)$ alakra egyszerűsödik. A tétel akkor is érvényes, ha t pozitív értékeire $x(t)$ esetleg nem folytonos, de intervallumonként folytonos és differenciálható, mindenütt van bal és jobb oldali határértéke. A tétel újabb alkalmazásával kapjuk a második derivált transzformáltját:

$$\mathscr{L}\left\{x^{(2)}(t)\right\}=s^2X(s)-x(-0)s-x^{(1)}(-0).$$

Az általánosítás tetszőleges rendű deriváltra már kézenfekvő:

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\}=s^nX(s)-\sum_{i=0}^{n-1}x^{(i)}(-0)s^{n-i-1}.\qquad(4.1\text{-}28)$$

Többnyire $x(t)$ *belépő jel*, amelyekre a tétel a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\}=s^nX(s)\Leftarrow x(t)=0,\ t\in\mathbf{R}_-.\qquad(4.1\text{-}29)$$

Megjegyezzük, hogy matematikai irodalomban a tétel következő alakja az elterjedt. Ha az $x(t)$ függvény a t pozitív értékeire mindenütt differenciálható, akkor ennek első deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sX(s)-x(+0)$.

6. példa Határozzuk meg (27) felhasználásával a Dirac-impulzus Laplace-transzformáltját.

Tudjuk, hogy $\delta(t)=\varepsilon'(t)$, $\varepsilon(-0)=0$ és $\mathscr{L}\{\varepsilon(t)\}=1/s$. Ezek felhasználásával a (27) értelmében $\mathscr{L}\{\delta(t)\}=s\,(1/s)-0=1$, ami a helyes eredmény. #

A (27) tétel igazolásához alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\mathscr{L}\{x'(t)\}=\int_{-0}^{\infty}x'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\left[x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\right]_{-0}^{\infty}+\int_{-0}^{\infty}x(t)\,s\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Az első tag a felső határon nulla, ha $\mathscr{R}e\{s\}$ értékét elég nagynak választjuk, az alsó határon pedig $x(-0)$. A második tag adja az $s\,X(s)$ összetevőt (27)-ben.

Folytonos idejű jel integrálja

Ha $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor $x(t)$ integráljának a FI Laplace-transzformáltja

$$\mathscr{L}\left\{\int_{-0}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s). \tag{4.1-30}$$

Ismételt integrálás s-sel végzett ismételt osztásnak felel meg. Ha az integrálás alsó határa nem –0, akkor a negatív t értékekre vonatkozó integrál egy additív állandót jelent, amely $X(s)$ ismeretében természetesen nem határozható meg.

7. példa Integráljuk az $\varepsilon(t)$ egységugrást ismételten, akkor kapjuk, hogy

$$\mathscr{L}\{\varepsilon(t)t\} = \frac{1}{s^2},\quad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{s^3},\ldots,\ \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{m!}t^m\right\} = \frac{1}{s^{m+1}},$$

amint azt már korábban más úton, a (21) szerint megkaptuk. #

A tétel igazolásához alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\int_{-0}^{\infty}\left\{\int_{-0}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\int_{-0}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_{-0}^{\infty} + \int_{-0}^{t} x(t)\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t.$$

Az első tag a felső határon nulla, ha $\mathscr{R}e\{s\}$ értékét elég nagynak választjuk, míg az alsó határon azért nulla, mert az integrál határai megegyeznek. A második tag adja az $X(s)/s$ eredményt (30)-ban.

Differenciálás a komplex frekvenciatartományban

Ha $\mathscr{Z}\{x[k]\} = X(z)$ illetve ha $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor

$$\mathscr{Z}\{kx[k]\} = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z};\quad \mathscr{L}\{t\,x(t)\} = -\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}. \tag{4.1-31}$$

A művelet ismétlésével kapjuk, hogy

$$\mathscr{Z}\{k^2x[k]\} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right\};\quad \mathscr{L}\{t^2x(t)\} = \frac{\mathrm{d}^2X(s)}{\mathrm{d}s^2}. \tag{4.1-32}$$

A tétel általános alakja

$$\mathscr{Z}\{k^n\,x[k]\} = \left\{-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\}^n X(z);\quad \mathscr{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^nX(s)}{\mathrm{d}s^n};\ n\in\mathbf{N}. \tag{4.1-33}$$

Ezek a tételek egyes jelek transzformáltjának számításánál használhatók.
Az igazolás a definícióból adódik, ezért nem részletezzük.

8. példa Az ismert $\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]\} = z/(z-1)$ összefüggésből kiindulva kapjuk hogy

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2},\quad \mathscr{Z}\{\varepsilon[k]k^2\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3},$$

megegyezésben más úton kapott eredményünkkel. #

A jel kezdeti értéke

Ha $\mathscr{Z}\{x[k]\}=X(z)$ illetve $\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)$, akkor $X(z)$ illetve $X(s)$ ismeretében meghatározhatjuk a jel $x[0]$ illetve $x(+0)$ *kezdeti értékét:*

$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z); \qquad x(+0)=\lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathscr{Re}\{s\}>0}} \{s\,X(s)\}. \tag{4.1-34}$$

A tétel akkor érvényes, ha $x[0]$ illetve ha $x(+0)$ létezik, de ez $X(z)$ illetve $X(s)$ ismeretében nehezen dönthető el. Szerencsére a tétel a legtöbb gyakorlati esetben használható. Még akkor is elfogadható eredményt kapunk, ha $x(t)=\delta(t), \mathscr{L}\{\delta(t)\}=1$, mert ekkor $x(+0)=\infty$ adódik. Az Olvasó ellenőrizheti a tétel érvényességét az eddig vizsgált jelekre. A határátmentnél a z vagy s változót tekintsük valósnak és pozitívnak.

Hálózatok vagy rendszerek vizsgálata során az $x[0]$ illetve $x(+0)$ kezdeti érték gyakran valamilyen megfontolás alapján meghatározható. Ilyenkor (34) felhasználható $X(z)$ illetve $X(s)$ ellenőrzésére.

A tétel igazolható a definíció alapján is vagy a később tárgyalandó hatványsoros előállítás alapján (4.1-2.2. pont).

A jel végértéke

Ha a jel $x[\infty]=\lim\limits_{k\to\infty} x[k]$ végértéke illetve $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ végértéke létezik, akkor az $X(z)=\mathscr{Z}\{x[k]\}$ illetve $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ ismeretében meghatározható:

$$x[\infty]=\lim_{z\to 1}\{(z-1)X(z)\}; \qquad x(\infty)=\lim_{s\to 0}\{s\,X(s)\}. \tag{4.1-35}$$

Ha csak $X(z)$ illetve $X(s)$ ismert, akkor a tétel alkalmazhatóságának alapvető feltétele az, hogy $X(z)$ minden z_i szingularitására $|z_i|<1$, illetve az $X(s)$ minden s_i szingularitására $\mathscr{Re}\{s_i\}<0$ teljesüljön. Ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális függvény, akkor a z_i illetve az s_i szinguláris pontok a függvény pólusait (többnyire nevezőjének nullahelyeit) jelentik. Korábban már láttuk, hogy a nullahelyekre vonatkozó feltételek teljesülése azok kiszámítása nélkül is ellenőrizhető (2.2-3.2. pont).

A tétel igazolását az Olvasóra bízzuk, de célszerű a részlettörtekre bontás tárgyalása utánra (4.1-2.3. pont) halasztani.

9. példa Vizsgáljuk meg a következő Laplace-transzformáltakat és határértékeket:

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon[k]q^k\}=\frac{z}{z-q}; \qquad \lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{z}{z-q}\right\}=0, \text{ ha } q\neq 1;$$

$$\mathscr{L}\{\varepsilon(t)\mathrm{e}^{pt}\}=\frac{1}{s-p}, \qquad \lim_{s\to 0}\left\{s\,\frac{1}{s-p}\right\}=0, \qquad \text{ha } p\neq 0.$$

Ha $|q|<1$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} q^k=0$, illetve ha $\mathscr{Re}\{p\}<0$, akkor $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{pt}=0$, tehát (35) helyes eredményt ad. Ha $|q|>1$, akkor $|q^k|$ korlátlanul nő, illetve ha $\mathscr{Re}\{p\}>0$, akkor $|\mathrm{e}^{pt}|$ korlátlanul nő, tehát a (35) szerinti nulla nem helyes eredmény.

Ha $|q|=1$, akkor $q^k=1$ illetve ha $p=0$, akkor $e^{pt}=1$, ekkor (35) ismét helyes eredményt ad. Igazolható, hogy (35) még akkor is helyes eredményt ad, ha az $X(z)$ függvénynek a $z=1$ helyen többszörös pólusa van, a többi pólusa pedig az egységsugarú kör belsejébe illetve ha az $X(s)$ függvénynek az $s=0$ helyen többszörös pólusa van, a többi pólusa pedig a bal félsíkra esik. A tétel viszont nem ad helyes eredményt, ha a pólus az egységsugarú kör illetve a képzetes tengely más pontjára esik. #

Belépő jelek konvolúciója a komplex frekvenciatartományban

Legyen x és y egyaránt *belépő jel*. Ekkor konvolúciójuk is belépő jel, éspedig

$$x[k]*y[k]=\sum_{p=0}^{k}x[p]y[k-p]; \qquad x(t)*y(t)=\int_{-0}^{t}x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.1-36}$$

Két belépő jel *konvolúciójának* DI vagy FI Laplace-transzformáltja a transzformáltjuk *szorzata*:

$$\mathscr{L}\{x[k]*y[k]\}=X(z)Y(z); \qquad \mathscr{L}\{x(t)*y(t)\}=X(s)Y(s). \tag{4.1-37}$$

A belépő jelek konvolúciójára vonatkozó tétel nagyon fontos elvi szempontból. Számítástechnikai célokra ritkán használjuk.

A tételek igazolásához tekintsük először két nem belépő jel konvolúciójának transzformáltját:

$$\mathscr{L}\{x[k]*y[k]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[p]y[k-p]\right\}z^{-k}=$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[p]z^{-p}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}y[k-p]z^{-(k-p)}\right\}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[p]z^{-p}\left\{\sum_{m=-p}^{\infty}y[m]z^{-m}\right\};$$

$$\mathscr{L}\{x(t)*y(t)\}=\int_{-0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\left\{\int_{-0}^{\infty}y(t-\tau)\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\left\{\int_{-\tau-0}^{\infty}y(\vartheta)\mathrm{e}^{-s\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right\}\mathrm{d}\tau.$$

A műveletek felcserélhetők, ha mindkét jelnek létezik a Laplace-transzformáltja. Ha x és y egyaránt belépő jel, akkor az utolsó összegek alsó határa $p=0$, ezért $m=0$ is, illetve az utolsó integrálok alsó határa $\tau=-0$, ezért $\vartheta=-0$ is. A két összeg illetve integrál ily módon függetlenné válik, eredményük az $X(z)$ és az $Y(z)$ illetve $X(s)$ és az $Y(s)$ függvény, amivel a (37) tételt igazoltuk.

Az $x[k]y[k]$ illetve az $x(t)y(t)$ *szorzat* Laplace-transzformáltja kifejezhető $X(z)$ és $Y(z)$ illetve $X(s)$ és $Y(s)$ *konvolúciójaként*, ami a komplex számsíkon végzett integrállal fejezhető ki. Ezeket az összefüggéseket nem részletezzük, mivel nehezen alkalmazhatók, ezért a továbbiakban ezt a tételt nem fogjuk felhasználni.

*4.1-1.4. Periodikus jelek transzformáltja

Legyen $x[k]$ illetve $x(t)$ egy *periodikus jel :*

$$x[k+L]=x[k],\ L\in\mathbf{Z}_+;\quad x(t+T)=x(t),\ T\in\mathbf{R}_+, \tag{4.1-38}$$

ahol L illetve T a jel periódusideje. Célunk a Laplace-transzformált meghatározása.

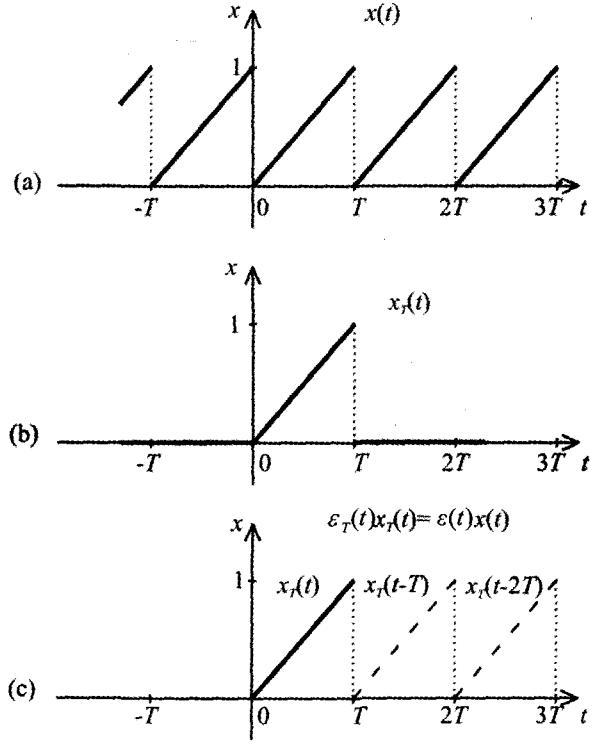
Vezessük be az $x_L[k]$ illetve az $x_T(t)$ jelet, amely leírja a jel „első" periódusát:

$$x_L[k]\equiv\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L]\}x[k];\quad x_T(t)\equiv\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}x(t). \tag{4.1-39}$$

A k illetve t pozitív értékeire szorítkozva az ott periodikus x jel előállítható ezen jel ismételt késleltetésével és összegezéssel:

$$\begin{aligned} x[k]&=x_L[k]+x_L[k-L]+x_L[k-2L]+\ldots\equiv\varepsilon_L[k]x_L[k];\\ x(t)&=x_T(t)+x_T(t-T)+x_T(t-2T)+\ldots\equiv\varepsilon_T(t)x_T(t). \end{aligned} \tag{4.1-40}$$

ahol az $\varepsilon_L[k]$ illetve az $\varepsilon_T(t)$ *ismétlési operátort* a (40) azonosság definiálja. A műveletet a 2. ábra szemlélteti egy folytonos idejű jelre.



4.1-2. ábra (a) A folytonos idejű periodikus jel; (b) az első periódust leíró jel; (c) a belépő, majd belépés után periodikus jel előállítása eltolással és összegezéssel

Jelölje az első periódust leíró jel Laplace-transzformáltját

$$X_L(z)=\mathscr{Z}\{x_L[k]\};\quad X_T(s)=\mathscr{L}\{x_T(t)\}. \tag{4.1-41}$$

Az $X_L(z)$ a z^{-1} polinomja, az $X_T(s)$ rendszerint ugyancsak meghatározható egyszerű számítással, utóbbi csak kivételesen racionális függvény. A késleltetési tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon_L[k]x_L[k]\} = X_L(z) + z^{-L}X_L(z) + z^{-2L}X_L(z) + \ldots;$$
$$\mathscr{L}\{\varepsilon_T(t)x_T(t)\} = X_T(s) + \mathrm{e}^{-sT}X_T(s) + \mathrm{e}^{-s2T}X_T(s) + \ldots.$$

A mértani sor konvergens, ha $|z^{-1}| < 1$, azaz ha $|z| > 1$ illetve ha $|\mathrm{e}^{-sT}| < 1$, azaz ha $\mathscr{R}e\{s\} > 0$. A periodikus jel Laplace-transzformáltjára vonatkozó végeredményünk:

$$\mathscr{Z}\{\varepsilon_L[k]x_L[k]\} = \frac{1}{1-z^{-L}}X_L(z); \qquad \mathscr{L}\{\varepsilon_T(t)x_T(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}X_T(s). \tag{4.1-42}$$

Ha tehát egy $X(z)$ illetve $X(s)$ függvény alakja a (42) szerinti és abban $\mathscr{Z}^{-1}\{X_L(z)\} = 0, k \geq L$ illetve $\mathscr{L}^{-1}\{X_T(s)\} = 0, t > T$, akkor $X(z)$ illetve $X(s)$ inverz transzformáltja periodikus jel, amelynek első periódusát $x_L[k] = \mathscr{Z}^{-1}\{X_L(z)\}$ illetve $x_T(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_T(s)\}$ írja le.

1. példa Határozzuk meg a 2a ábrán vázolt folytonos idejű periodikus jel Laplace-transzformáltját!

Az ábrából látható, hogy

$$x_T(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\}\frac{t}{T} = \varepsilon(t)\frac{t}{T} - \varepsilon(t-T)\left\{\frac{t-T}{T} + 1\right\} \Rightarrow$$
$$X_T(s) = \frac{1}{Ts^2} - \mathrm{e}^{-sT}\left\{\frac{1}{Ts^2} + \frac{1}{s}\right\} = \frac{1-\mathrm{e}^{-sT}(sT+1)}{Ts^2}.$$

A (42) felhasználásával kapjuk, hogy

$$X(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-sT}(sT+1)}{Ts^2\left(1-\mathrm{e}^{-sT}\right)}.$$

Az Olvasóra bízzuk annak eldöntését, hogy van-e az $X_T(s)$ és az $X(s)$ függvénynek szingularitása az $s = 0$ helyen. #

Hasonlítsuk össze $X_T(s)$ általános kifejezését a FI periodikus jel *komplex Fourier-együtthatójának* kifejezésével:

$$X_T(s) = \int_{-0}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad X_p^C = \frac{1}{T}\int_{-0}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p2\pi t/T}\,\mathrm{d}t. \tag{4.1-43}$$

Azonnal látható, hogy

$$X_p^C = \frac{1}{T}X_T(s)\Big|_{s=\mathrm{j}p2\pi/T}. \tag{4.1-44}$$

Mivel $X_T(s)$ többnyire meghatározható integrálás nélkül, ezért (44) kényelmes lehetőség periodikus FI jelek Fourier-együtthatóinak számítására. A tétel DI alakja nem különösebben hasznos.

2. példa A 2. ábrán vázolt periodikus FI jel komplex Fourier- együtthatóinak meghatározásához használjuk fel az előző példa eredményét és az $e^{jp2\pi}=1$ összefüggést:

$$X_p^C = \frac{1}{T}\left.\frac{1-e^{-sT}(Ts+1)}{Ts^2}\right|_{s=jp2\pi/T} = \frac{1-(jp2\pi+1)}{T^2(jp2\pi/T)^2} = \frac{-1}{jp2\pi}; \quad p=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Ha $p=0$, akkor $e^{-sT} \approx 1 - sT + s^2T^2/2$ felhasználásával $X_0^C = 1/2$ adódik.

Az Olvasó ellenőrizheti az eredményt X_p^C számításával a 3.1-2.4. pontban tárgyalt módon. #

*4.1-1.5. Jelek leírása a frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban

Egy DI illetve FI jel spektruma (Fourier-transzformáltja) és Laplace-transzformáltja kölcsönösen meghatározzák egymást, ha bizonyos feltételek ki vannak elégítve. Hasonlítsuk össze egy DI illetve egy FI jel kétféle transzformáltját:

$$\mathscr{F}\{x[k]\} \equiv X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\vartheta k}, \text{ ha } \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]| < \infty; \qquad \mathscr{L}\{x[k]\} \equiv X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k};$$

$$\mathscr{F}\{x(t)\} \equiv X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \text{ ha } \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt < \infty; \qquad \mathscr{L}\{x(t)\} \equiv X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt.$$

Ennek alapján a következőket állapíthatjuk meg.

Ha $x[k]$ egy *belépő és abszolút összegezhető* DI jel, akkor $X(e^{j\vartheta})$ spektruma kifejezhető $X(z)$ Laplace-transzformáltjával $z=e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel. Ha $x(t)$ egy *belépő és abszolút integrálható* FI jel, akkor $X(j\omega)$ spektruma kifejezhető $X(s)$ Laplace-transzformáltjával $s=j\omega$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} &X(e^{j\vartheta}) = X(z)|_{z=e^{j\vartheta}}, \text{ ha } x[k]=0,\ k\in\mathbf{Z}_- \text{ és } \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]| < \infty; \\ &X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}, \text{ ha } x(t)=0,\ t\in\mathbf{R}_- \text{ és } \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt < \infty. \end{aligned} \tag{4.1-45}$$

Ha az abszolút összegezhetőségre vagy az abszolút integrálhatóságra vonatkozó feltételek nincsenek kielégítve, akkor $X(e^{j\vartheta})$ továbbra is úgy tekinthető, mint az $X(z)$ függvénynek az egységsugarú körön a $z=e^{j\vartheta}$ helyen felvett értéke, illetve $X(j\omega)$ továbbra is úgy tekinthető, mint az $X(s)$ függvénynek a képzetes tengelyen az $s=j\omega$ helyen felvett értéke. Ilyenkor azonban ezek nem adják meg a jel spektrumát.

Mindezek alapján érthető, miért nevezik „komplex frekvenciának" a z illetve az s változót, továbbá az $X(e^{j\vartheta})$ illetve az $X(j\omega)$ jelölés hasznát az egyszerűbb, és ugyancsak elterjedt $X(\vartheta)$ illetve $X(\omega)$ helyett. A ϑ DI körfrekvencia a z DI komplex frekvencia szöge, illetve az ω FI körfrekvencia az s FI komplex frekvencia képzetes része. Ezért nem célszerű az önmagában helyes „valós frekvencia" kifejezést használni. Komplex frekvencia helyett komplex körfrekvencia lenne a korrekt elnevezés, de a gyakorlatban a rövidebb alak használatos, hiszen az nem félreérthető.

A (45) biztosan alkalmazható, ha a jel belépő, korlátos és időkorlátozott (véges hosszúságú). Ugyancsak biztosan alkalmazható a tétel, ha a jel belépő, korlátos és a végtelenben exponenciálisan nullához tart, illetve alkalmas a^k $(0 < a < 1)$ illetve $e^{-\alpha t}$ $(\alpha > 0)$ függvénnyel majorálható. Nem alkalmazható (45) például az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$, vagy az $\varepsilon[k]\cos\Theta k$ illetve az $\varepsilon(t)\cos\Omega t$ nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelre. Nem alkalmazható a tétel az $a^{|k|}$ illetve $e^{\alpha|t|}$, vagy a $\delta[k+1]$ illetve az $\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)$ nem belépő jelekre.

Az Olvasó ellenőrizheti (45) helyességét olyan jelekre, amelyeknek mind a spektrumát, mind a Laplace-transzformáltját ismeri. Tanulságos olyan jelek vizsgálata, amelyekre valamelyik feltétel nincs kielégítve.

Ha $X(z)$ racionális függvény és minden q_i pólusa az egységsugarú körön belül van (minden $|q_i| < 1$) illetve ha $X(s)$ racionális függvény és minden p_i pólusa a bal félsíkon van (minden $\mathcal{R}e\{p_i\} < 0$), akkor (45) érvényes. Ilyenkor az $x[k]$ illetve az $x(t_k)$ értékek numerikusan. A pólusokra vonatkozó feltétel ellenőrizhető a nevező nullahelyeinek meghatározása nélkül is (2.2-3.2. pont).

Az $X(s)$ függvény nem csak s hatványait tartalmazhatja, hanem még e^{-sT} típusú tényezőket is. Általánosabban fogalmazva: a tétel akkor is alkalmazható, ha $X(s)$ olyan meromorf függvény, amelynek minden pólusa a bal félsíkon van.

Ha a pólusokra vonatkozó feltétel nincs kielégítve, akkor a spektrum még abban az esetben sem számítható a (45) alapján, ha a belépő jelnek egyébként értelmezett a spektruma. Tipikus példa erre az $\varepsilon[k]$ DI egységugrás, amelyre $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = z/(z-1)$ illetve az $\varepsilon(t)$ FI egységugrás, amelyre $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = 1/s$.

*4.1-1.6. Konvergencia és inverzió

Ebben a pontban tárgyaljuk a DI és a FI Laplace-transzformáció néhány olyan tulajdonságát, amelyet a matematikai részletek iránt nem érdeklődő olvasó kihagyhat anélkül, hogy ezzel veszélyeztetné a transzformáció alkalmazását a továbbiakban vizsgált feladatok megoldása során.

Konvergencia

A DI Laplace-transzformációt definiáló (1) hatványsor konvergens valamilyen $|z^{-1}| < r_0^{-1}$ tartományban, azaz valamilyen $|z| > r_0$ körkülsőben, ahol r_0 a DI jel konvergencia-sugara. A FI Laplace-transzformációt definiáló (1) integrál konvergens valamilyen $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_0$ félsíkon, ahol σ_0 a FI jel konvergencia-abszcisszája. Az $X(z)$ vagy az $X(s)$ függvény analitikus ebben a tartományban, minden szinguláris pontja e tartományon kívül van, vagyis az r_0 sugarú körön és annak belsejében vagy a σ_0 konvergencia-abszcisszán és attól balra. Az analitikus folytatás elve alapján azonban az $X(z)$ illetve az $X(s)$ függvényt a z vagy s komplex változó minden értékére értelmezettnek tekintjük a szinguláris pontok kivételével, ahol a függvény nem értelmezett. A $z = \infty$ illetve az $s = \infty$ pont esetleg külön megfontolást igényel, ennek azonban ritkán van gyakorlati jelentősége.

Ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális (általánosabban: meromorf) függvény és szinguláris pontjait (azaz pólusait) z_i illetve s_i jelöli, akkor a konvergencia-sugarat $r_0 = |z_i|_{\max}$, illetve

a konvergencia-abszcisszát $\sigma_0 = (\mathcal{R}e\{s_i\})_{\max}$ adja meg. Ha r_0 illetve σ_0 nem értelmezett, akkor a jelnek nincs Laplace-transzformáltja. Meromorf az olyan függvény, amelynek minden véges szingularitása pólus.

Az $x[k]$ DI jel Laplace-transzformáltja létezik, ha x véges a $k \in \mathbf{N}$ véges értékeire és $\lim\limits_{k\to\infty}(r+\varepsilon)^{-k}x[k] \to 0\ (r, \varepsilon \in \mathbf{R}_+)$, bármilyen kicsi is ε. Az r legkisebb értéke az r_0 konvergencia-sugár. Így például a DI egységimpulzusra $r_0 = 0$, a DI egységugrásra vagy bármely korlátos DI jelre $r_0 = 1$, az $x[k] = k^n q^k$ $(n \in \mathbf{N})$ jelre $r_0 = |q|$, míg az $x[k] = 2^{(k^2)}$ jelre nem létezik ilyen r_0, e jelnek nincs Laplace-transzformáltja.

Az $x(t)$ FI jel Laplace-transzformáltja létezik, ha x véges a $t \in \mathbf{R}_+$ véges értékeire (vagy legalább integrálható bármely véges $0 \le t_1 < t < t_2 < \infty$ intervallumon) és $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(\sigma+\varepsilon)t}x(t) \to 0\ (\sigma, \varepsilon \in \mathbf{R}_+)$, bármilyen kicsi is ε. A σ legkisebb értéke a σ_0 konvergencia-abszcissza. Így például a Dirac-impulzusra $\sigma_0 = -\infty$, a FI egységugrásra vagy bármely korlátos FI jelre $\sigma_0 = 0$, az $x(t) = t^n \mathrm{e}^{\alpha t}$ $(n \in \mathbf{N})$ jelre $\sigma_0 = \alpha$, míg az $x(t) = \mathrm{e}^{(\alpha t)^2}$ jelre nem létezik ilyen σ_0, e jelnek nincs Laplace-transzformáltja.

Kapcsolat a Fourier-transzformációval

Most megmutatjuk, miként származtatható a Laplace-transzformáció a Fourier-transzformációból.

Legyen $x[k]$ illetve $x(t)$ egy jel, amely nem feltétlenül tart nullához, ha $|k| \to \infty$ illetve ha $|t| \to \infty$. Szorítkozzunk olyan jelekre, amelyekre található olyan $r > r_0$ illetve $\sigma > \sigma_0$ érték, amellyel az

$$y[k,r] = \varepsilon[k]r^{-k}x[k]; \qquad y(t,\sigma) = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}x(t)$$

jel abszolút összegezhetővé illetve abszolút integrálhatóvá tehető. A legkisebb r_0 érték a konvergencia-sugár, a legkisebb σ_0 érték a konvergencia-abszcissza.

Az $y[k,r]$ illetve az $y(t,\sigma)$ jel spektruma

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}, r) \equiv \mathscr{F}\{y[k,r]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon[r]r^{-k}x[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k](r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})^{-k};$$

$$Y(\mathrm{j}\omega, r) \equiv \mathscr{F}\{y(t,\sigma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t.$$

Az $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}, r)$ illetve az $Y(\mathrm{j}\omega, \sigma)$ függvény tekinthető két valós változó függvényének, de tekinthető egyetlen $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ komplex változó függvényének is. Az utóbbi felfogás szerint

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = X(z)\big|_{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}; \qquad Y(\mathrm{j}\omega, \sigma) = X(s)\big|_{s=\sigma+\mathrm{j}\omega}.$$

Itt $X(z)$ az $x[k]$ DI jel illetve $X(s)$ az $x(t)$ FI jel Laplace-transzformáltja.

Ebből következik, hogy ha $X(z)$ vagy $X(s)$ ismert, akkor $y[k,r]$ illetve $y(t,\sigma)$ számítható az inverz Fourier-transzformációra vonatkozó összefüggéssel, ezért

$$\varepsilon[k]x[k]=r^k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta},r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta k}\,\mathrm{d}\vartheta;\qquad \varepsilon(t)x(t)=\mathrm{e}^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\mathrm{j}\omega,\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Ezekből az összefüggésekből már következik az inverziós integrál (4) kifejezése. Numerikusan ezen összefüggések alapján számítható az inverz Laplace-transzformált egy alkalmas r illetve σ megválasztása után. Többnyire $r = 1$ illetve $\sigma = 0$ is megfelelő. Az eljárást nem részletezzük.

Inverz Laplace-transzformáció

Újra megadjuk a (4) inverziós integrálokat:

$$\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_{|z|=r_1}X(z)z^{k-1}\,\mathrm{d}z,\ r_1>r_0,\ k\in\mathbf{Z};$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma_1-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_1+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\quad \sigma_1>\sigma_0,\ t\in\mathbf{R}.$$

Itt r_0 a konvergencia-sugár illetve σ_0 a konvergencia-abszcissza.

Ha $k\in\mathbf{Z}_-$ illetve ha $t\in\mathbf{R}_-$, akkor az integrálok nullát eredményeznek. Ha $k\in\mathbf{N}$ illetve ha $t\in\mathbf{R}_+$, akkor az integrál egy olyan $x[k]$ illetve $x(t)$ jelet szolgáltat, amelynek Laplace-transzformáltja a megadott $X(z)$ illetve $X(s)$.

Az integrál tényleges számítása a reziduum tétel felhasználásával történhet:

$$\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=\sum_i\operatorname*{Res}_{z_i}\{z^{k-1}X(z)\},\ k\in\mathbf{Z};$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\sum_i\operatorname*{Res}_{s_i}\{\mathrm{e}^{st}X(s)\},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Itt $\operatorname*{Res}_{z_i}G(z)$ a $G(z)$ függvény reziduuma a $z=z_i$ helyen, vagyis a $(z-z_i)^{-1}$ tag együtthatója a $G(z)$ Laurent-sorában. Ha $G(z)$ racionális függvény, akkor annak reziduumai meghatározhatók részlettörtekre bontással. Ha a $G(z)$ függvénynek a $z=z_i$ helyen egyszeres pólusa van, akkor a reziduum ott például a $\operatorname*{Res}_{z_i}G(z)=\lim_{z\to z_i}(z-z_i)G(z)$ összefüggéssel számítható.

Ezek a fogalmak és összefüggések nem szükségesek a következőkben, mert a továbbiakban racionális $X(z)$ vagy legfeljebb meromorf $X(s)$ függvényekre szorítkozunk.

Ez nem jelenti azt, hogy nem léteznek olyan jelek, amelyek transzformáltja nem esik a fenti kategóriába. Ilyenek például

$$\mathscr{Z}\left\{\varepsilon[k]\frac{1}{k!}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k}=\mathrm{e}^{1/z};\quad \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)t^{1/2}\right\}=\int_{-0}^{\infty}t^{1/2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2s^{3/2}}.$$

Az utóbbi függvény bizonyos típusú parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek vizsgálata során fordul elő. Ilyenekkel azonban nem foglalkozunk.

4.1-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a következő DI jelek Laplace-transzformáltját:

$(a)\ x[k]=a^k.$ $(b)\ x[k]=a^{|k|}.$

$(c)\ x[k]=\varepsilon[k]a^k$ $(d)\ x[k]=(1-\varepsilon[k])b^k+\varepsilon[k]a^k.$

$(e)\ x[k]=\delta[k]+a\,\delta[k-1]+a^2\delta[k-2]+a^3\delta[k-3]+\ldots.$

Vázolja fel a jeleket $a=0{,}5$, $a=1$ és $a=-2$ esetére!

F-2. Határozza meg a következő FI jelek Laplace-transzformáltját:

$(a)\ x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}.$ $(b)\ x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}.$ $(c)\ x(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$

$(d)\ x(t)=\{1-\varepsilon(t)\}\mathrm{e}^{-\beta t}+\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$ $(e)\ x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(a\,t)^k.$

Vázolja fel a jeleket $\alpha=0{,}5$, $\alpha=0$ és $\alpha=-0{,}5$ esetére!

F-3. Határozza meg a következő véges hosszúságú DI jelek (DI ablakok) Laplace-transzformáltját ($L\in\boldsymbol{Z}_+$):

$(a)\ x[k]=\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L].$ $(b)\ x[k]=(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])a^k.$

$(c)\ x[k]=(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])\sin\frac{\pi k}{L}.$

$(d)\ x[k]=(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])\frac{k}{L}+(\varepsilon[k-L]-\varepsilon[k-2L])\frac{2L-k}{L}$

Vázolja fel a jeleket $L=10$ esetére!

F-4. Határozza meg a következő véges hosszúságú FI jelek (FI ablakok) Laplace-transzformáltját ($T\in\boldsymbol{R}_+$):

$(a)\ x(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T).$ $(b)\ x(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}\frac{t}{T}.$

$(c)\ x(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}\mathrm{e}^{-\alpha t}.$ $(d)\ x(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}\sin\frac{\pi t}{T}.$

$(e)\ x(t)=2\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}+\{\varepsilon(t-T)-\varepsilon(t-2T)\}.$

Vázolja fel a jeleket!

F-5. Határozza meg a következő DI jelek Laplace-transzformáltját:

$(a)\ x[k]=\varepsilon[k]\{A\cos\Theta k+B\sin\Theta k\}.$

$(b)\ x[k]=\varepsilon[k]A\,k\,a^k.$ $(c)\ x[k]=\varepsilon[k]A\,k\cos\Theta k.$

Oldja meg a feladatot arra az esetre is, amikor elhagyjuk az $\varepsilon[k]$ tényezőt!

F-6. Határozza meg a következő FI jelek Laplace-transzformáltját:

$(a)\ x(t)=\varepsilon(t)\{A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\}\mathrm{e}^{-\alpha t}.$

$(b)\ x(t)=\varepsilon(t)A\,t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$ $(c)\ x(t)=\varepsilon(t)A\,t\cos\Omega t.$

Oldja meg a feladatot arra az esetre is, amikor elhagyjuk az $\varepsilon(t)$ tényezőt!

F-7. Válassza ki az előző feladatokban szereplő DI illetve FI jelek közül azokat, amelyek Fourier-transzformáltja előállítható a Laplace-transzformáltjából $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s = \mathrm{j}\omega$ *helyettesítéssel!*

***F-8.** Igazolja a Laplace-transzformáció alkalmazásával, hogy

$$\delta[k-L] * x[k] = x[k-L]; \qquad \delta(t-T) * x(t) = x(t-T).$$

Általános érvényű ez az igazolás?

F-9. A $\cos \Omega t$ illetve a $\sin \Omega t$ FI jel Laplace-transzformáltjának ismeretében határozza meg a másikat a derivált jelre és az integrált jelre vonatkozó tétel alkalmazásával!

F-10. Határozza meg $x[0]$ illetve $x(+0)$ és $x[\infty]$ illetve $x(\infty)$ értékét az időfüggvény előállítása nélkül, ha $x[k]$ illetve $x(t)$ Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(z) = \frac{z^{-2}}{z-0{,}5}; \quad X(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s+3}.$$

$$(b)\ X(z) = \frac{z^{-2}}{z+3}; \quad X(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s-0{,}5}.$$

***F-11.** Értelmezzünk egy DI illetve FI spektrumot a következő módon:

$$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) \equiv \mathscr{Z}\{\varepsilon[k]\}\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}; \quad G(\mathrm{j}\omega) \equiv \mathscr{L}\{\varepsilon(t)\}\big|_{s=\mathrm{j}\omega}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egységugrás Laplace-transzformáltjában elvégezzük a Fourier-transzformáltra való áttérés formális helyettesítését.

Határozza meg a

$$g[k] = \mathscr{F}^{-1}\{G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\}; \quad g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(\mathrm{j}\omega)\}$$

jelet, ha ez lehetséges. (Útmutatás. Használja fel sgn k illetve sgn t spektrumát!)

4.1-1.M. Megoldások

M-1. A jelek $k \in \mathbf{N}$ esetén azonosak, ezért mindegyikük Laplace-transzformálja is azonos:

$$X(z) = \frac{z}{z-a}.$$

M-2. A jelek $t \in \mathbf{R}_+$ esetén azonosak, ezért mindegyikük Laplace-transzformálja is azonos:

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha}.$$

M-3. Szükség esetén alakítsa át a jelet $\varepsilon[k-r]f[k-r]$ típusú jelek összegére.

$(a)\ X(z)=z\dfrac{1-z^{-L}}{z-1}.$ $(b)\ X(z)=z\dfrac{1-a^{L}z^{-L}}{z-a}.$

$(c)\ X(z)=z\dfrac{\sin\Theta\left(1+z^{-L}\right)}{z^2-2(\cos\Theta)z+1};\ \Theta=\dfrac{\pi}{L}.$ $(d)\ X(z)=\dfrac{z}{L}\dfrac{1-2z^{-L}+z^{-2L}}{(z-1)^2}.$

Megszabadulhatunk a negatív kitevőktől, de a csak pozitív kitevőket tartalmazó alak nem előnyös.

M-4. Szükség esetén alakítsa át a jelet $\varepsilon(t-T)f(t-T)$ típusú jelek összegére.

$(a)\ X(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s}.$ $(b)\ X(s)=\dfrac{1-(sT+1)\mathrm{e}^{-sT}}{Ts^2}.$ $(c)\ X(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{-sT}}{s+\alpha}.$

$(d)\ X(s)=\dfrac{\pi}{T}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-sT}}{s^2+(\pi/T)^2}.$ $(e)\ X(s)=\dfrac{2-\mathrm{e}^{-sT}-\mathrm{e}^{-s2T}}{s}.$

A véges hosszúságú FI jelek Laplace-transzformáltja nem racionális, hanem meromorf függvény!

M-5. Alkalmazható a csillapítási tétel vagy a (31) összefüggés.

$(a)\ X(z)=\dfrac{A\left\{z^2-(\cos\Theta)z\right\}+B\,(\sin\Theta)z}{z^2-2a(\cos\Theta)z+a^2}.$

$(b)\ X(z)=\dfrac{Aa\,z}{(z-a)^2}.$ $(c)\ X(z)=z\dfrac{(\cos\Theta)z^2-2z+\cos\Theta}{\left(z^2-2(\cos\Theta)z+1\right)^2}.$

Az $x[k]$ és az $\varepsilon[k]x[k]$ Laplace-transzformáltja megegyezik.

M-6. Alkalmazható a csillapítási tétel vagy a (31) összefüggés.

$(a)\ X(s)=\dfrac{A(s+\alpha)+B\,\Omega}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}\equiv\dfrac{A\,s+(A\,\alpha+B\,\Omega)}{s^2+2\,\alpha\,s+\left(\alpha^2+\Omega^3\right)}.$

$(b)\ X(s)=\dfrac{A}{(s+\alpha)^2}.$

$(c)\ X(s)=A\dfrac{s^2-\Omega^2}{\left(s^2+\Omega^2\right)^2}.$

Az $x(t)$ és az $\varepsilon(t)x(t)$ Laplace-transzformáltja megegyezik.

M-7. Az F-1.-ben: (c) és (e), ha $|a|<1$.
Az F-2.-ben: (c) és (d), ha $\alpha>0$.
Az F-3.-ban: valamennyi.
Az F-4.-ben: valamennyi.
Az F-5.-ben: (b), ha $|a|<1$.
Az F-6.-ban: (a) és (b), ha $\alpha>0$.

***M-8.** Ha $x[k]$ belépő és $L \in \mathbf{N}$ vagy ha $x(t)$ belépő és $T \in \mathbf{R}_+$, akkor

$$\mathscr{Z}\{\delta[k-L]*x[k]\}=z^{-L}X(z); \quad \mathscr{L}\{\delta(t-T)*x(t)\}=\mathrm{e}^{-sT}X(s).$$

Ebből a tétel $L \in \mathbf{N}$ illetve $T \in \mathbf{R}_+$ esetén már következik a mondott feltételek mellett. Valójában ezek a kikötések fölöslegesek, mert a megadott alak általános érvényű.

M-9. Nem mindig igaz, hogy csak szorozni vagy osztani kell az s változóval!

$$[\varepsilon(t)\cos\Omega t]'=\delta(t)-\Omega\,\varepsilon(t)\sin\Omega t \Rightarrow \mathscr{L}\{\varepsilon(t)\sin\Omega t\}=\frac{1}{\Omega}\left[1-s\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right]\equiv\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2},$$

ami ismert módon a helyes eredmény. A $\cos\Omega t$ és az $\varepsilon(t)\cos\Omega t$ Laplace-transzformáltja megegyezik, de deriváltjuk Laplace-transzformáltja már nem, mert az utóbbi jel a $t=0$ helyen nem folytonos.

$$\int_{-0}^{t}\varepsilon(\tau)\cos\Omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\Omega}\varepsilon(t)\sin\Omega t \Rightarrow \mathscr{L}\{\varepsilon(t)\sin\Omega t\}=\Omega\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\Omega^2}\equiv\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2},$$

ami ismét a helyes eredmény. A $\cos\Omega t$ függvény helyett a $\sin\Omega t$ függvényből is kiindulhatunk, ezt nem részletezzük.

M-10. A (34) és a (35) felhasználásával

$$(a)\ x[0]=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2(z-0{,}5)}=0; \qquad x(+0)=\lim_{\substack{s\to\infty\\ \mathscr{R}e\{s\}>0}} s\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s+3}=1;$$

$$x[\infty]=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2(z-0{,}5)}=0; \qquad x(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s+3}=0.$$

(b) $x[0]=0$; $x(+0)=1$, mint előbb, de $x[\infty]$ illetve $x(\infty)$ nem számítható a (35) felhasználásával, mert a feltételek nincsenek kielégítve.

***M-11.** A (3.2-16) és a (3.2-18) felhasználásával

$$g[k]=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-1}\right\}\equiv\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta})+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta})}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta}}\right\}=\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}k+\delta[k]],$$

$$g(t)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right\}=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}t.$$

A $g[k]$ vagy a $g(t)$ függvény értelmezett, nem belépő jel, nem egyezik meg a DI illetve a FI egységugrással, amelynek Laplace-transzformáltjából kiindultunk. Az egységugrás Fourier-transzformáltja nem határozható meg a Laplace-transzformáltjából $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítéssel. Ez megállapítható akár az időtartománybeli, akár a komplex frekvenciatartománybeli alakjából.

A feladat és megoldása azt mutatja, hogy a formális eljárás kellő körültekintés nélkül hibás eredményre vezethet.

4.1-2. A DI és a FI Laplace-transzformáció inverziója

4.1-2.1. A módszerek áttekintése

Különféle számítási eljárások ismertek az $X(z)$ illetve az $X(s)$ ismeretében az $x[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}$ illetve az $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ időfüggvény számítására, vagyis az inverz DI illetve FI Laplace-transzformáció elvégzésére, a visszatérésre az időtartományba.

Az általános eljárás a (4) inverziós integrál alkalmazása a reziduum-tétel felhasználásával (4.1-1.6. pont). Ez azonban nem szükséges az általunk tárgyalandó feladatok megoldásához.

Szerencsés esetben felismerhetjük, hogy $X(z)$ vagy $X(s)$ egy ismert $x[k]$ illetve $x(t)$ Laplace-transzformáltja. Néha valamilyen tétel felhasználásával állíthatjuk elő az időfüggvényt. Például $X(z)=z^{-2}G(z)$ illetve $X(s)=\mathrm{e}^{-2s}G(s)$ esetén $x[k]$ vagy $x(t)$ előállítása egyszerű, ha $g[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{G(z)\}$ illetve $g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$ ismert.

Ebben a szakaszban két olyan eljárást tárgyalunk, amelyek nem általános érvényűek, de a gyakorlati feladatok nagy többségében használhatók. Mindkét eljárás biztosan alkalmazható, ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális függvény, továbbá általánosítható arra az esetre, amikor $X(s)$ nem csak s egész hatványait tartalmazza, hanem e^{-sT_i} $(T_i>0)$ típusú tényezőket is. Az első módszer polinomosztást igényel és többnyire az időfüggvény egy közelítését adja. A második módszer részlettörtekre bontást igényel. Utóbbi esetben szükség lehet egy polinomosztáson alapuló előkészítő lépésre.

Numerikus eljárások alkalmazhatják a polinomosztás módszerét (ez főként a DI esetben használatos) vagy a részlettörtekre bontás módszerét is. Mint már említettük, az inverz Laplace-transzformáció numerikusan elvégezhető. A numerikus közelítő eljárásokat nem részletezzük a továbbiakban.

4.1-2.2. Inverz transzformáció polinomosztással

Legyen $X(z)$ a z illetve $X(s)$ az s változó *racionális* függvénye, vagyis két polinom hányadosa. Mint már láttuk, a számláló fokszáma nem lehet nagyobb a nevező fokszámánál. A függvények általános alakja ekkor

$$X(z)=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\ldots+b_{n-1}z+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n};$$
$$X(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}. \tag{4.1-47}$$

A nevező a_0 együtthatóját az általánosság csorbítása nélkül célszerűen 1-nek választottuk. Tetszőleges számú a_i vagy b_i együtthatók értéke nulla lehet.

Osszuk el a változó csökkenő hatványai szerint rendezett számlálót a nevezővel. Az első tag b_0 lesz, ha $b_0\neq 0$, míg az ellenkező esetben b_1z^{-1} illetve b_1s^{-1}, ha $b_1\neq 0$, és így tovább. Ekkor egy z^{-1} illetve $s^{-1}\equiv 1/s$ szerinti hatványsort kapunk:

$$X(z)=c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+c_3z^{-3}+\ldots;$$
$$X(s)=c_0+c_1\frac{1}{s}+c_2\frac{1}{s^2}+c_3\frac{1}{s^3}+\ldots. \tag{4.1-48}$$

Az $X(z)$ sorának egyes tagjai akár az (1) definíció, akár a (6) alapján transzformálhatók vissza. Az $X(s)$ sorának egyes tagjai a (21) integrációs tétellel értelmezhetők. Az időfüggvény tehát a következő alakú:

$$\boxed{\begin{aligned} x[k] &= c_0\delta[k] + c_1\delta[k-1] + c_2\delta[k-2] + c_3\delta[k-3] + \ldots; \\ x(t) &= c_0\delta(t) + \varepsilon(t)\left\{c_1 + c_2\, t + \frac{1}{2!}c_3\, t^2 + \frac{1}{3!}c_4\, t^3 + \ldots\right\}. \end{aligned}} \qquad (4.1\text{-}49)$$

Az $x[k]$ kifejezése azt jelenti, hogy a módszer $x[0] = c_0$, $x[1] = c_1$, ... értékét pontosan megadja. Ha $X(z)$ eleve a z^{-1} polinomja, akkor nincs szükség polinomosztásra és a *véges hosszúságú* $x[k]$ jelet pontosan kapjuk meg. Általános esetben semmit sem tudunk azokról az $x[k]$ értékekről, amelyeket nem számítottunk ki. Speciális esetekben lehet valami elképzelésünk a jel további menetéről. Ha például $x[k]$ már sok ütemen át állandó, akkor feltételezhetjük, hogy ez az állandósult értéke. Ez a megfontolás teljesen hamis is lehet, hacsak nincs erre nézve valami elméleti indokunk.

Az $x(t)$ kifejezése azt jelenti, hogy a c_0 megadja az $x(t)$ jel Dirac-impulzus komponensét, míg a többi tag az $y(t) = x(t) - c_0\,\delta(t)$ függvénynek a $t = 0$ helyre vonatkozó Taylor-sorát adja. Ezek szerint $c_1 = y(+0)$ megadja az $y(t)$ jel kezdeti értékét, $c_2 = y'(+0)$ a kezdeti meredekségét, a további tagoknak már nem adható ilyen egyszerű értelmezés. Ezzel az $x(t)$ egy olyan közelítését kapjuk, amelynek hibája rendszerint annál kisebb, minél kisebb t értéke. Nem egyszerű feladat a közelítés hibáját vagy annak egy korlátját akár csak becsülni is, vagy megtalálni azt a $t_{\max}$ értéket, ameddig egy adott fokszámú közelítés egy hibahatáron belül marad.

Példa Határozzuk meg $x[k]$ értékét a k = 0, 1, 2, 3 és 4 ütemekre, ha a jel DI Laplace-transzformáltja

$$X(z) = \frac{2\,z^3 - 1{,}2\,z^2 + 1{,}1\,z - 1{,}1}{z^4 - 0{,}6\,z^3 + 0{,}05\,z^2}.$$

A polinomosztás szerkezete például:

$$\begin{array}{l} \left(2\,z^3 - 1{,}2\,z^2 + 1{,}1\,z - 1{,}1\right) : \left(z^4 - 0{,}6\,z^3 + 0{,}05\,z\right) = 2\,z^{-1} + 1\,z^{-3} - 0{,}5\,z^{-4} \\ \underline{-2\,z^3 + 1{,}2\,z^2 - 0{,}1\,z} \\ \qquad\qquad 1{,}0\,z - 1{,}1 \\ \qquad\qquad \underline{-1{,}0\,z + 0{,}6 - 0{,}05\,z^{-1}} \\ \qquad\qquad\qquad -0{,}5 - 0{,}05\,z^{-1} \end{array}$$

Ebből következik, hogy $x[0] = 0$, $x[1] = 2$, $x[2] = 0$, $x[3] = 1$, $x[4] = -0{,}5$. A további $x[k]$ értékek ismeretlenek, amíg nem végzünk el további osztásokat. A megoldás egy másik alakja $x[k] = 2\,\delta[k-1] + \delta[k-3] - 0{,}5\,\delta[k-4] + \ldots$.

Ellenőrizhetjük, hogy a pólusok az egységsugarú körön belül helyezkednek el (esetleg ki is számíthatjuk az értéküket: $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}5$, $q_3 = q_4 = 0$). A (18) értelmében $x[\infty] = \lim\limits_{z\to 1}\{(z-1)\,X(z)\} = 0$.

Az utolsó számított $x[4] = -0{,}5$ érték nem elég kicsi ahhoz, hogy feltételezhessük: $x[k]$ már elhanyagolható, ha $k \geq 5$.

A következő pontban ezt a példát egy más módszerrel is meg fogjuk oldani. #

4.1-2.3. Inverz transzformáció részlettörtekre bontással

A DI és a FI Laplace-transzformáció egy hatékony módszere a részlettörtekre bontáson alapul. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a két esetben a részlettörtek kissé eltérő alakúak.

Ebben a pontban arra az esetre szorítkozunk, amikor a visszatranszformálandó függvény *racionális*, általános alakja a (47) szerinti

$$X(z)=\frac{b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+b_2 z^{n-2}+\ldots+b_{n-1}z+b_n}{z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n};$$
$$X(s)=\frac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}. \qquad (4.1\text{-}50)$$

Ha $X(z)$ kifejezésében $b_n=0$ illetve ha $X(s)$ kifejezésében $b_0=0$, akkor elkezdhetjük a részlettörtekre bontást. Egyébként egy előkészítő lépésre van szükségünk (l. alább). Az előkészítő lépés akkor is hasznos, ha $X(z)$ kifejezésében az $a_n, a_{n-1}, \ldots$ együtthatók mind nulla értékűek.

Számítógépes programmal többnyire közvetlenül elő tudjuk állítani a visszatranszformálásra alkalmas részlettörtekre bontott alakot.

A részlettörtekre bontás előkészítése

Szükség esetén alakítsuk át akár elemi megfontolással, akár polinomosztással $X(z)$ vagy $X(s)$ kifejezését a következő alakra:

$$X(z)=c_0+c_1 z^{-1}+c_2 z^{-2}+\ldots+c_{r-1}z^{-(r-1)}+z^{-r}F(z),$$
$$F(z)\equiv z\frac{\beta_1 z^{n-1}+\beta_2 z^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}z+\beta_n}{z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n}; \qquad (4.1\text{-}51)$$
$$X(s)=c_0+G(s), \qquad G(s)\equiv\frac{\beta_1 s^{n-1}+\beta_2 s^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}.$$

Ez azt jelenti, hogy $F(z)/z$ illetve $G(s)$ *valódi* törtfüggvény: számlálójának fokszáma kisebb, mint nevezőjének fokszáma. Ez a tulajdonság kifejezhető úgy is, hogy

$$\lim_{z\to\infty}\frac{F(z)}{z}=0; \qquad \lim_{s\to\infty}G(s)=0.$$

Az $X(z)$ kifejezésében az r legkisebb értéke a függvény által meghatározott. Nem követünk el hibát, ha a polinomosztást a szükségesnél tovább folytatjuk, csak ekkor $x[k]$ kifejezése nem a legegyszerűbb lesz.

A következőkben $f[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}$ illetve $g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$ meghatározását tárgyaljuk. Ezek ismeretében $x[k]$ vagy $x(t)$ a következő alakot ölti:

$$x[k]=c_0\delta[k]+c_1\delta[k-1]+\ldots+c_{r-1}\delta[k-(r-1)]+\varepsilon[k-r]f[k-r];$$
$$x(t)=c_0\,\delta(t)+\varepsilon(t)\,g(t). \qquad (4.1\text{-}52)$$

Ez azt jelenti, hogy $x[k]$ a $k=0, 1, 2,\ldots, r-1$ ütemekre egy adathalmazzal (az r számú c_i együtthatóval) fejezhető ki és csak a $k\geq r$ ütemekre írható le egy $f[k]$ elemi függvénnyel.

1. példa Adott a következő DI Laplace-transzformált:

$$V(z)=\frac{z-1{,}1}{z^4-0{,}6\,z^3+0{,}05\,z^2}.$$

Közvetlenül látható, hogy ennek az (51) szerinti alakja

$$V(z)=z^{-3}z\frac{z-1{,}1}{z^2-0{,}6\,z+0{,}05},$$

amelyben $n = 2$ és $r = 3$. Az átalakítás nem igényelt polinomosztást. #

2. példa Adott a következő DI Laplace-transzformált:

$$X(z)=\frac{2\,z^3-1{,}2\,z^2+1{,}1\,z-1{,}1}{z^4-0{,}6\,z^3+0{,}05\,z^2}\equiv z^{-2}\,\frac{2\,z^3-1{,}2\,z^2+1{,}1\,z-1{,}1}{z^2-0{,}6\,z+0{,}05}.$$

Az első alakban szereplő racionális függvény valódi tört, negyedfokú nevezőjének viszont kétszeres nullahelye van a $z = 0$ helyen. A második alakban szereplő tört nevezője csak másodfokú, viszont ez a tört nem valódi. Alakítsuk ezt át osztással:

$$\begin{array}{l}(2\,z^3-1{,}2\,z^2+1{,}1\,z-1{,}1):(z^2-0{,}6\,z+0{,}05)=2\,z\\ \underline{-2\,z^3+1{,}2\,z^2-0{,}1\,z}\\ \qquad\qquad 1{,}0\,z-1{,}1\end{array}$$

Ennek alapján kapjuk a függvény következő, (51) szerinti alakját:

$$X(z)=2\,z^{-1}+z^{-3}\,z\frac{z-1{,}1}{z^2-0{,}6\,z+0{,}05}.$$

Az $x[k]$ számítását később végezzük el. #

3. példa Adott a következő FI Laplace-transzformált:

$$X(s)=\frac{2\,s^2+7\,s+2}{s^2+3\,s+2}.$$

Ez nem valódi tört. Az átalakítást elvégezhetjük akár polinomosztással, akár elemi átalakítással $\lim\limits_{s\to\infty}X(s)=2$ felhasználásával:

$$X(s)=2+\left(\frac{2\,s^2+7\,s+2}{s^2+3\,s+2}-2\right)=2+\frac{s-2}{s^2+3\,s+2}.$$

Ez az (51) szerinti alak. Az $x(t)$ meghatározásával később foglalkozunk. #

4. példa Az $X(z)$ legcélszerűbb alakja nem feltétlenül az (51) szerinti. Legyen

$$X(z)=\frac{z}{z-0{,}9}-z^{-10}\frac{z}{z-0{,}9}\;\Rightarrow\;X(z)=\frac{z}{z-0{,}9}-\frac{z}{z^{10}\,(z-0{,}9)}\equiv\frac{z^{11}-z}{z^{11}-0{,}9\,z^{10}}.$$

Az eredeti alakból azonnal látható, hogy az időfüggvény

$$x[k]=\varepsilon[k]\,0{,}9^k-\varepsilon[k-10]\,0{,}9^{k-10}\equiv\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-10]\}\,0{,}9^k-\varepsilon[k-10]\,(1-0{,}9^{10})\,0{,}9^{k-10}.$$

Az utolsó alakból (itt nem részletezett polinomosztással) kapjuk, hogy

$$X(z)=1+0{,}9\,z^{-1}+0{,}9^2z^{-2}+0{,}9^3z^{-3}+0{,}9^4z^{-4}+0{,}9^5z^{-5}+0{,}9^6z^{-6}+0{,}9^7z^{-7}+$$
$$+0{,}9^8z^{-8}+0{,}9^9z^{-9}+\left(-1+0{,}9^{10}\right)z^{-10}\frac{z}{z-0{,}9};\quad -1+0{,}9^{10}=-0{,}651.$$

$$x[k]=\delta[k]+0{,}9\,\delta[k-1]+0{,}9^2\delta[k-2]+0{,}9^3\delta[k-3]+0{,}9^4\delta[k-4]+0{,}9^5\delta[k-5]+$$
$$+0{,}9^6\delta[k-6]+0{,}9^7\delta[k-7]+0{,}9^8\delta[k-8]+0{,}9^9\delta[k-9]-\left(1-0{,}9^{10}\right)\varepsilon[k-10]0{,}9^{k-10}.$$

Az $x[k]$ két alakja ugyanazt a DI jelet írja le, de az első alak kényelmesebb. #

Gyakran célszerű (mint a 4. példa illusztrálja) az

$$X(z)=X_0(z)+z^{-L_1}X_1(z)+z^{-L_2}X_2(z)+\ldots+z^{-L_n}X_n(z);\quad 0<L_1<L_2<\ldots<L_n \tag{4.1-53}$$

alakban megadott DI Laplace-transzformálthoz tartozó időfüggvényt

$$x[k]=\varepsilon[k]x_0[k]+\varepsilon[k-L_1]x_1[k-L_1]+\ldots+\varepsilon[k-L_n]x_n[k-L_n] \tag{4.1-54}$$

alakban megadni vagy az ebből rendszerint elemi átalakítással származtatható

$$\begin{aligned}x[k]=&\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L_1]\}g_0[k]+\{\varepsilon[k-L_1]-\varepsilon[k-L_2]\}g_1[k]+\\&+\ldots+\{\varepsilon[k-L_{n-1}]-\varepsilon[k-L_n]\}g_{n-1}[k]+\varepsilon[k-L_n]g_n[k-L_n]\end{aligned} \tag{4.1-55}$$

alakban, vagyis ablakozott jelek összegeként.

Ha az $X(s)$ FI Laplace-transzformált nem racionális, akkor egy hasonló átalakítás elkerülhetetlen. Ezzel az esettel a következő pontban foglalkozunk.

Racionális függvény pólusai

Tekintsünk egy olyan $F(z)/z$ illetve $G(s)$ racionális függvényt, amely ***valódi tört***, vagyis egy polinom osztva egy nála nagyobb fokszámú polinommal:

$$\begin{aligned}F(z)&\equiv z\frac{P(z)}{Q(z)}\equiv z\frac{\beta_1 z^{n-1}+\beta_2 z^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}z+\beta_n}{z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n},\\G(s)&\equiv\frac{P(s)}{Q(s)}\equiv\frac{\beta_1 s^{n-1}+\beta_2 s^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}.\end{aligned} \tag{4.1-56}$$

A racionális függvénynek ott van *pólusa*, ahol végtelenné válik, vagyis ott lehet pólusa, ahol nevezője nulla. Jelölje a nevező nullahelyeit $z=q_i$ illetve $s=p_i$, tehát

$$\begin{aligned}Q(z)&\equiv z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n;\quad z=q_1,q_2,\ldots,q_n;\\Q(s)&\equiv s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n;\quad s=p_1,p_2,\ldots,p_n.\end{aligned} \tag{4.1-57}$$

Ha van olyan $z=q_i$ illetve $s=p_i$ érték, amely nem csak a nevezőnek, hanem a számlálónak is nullahelye, akkor az nem feltétlenül pólusa vagy zérusa a függvénynek. Ha például $z=q_i$ illetve $s=p_i$ a nevezőnek is és a számlálónak is egyszeres nullahelye, akkor az sem nem pólus, sem nem zérus. A közös nullahelyek és azok multiplicitása meghatározható a két egyenlet gyökeinek számításával, de más módon is. A továbbiakban a nevező nullahelyeit ennek ellenére pólusoknak fogjuk nevezni. Ez nem okoz az inverz transzformáció során zavart, legfeljebb bizonyos C_i vagy D_i állandók (l. alább) nulla

értékűeknek adódnak. Az egymáshoz nagyon közeli vagy megegyező pólusok és zérusok fellépése numerikus bizonytalanság forrása lehet.

Mivel a pólusok egy valós együtthatós n-edfokú polinom nullahelyei, ezért azok vagy *valósak*, vagy *konjugált komplex* párokat alkotnak. Utóbbiakat célszerű együtt tekinteni, mert ekkor a fizikailag indokolt valós értékű eredményhez jutunk.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a pólusok egyszeresek (vagyis egymástól különbözőek), azután rátérünk az általánosabb, ritkán előforduló eset tárgyalására.

A DI esetben az egységnyi abszolút értékű, az FI esetben a képzetes pólusok egyszeres vagy többszörös volta között elvileg lényeges különbség lehet, amint a stabilitás tárgyalása során látni fogjuk.

Racionális függvény egyszeres pólusokkal

Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor $q_i \neq q_j$, illetve $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$ esetén), vagyis amikor a függvény pólusai mind egyszeresek. A pólusok ismeretében $F(z)$ illetve $G(s)$ nevezője felírható gyöktényezős alakban:

$$F(z) \equiv z\frac{P(z)}{Q(z)} \equiv z\frac{P(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)}; \quad G(s) \equiv \frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}.$$

A P polinom fokszáma kisebb mint a nevező n fokszáma. Az $F(z)/z$ illetve a $G(s)$ racionális függvény ekkor felírható részlettörtjeinek összegeként:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_1}{z-q_1} + \frac{C_2}{z-q_2} + \ldots + \frac{C_n}{z-q_n}; \quad G(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{C_n}{s-p_n}.$$

A C_1 együttható a következőképpen számítható például az első alakban:

$$C_1 = \lim_{z \to q_1}\left\{(z-q_1)\frac{P(z)}{Q(z)}\right\} = \frac{P(q_1)}{Q_1(q_1)}, \quad Q_1(z) \equiv \frac{Q(z)}{z-q_1}.$$

A $P(q_1)$ a $P(z)$ polinom helyettesítési értéke a $z = q_1$ helyen. A nevezőben szereplő $Q_1(z) = (z-q_2)(z-q_3)\cdots(z-q_n)$ polinom úgy állítható elő, hogy $Q(z)$ gyöktényezős alakjában elhagyjuk a $(z-q_1)$ tényezőt. A többi C_i együttható hasonló módon számítható.

A $G(s)$ részlettörtekre bontott alakja nem igényel külön magyarázatot, csak bizonyos betűk cseréjéről van szó.

A (16) értelmében a részlettörtekhez tartozó időfüggvény

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-q}\right\} = \varepsilon[k]q^k; \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{pt}.$$

Ezek után akár a DI, akár a FI teljes időfüggvény már felírható.

Alább képletszerűen is összefoglaljuk eredményeinket. Célszerűbb azonban a képlet helyett az eljárás lényegét megjegyezni, tehát azt, hogy a $F(z)/z$ illetve a $G(s)$ valódi törtfüggvényt részlettörtekre bontjuk és tagonként visszatranszformáljuk.

Legyen az $F(z)$ diszkrét idejű Laplace-transzformált *racionális* függvény *egyszeres pólusokkal*, akkor az $f[k] = \mathscr{Z}^{-1}\{F(z)\}$ diszkrét idejű jel kifejezése az $F(z)$ részlettörtekre bontott alakja alapján (amelyet nem szükséges felírni)

$$\text{DI:}\quad F(z)=z\frac{P(z)}{Q(z)}\equiv z\frac{P(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)};$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}=0,\quad Q_i(q_i)=\left.\frac{Q(z)}{z-q_i}\right|_{z=q_i}\neq 0;\quad C_i=\frac{P(q_i)}{Q_i(q_i)};\qquad (4.1\text{-}58)$$

$$f[k]=\varepsilon[k]\sum_{i=1}^{n}C_i\,q_i^k\quad;\qquad k\in\mathbf{Z}.$$

Az n számú $Q_i(q_i)\neq 0$ feltétel fejezi ki azt, hogy a pólusok egyszeresek.

Legyen a $G(s)$ folytonos idejű Laplace-transzformált *racionális* függvény *egyszeres pólusokkal*, akkor a $g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$ folytonos idejű jel kifejezése a $G(s)$ részlettörtekre bontott alakja alapján (amelyet nem szükséges felírni)

$$\text{FI:}\quad G(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\equiv\frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)};$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{P(s)}{Q(s)}=0,\quad Q_i(p_i)=\left.\frac{Q(s)}{s-p_i}\right|_{s=p_i}\neq 0;\quad C_i=\frac{P(p_i)}{Q_i(p_i)};\qquad (4.1\text{-}59)$$

$$g(t)=\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{n}C_i\mathrm{e}^{p_i t};\quad t\in\mathbf{R}.$$

Az n számú $Q_i(p_i)\neq 0$ feltétel fejezi ki azt, hogy a pólusok egyszeresek.

Ha két pólus konjugált komplex párt alkot, vagyis ha $q_i=r_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta_i}, q_{i+1}=r_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta_i}$ illetve ha $p_i=\sigma_i+\mathrm{j}\,\Omega_i$, $p_{i+1}=\sigma_i-\mathrm{j}\,\Omega_i$, akkor a megfelelő együtthatók is konjugált párokat alkotnak: $C_i=B_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i}, C_{i+1}=B_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_i}$. A megfelelő DI illetve FI jelek összege csillapított szinuszos jel:

$$\begin{aligned}&B_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i}r_i^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta_i k}+B_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_i}r_i^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta_i k}=2\,B_i r_i^k\cos(\Theta_i k+\beta_i);\\&B_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i}\mathrm{e}^{\sigma_i t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_i t}+B_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_i}\mathrm{e}^{\sigma_i t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_i t}=2\,B_i\mathrm{e}^{\sigma_i t}\cos(\Omega_i t+\beta_i).\end{aligned}\qquad (4.1\text{-}60)$$

Ennek felhasználása valamelyest egyszerűsíti a számítást.

Érdemes megemlíteni, hogy mivel $Q(q_i)=0$, ezért

$$Q_i(q_i)=\lim_{z\to q_i}\frac{Q(z)}{z-q_i}=\lim_{z\to q_i}\frac{Q(z)-Q(q_i)}{z-q_i}=\left.\frac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=q_i}.$$

Igazolható, hogy a

$$Q_i(q_i)=\left.\frac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=q_i},\quad Q_i(p_i)=\left.\frac{\mathrm{d}Q(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=p_i}$$

összefüggés akkor is alkalmazható, ha Q nem polinom, hanem ún. egész függvény, vagyis olyan komplex függvény, amely változójának bármely véges értékére véges értékű. Ilyen például az exponenciális függvény.

5. példa A 2. példában az ott megadott $X(z)$ függvényt a következő alakra hoztuk:

$$X(z)=2\,z^{-1}+z^{-3}\,\frac{z\,(z-1{,}1)}{z^2-0{,}6z+0{,}05}\,.$$

A $Q(z)\equiv z^2-0{,}6\,z+0{,}05=0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk a függvény két pólusát: $q_1=0{,}1$, $q_2=0{,}5$. A részlettörtekre bontott alak

$$X(z)=2\,z^{-1}+z^{-3}\,\frac{z\,(z-1{,}1)}{(z-0{,}1)(z-0{,}5)}=2\,z^{-1}+z^{-3}\left\{\frac{C_1 z}{z-0{,}1}+\frac{C_2 z}{z-0{,}5}\right\};$$

$$C_1=\left.\frac{z-1{,}1}{z-0{,}5}\right|_{0{,}1}=2{,}5\,,\quad C_2=\left.\frac{z-1{,}1}{z-0{,}1}\right|_{0{,}5}=-1{,}5\,.$$

Az $X(z)$ inverz transzformáltja az (58) értelmében

$$x[k]=2\,\delta[k-1]+\varepsilon[k-3]\left\{2{,}5\,(0{,}1)^{k-3}-1{,}5\,(0{,}5)^{k-3}\right\}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk az $x[k]$ DI jel értékét az első néhány ütemre: $x[0]=0$, $x[1]=2$, $x[2]=0$, $x[3]=1$, $x[4]=-0{,}5$. Ez megegyezik az előző pont példájában, a polinomosztással kapott eredményünkkel. A most kapott általános alakból viszont közvetlenül látható, hogy $x[k]$ nullához tart k növekedésével. #

6. példa A 3. példában az $X(s)$ függvényt a következő alakra hoztuk:

$$X(s)=2+\frac{s-2}{s^2+3\,s+2}\,.$$

A $Q(s)\equiv s^2+3\,s+2=0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk a függvény két pólusát: $p_1=-1$, $p_2=-2$. A részlettörtekre bontott alak

$$X(s)=2+\frac{s-2}{(s+1)(s+2)}=2+\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+2}\,;\quad C_1=\frac{-1-2}{-1+2}=-3\,,\quad C_2=\frac{-2-2}{-2+1}=4\,.$$

Az $X(s)$ inverz transzformáltja

$$x(t)=2\,\delta(t)+\varepsilon(t)\left\{-3\,\mathrm{e}^{-t}+4\,\mathrm{e}^{-2t}\right\}.$$

Ellenőrzésként: $x(+0)=\lim\limits_{s\to\infty} s\,X(s)=\infty$ és $\lim\limits_{s\to\infty} s\,\{X(s)-2\}=1$. Másrészt az időfüggvényből: ha $t\to 0$, akkor $x(t)\approx 2\,\delta(t)$ és $x(t)-2\,\delta(t)=1$. #

*4.1-2.4. Inverz transzformáció többszörös pólusok esetén

Tekintsük most azt az általánosabb esetet, amikor a visszatranszformálandó *racionális* $F(z)$ vagy $G(s)$ függvénynek egyszeres pólusa van a $z=q_1, q_2, \ldots, q_h$ helyen illetve az $s=p_1, p_2, \ldots, p_h$ helyen, míg a $z=q_{h+1}$ illetve az $s=p_{h+1}$ helyen lévő pólus többszörös, multiplicitása $r=n-h$. A függvények ekkor felírhatók a következő alakban:

$$F(z)\equiv z\,\frac{P(z)}{Q(z)}\equiv\frac{z\,P(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_h)(z-q_{h+1})^r}\,;$$
$$G(s)\equiv\frac{P(s)}{Q(s)}\equiv\frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_h)(s-p_{h+1})^r}\,. \qquad (4.1\text{-}61)$$

Itt a P polinom fokszáma kisebb mint a nevező $n = r + h$ fokszáma. A függvények részlettörtekre bontott alakja

$$F(z)=\sum_{i=1}^{h}\frac{C_i z}{z-q_i}+\sum_{i=1}^{r}\frac{D_i z}{(z-q_{h+1})^i};\quad G(s)=\sum_{i=1}^{h}\frac{C_i}{s-p_i}+\sum_{i=1}^{r}\frac{D_i}{(s-p_{h+1})^i}. \tag{4.1-62}$$

Az egyszeres pólusokhoz tartozó C_i $(i=1,2,\ldots,h)$ együtthatók ugyanúgy számíthatók, mint az előző pontban már láttuk:

$$C_i=\frac{P(q_i)}{Q_i(q_i)},\ Q_i(q_i)=\left.\frac{Q(z)}{z-q_i}\right|_{z=q_i};\quad C_i=\frac{P(p_i)}{Q_i(p_i)},\ Q_i(p_i)=\left.\frac{Q(s)}{s-p_i}\right|_{s=p_i}. \tag{4.1-63}$$

Hasonló megfontolással kapjuk a legnagyobb kitevőhöz tartozó D_r együtthatót:

$$D_r=\frac{P(q_{h+1})}{Q_{h+1}(q_{h+1})},\ Q_{h+1}(q_{h+1})=\left.\frac{Q(z)}{(z-q_{h+1})^r}\right|_{z=q_{h+1}};\ D_r=\frac{P(p_{h+1})}{Q_{h+1}(p_{h+1})},\ Q_{h+1}(p_{h+1})=\left.\frac{Q(s)}{(s-p_{h+1})^r}\right|_{s=p_{h+1}}. \tag{4.1-64}$$

Ténylegesen azt tehetjük, hogy a nevezőben az i-edik, vagy a $(h+1)$-edik tényezőt 1-gyel helyettesítjük, a többi tényezőben elvégezzük a $z = q_i$ vagy $z = q_{h+1}$ illetve az $s = p_i$ vagy $s = p_{h+1}$ helyettesítést.

Meg kell még határoznunk a $D_1, D_2, \ldots, D_{r-1}$ együtthatókat. Ennek egy módszere a következő lehet. Válasszunk tetszőleges valós $z = z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ illetve $s = s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}$ értékeket (egyik sem lehet pólus!), helyettesítsük ezeket a (62)-be. Ezzel $r-1$ számú lineáris egyenletet kapunk az ugyanennyi még ismeretlen D_i együtthatóra.

Az együtthatók meghatározhatók közös nevezőre hozással és az egyes hatványfüggvények együtthatóinak egyenlőségét kifejező $r + h$ számú egyenletből adódó lineáris egyenletrendszer megoldásával.

A D_i együtthatók számítására általános összefüggés is adható, de annak alkalmazása bonyolultsága miatt nem célszerű.

A (62) szerinti felbontás C_i és D_i együtthatóinak ismeretében előállíthatjuk az időfüggvényt. A (19) vagy a (21) értelmében

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-q)^{m+1}}\right\}=\varepsilon[k]\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-[m-1])}{m!}q^{k-m};$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p)^{m+1}}\right\}=\varepsilon(t)\frac{1}{m!}t^m\,\mathrm{e}^{pt};\quad m=1,2,\ldots.$$

Foglaljuk össze a többszörös pólus esetére vonatkozó eredményeinket.

A *diszkrét idejű inverz Laplace-transzformáció* racionális függvények esetén a részlettörtekre bontott alak ismeretében, egyetlen többszörös pólust is megengedve

$$F(z)=\sum_{i=1}^{h}\frac{C_i z}{z-q_i}+\frac{D_1 z}{z-q_{h+1}}+\frac{D_2 z}{(z-q_{h+1})^2}+\ldots+\frac{D_r z}{(z-q_{h+1})^r}, \tag{4.1-65}$$

$$f[k]=\varepsilon[k]\left\{\sum_{i=1}^{h}C_i q_i^k+\left(D_1+D_2\frac{k}{q_{h+1}}+D_3\frac{k(k-1)}{2!\,q_{h+1}^2}+\ldots+D_r\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-[r-2])}{(r-1)!\,q_{h+1}^{r-1}}\right)q_{h+1}^k\right\}.$$

Az $f[k]$ kifejezése elemi rendezés után átírható a következő, áttekinthetőbb alakra:

$$f[k]=\varepsilon[k]\left\{\sum_{i=1}^{h} C_i q_i^k+\left(D_1+B_1 k+B_2 k^2+\ldots+B_{r-1} k^{r-1}\right) q_{h+1}^k\right\}. \tag{4.1-66}$$

A *folytonos idejű inverz Laplace-transzformáció* racionális függvények esetén a részlettörtekre bontott alak ismeretében, egyetlen többszörös pólust is megengedve

$$\begin{aligned} G(s)&=\sum_{i=1}^{h}\frac{C_i}{s-p_i}+\frac{D_1}{s-p_{h+1}}+\frac{D_2}{(s-p_{h+1})^2}+\ldots+\frac{D_r}{(s-p_{h+1})^r},\\ g(t)&=\varepsilon(t)\left\{\sum_{i=1}^{h} C_i \mathrm{e}^{p_i t}+\left(D_1+D_2 t+D_3\frac{t^2}{2!}+\ldots+D_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right)\mathrm{e}^{p_{h+1}t}\right\}. \end{aligned} \tag{4.1-67}$$

Az eljárás hasonló, ha a visszatranszformálandó függvénynek tetszőleges számú többszörös pólusa van. Ha a többszörös pólus komplex, akkor konjugált párokat alkot; ekkor elegendő az egyiket tekinteni és a hozzá tartozó időfüggvény valós részének kétszeresét venni.

Az r-szeres pólus számítástechnikailag kikerülhető, ha azt r számú, egymáshoz nagyon közeli pólussal helyettesítjük. Ha például $q_1 = 0{,}5$ egy háromszoros pólus, akkor helyettesíthetjük például a $q_1 = 0{,}5$, $q_2=0{,}4999$, $q_3=0{,}5001$ három egyszeres pólussal. Minél közelebbi pólusokat választunk, annál kisebb lesz a helyettesítés által okozott hiba, de annál nagyobb a veszélye annak, hogy a közeli számok különbségeként előálló kis szám numerikus bizonytalanságot okoz. Gyakran éppen az ellenkező eljárás növeli a számítás megbízhatóságát, amikor igen közeli pólusokat egyetlen, többszörös pólussal helyettesítünk.

1. példa Határozzuk meg az $x[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}$ DI jelet, ha

$$X(z)=\frac{9z^2+5z-1}{z(z+2)(z-0{,}5)^2}\equiv z^{-2}\frac{z\left(9z^2+5z-1\right)}{(z+2)(z-0{,}5)^2}.$$

A második kifejezés már a célszerű $z^{-r}\,z\,P(z)/Q(z)$ alakú. A részlettörtekre bontott alak (a pólusok: $q_1 = -2$ egyszeres, $q_2 = 0{,}5$ kétszeres pólus):

$$X(z)=z^{-2}\left\{\frac{C_1 z}{z+2}+\frac{D_1 z}{z-0{,}5}+\frac{D_2 z}{(z-0{,}5)^2}\right\}.$$

A C_1 és a D_2 együttható nehézség nélkül számítható:

$$C_1=\left.\frac{9z^2+5z-1}{(z-0{,}5)^2}\right|_{z=-2}=4,\qquad D_2=\left.\frac{9z^2+5z-1}{z+2}\right|_{z=0{,}5}=1{,}5.$$

Ha $z\to\infty$, akkor a z^{-2} szorzója az eredeti alakban $\to 9$, a részlettörtekre bontott alakban pedig $\to C_1+D_1$. Ebből következik, hogy $D_1=9-C_1=5$. Ugyanezt az értéket kapjuk, ha például az $X(z)/z$ függvényt vizsgáljuk $z\to\infty$ esetén. Az időfüggvény ezek ismeretében

$$x[k]=\varepsilon[k-2]\left\{4(-2)^{k-2}+[5+1{,}5(k-2)]0{,}5^{k-2}\right\}.$$

Ha $k\to\infty$, akkor $x[k]\approx(-2)^k$, vagyis $|x[k]|$ korlátlanul növekszik. #

2. példa Határozzuk meg az $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ FI jelet, ha $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}$.

E függvény részlettörtekre bontott alakja ($p_1 = -1$, $p_2 = -2$, kétszeresek):

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}+\frac{B_1}{s+2}+\frac{B_2}{(s+2)^2}.$$

Az A_2 és a B_2 számítása egyszerű: $A_2=\left.\frac{1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=1$, $B_2=\left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=1$.

Az A_1 és a B_1 együttható meghatározására helyettesítsük például az $s=0, s=-3$ értékeket:

$$\frac{1}{4}=A_1+1+\frac{1}{2}B_1+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4}=\frac{1}{-2}A_1+\frac{1}{4}+\frac{1}{-1}B_1+1.$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása $A_1=-2$, $B_1=2$. Az időfüggvény kifejezése

$$x(t)=\varepsilon(t)\left\{(-2+t)\mathrm{e}^{-t}+(2+t)\mathrm{e}^{-2t}\right\}.$$

Az A_1 és a B_1 számítható $\lim\limits_{s\to\infty} s\,X(s)=0$ felhasználásával is. #

4.1-2.5. Nem racionális függvények inverz transzformációja

Gyakorlati fontossága miatt vizsgáljuk meg a következő FI Laplace-transzformált függvényt:

$$\boxed{X(s)=X_0(s)+\mathrm{e}^{-sT_1}X_1(s)+\mathrm{e}^{-sT_2}X_2(s)+\ldots+\mathrm{e}^{-sT_q}X_q(s);\quad 0<T_1<T_2<\ldots<T_q,\qquad (4.1\text{-}68)}$$

ahol minden $X_i(s)$ *racionális* függvény, az ezekhez tartozó $x_i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X_i(s)\}$ FI jelek az előző pontokban leírt módon elvi nehézség nélkül meghatározhatók. Az eltolási tétel alkalmazásával kapjuk az $X(s)$-hez tartozó időfüggvényt:

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)=\varepsilon(t)\,x_0(t)+\varepsilon(t-T_1)\,x_1(t-T_1)+\varepsilon(t-T_2)\,x_2(t-T_2)+\ldots\\ +\ldots+\varepsilon(t-T_q)\,x_q(t-T_q).\end{aligned}\qquad (4.1\text{-}69)}$$

Az időfüggvény részletesebben felírt alakja

$$x(t)=\begin{cases}x_0(t), & 0<t<T_1,\\ x_0(t)+x_1(t-T_1), & T_1<t<T_2,\\ \vdots & \\ x_0(t)+x_1(t-T_1)+\ldots+x_q(t-T_q), & T_q<t<\infty.\end{cases}\qquad (4.1\text{-}70)$$

Ezt az alakot úgy is előállíthatjuk, hogy az e^{-sT_i} tényezőket nullának tekintjük, amíg $t<T_i$, és a számláló egy szorzótényezőjének tekintjük amikor $t>T_i$.

Áttekinthetőbb alakhoz jutunk, ha a jelet elemi átalakításokkal ablakozott függvények összegeként állítjuk elő:

$$\begin{aligned}x(t)&=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T_1)\}f_0(t)+\{\varepsilon(t-T_1)-\varepsilon(t-T_2)\}f_1(t)+\ldots+\varepsilon(t-T_q)f_q(t),\\ f_i(t)&\equiv x_0(t)+x_1(t-T_1)+\ldots+x_i(t-T_i).\end{aligned}\qquad (4.1\text{-}71)$$

A gyakorlati esetek többségében ez az eljárás még akkor is alkalmazható, ha (69)-ben végtelen számú tag szerepel. Ez a helyzet akkor, amikor a transzformált függvényt e^{-sT} szerinti hatványsorként tudjuk előállítani.

A még általánosabb $X(s)$ függvény visszatranszformálása nagyon bonyolult feladat lehet. Célszerű részletes Laplace-transzformációs táblázatot tanulmányozni. Az általunk vizsgált feladatok során ilyenekre rendszerint nincs szükség.

1. példa Határozzuk meg az $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, ha

$$X(s)=\left[1-e^{-sT}\right]\frac{s}{s+\alpha}.$$

Az $X(s)=X_0(s)+e^{-sT}X_1(s)$ alakú felbontásban

$$X_0(s)=\frac{s}{s+\alpha}=1-\frac{\alpha}{s+\alpha} \Rightarrow x_0(t)=\delta(t)-\alpha\,\varepsilon(t)e^{-\alpha t},$$

és $X_1(s)=-X_0(s)$, $x_1(t)=-x_0(t)$. Ebből következik, hogy

$$x(t)=\left\{\delta(t)-\alpha\,\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\right\}-\left\{\delta(t-T)-\alpha\,\varepsilon(t-T)e^{-\alpha(t-T)}\right\}=$$
$$=\delta(t)-\alpha\left\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right\}e^{-\alpha t}-\delta(t-T)+\alpha\left(1-e^{-\alpha T}\right)\varepsilon(t-T)e^{-\alpha(t-T)}.$$

A $\delta(t)$ tagokat külön kezeljük annak érdekében, hogy elkerüljük a kétes jelentésű $\varepsilon(t)\delta(t)$, $\varepsilon(t-T)\delta(t-T)$ tagok fellépését. #

***2. példa** Határozzuk meg az $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, ha $X(s)=\dfrac{1}{2\,s\,\mathrm{ch}\,s\,T}$.

Az $X(s)$ függvénynek pólusa van a $p_0=0$ helyen, továbbá mindazokon a p_k helyeken, ahol

$$\mathrm{ch}\,p_kT\equiv\cos\frac{p_kT}{\mathrm{j}}=0 \Rightarrow p_k=\pm\mathrm{j}\frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{T},\quad k=1,2,3,\ldots.$$

A végtelen számú részlettörtre bontás során $C_0=1/2$, továbbá (például a L'Hospital-szabály alkalmazásával)

$$C_k=\lim_{s=p_k}\frac{s-p_k}{2\,s\,\mathrm{ch}\,s\,T}=\frac{1}{2\,p_k}\frac{1}{T\,\mathrm{sh}\,p_kT}=\pm\frac{\mathrm{j}}{(2k-1)\pi}\frac{1}{\mathrm{j}\sin\dfrac{2k-1}{2}\pi}=\frac{\mp(-1)^k}{(2k-1)\pi}.$$

Ebből már adódik az időfüggvény következő kifejezése:

$$x(t)=\varepsilon(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathscr{R}e\left\{\frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi}e^{\mathrm{j}(2k-1)\pi t/2T}\right\}\right\}=\varepsilon(t)\left\{\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cos(2k-1)\frac{\pi t}{2T}\right\}.$$

Ez egy $4T$ periódusidejű periodikus függvény Fourier-sora.

Az időfüggvény egy más alakjának előállításához alakítsuk át az eredeti alakot a következő módon:

$$X(s)=\frac{1}{2\,s\,\mathrm{ch}\,s\,T}=\frac{1}{s\left(e^{sT}+e^{-sT}\right)}=\frac{e^{-sT}}{s\left(1+e^{-s2T}\right)}=\frac{1}{s}\left\{e^{-sT}-e^{-s3T}+e^{-s5T}-\ldots\right\}.$$

Ebből látható, hogy $x(t) = 0$, ha $0 < t < T$ vagy $3T < t < 4T$, és $x(t) = 1$, ha $T < t < 3T$, majd ez periodikusan ismétlődik $4T$ periódusidővel.

Egy további lehetőség $X(s)$ átalakítása olyan módon, hogy a periodikus jelekre a 4.1-1.4. pontban leírtak alkalmazhatók legyenek. Ekkor más úton jutunk a periodikus jel második alakjához. #

4.1-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(z)=\frac{0{,}5\,z}{z-0{,}5}.\quad (b)\ X(z)=\frac{1}{z^2-0{,}64}.\quad (c)\ X(z)=\frac{z^3+2z^2+1}{z^3\left(z^2-0{,}64\right)}.$$

$$(d)\ X(z)=\frac{z^2-z}{z^2-0{,}6z+0{,}05}.\quad (e)\ X(z)=\frac{z^2-z}{z^2+0{,}2\,z+0{,}05}.$$

$$(f)\ X(z)=\frac{1{,}5\,z^2-z+0{,}1}{z^2+z+0{,}24}.\quad (g)\ X(z)=\frac{2\,z^4-2{,}5z^3+1{,}21z^2-0{,}22z}{(z-0{,}5)^2\,(z-0{,}4)^2}.$$

Határozza meg polinomosztással $x[0]$, $x[1]$ és $x[2]$ értékét és ennek alapján ellenőrizza $x[k]$ helyettesítési értékeit!

$$(h)\ X(z)=\frac{z^3-z^2}{z^2-0{,}6\,z+0{,}05}.$$ (Mielőtt belekezd, gondolkozzon el a feladaton!)

F-2. Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(s)=3\,\frac{s+2}{s^2+5\,s+4}.\quad (b)\ X(s)=3\,\frac{(s+2)^2}{s^2+5\,s+4}.\quad (c)\ X(s)=\frac{3\,s+1}{(s+1)^2(s+2)^2}.$$

$$(d)\ X(s)=\frac{s}{s^2+6\,\alpha\,s+25\,\alpha^2}.\quad (e)\ X(s)=\frac{s}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}.\quad (f)\ X(s)=\frac{2\alpha s+\alpha^2+\Omega^2}{s\left[(s+\alpha)^2+\Omega^2\right]}.$$

Ellenőrizze az $x(+0)=\lim\limits_{s\to\infty}\{s\,X(s)\}$ kezdeti értéket!

F-3. Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(z)=\frac{z^{20}-0{,}9}{z^{19}\,(z-0{,}9)}\equiv z\frac{1-0{,}9\,z^{-20}}{z-0{,}9}.\quad (b)\ X(z)=\frac{z^{20}-0{,}9^{20}}{z^{19}\,(z-0{,}9)}\equiv z\frac{1-0{,}9^{20}z^{-20}}{z-0{,}9}.$$

$$(c)\ X(z)=\frac{(z-2)\left(z^{20}-1\right)}{z^{19}\left(z^2+0{,}2\,z-0{,}03\right)}\equiv z\frac{\left(1-z^{-20}\right)(z-2)}{z^2+0{,}2\,z-0{,}03}.$$

Mindhárom esetben az első alak matematikai szempontból egységesebb, a második alak azonban szempontunkból célszerűbb.

F-4. Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s+3}.\quad (b)\ X(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}}{s+3}.\quad (c)\ X(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-3}\,\mathrm{e}^{-s}}{s+3}.$$

***F-5.** Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(z)=z^3\,\frac{z^2+z}{z^5-1}\equiv\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-5}}.\qquad (b)\ X(z)=\frac{z^5+z^4+1}{z\left(z^5-1\right)}\equiv\frac{z^{-1}+z^{-2}+z^{-6}}{1-z^{-5}}.$$

$$(c)\ X(z)=\frac{z^2\left(z^4-a^4\right)}{(z-a)\left(z^5-1\right)}\equiv\frac{1}{1-z^{-5}}\,\frac{1-a^4z^{-4}}{1-a\,z^{-1}}.$$

$$*(d)\ X(z)=z\frac{2\,z^5+z^4+0{,}2\,z^3-0{,}8\,z^2-2}{\left(z^5-1\right)(z-0{,}8)}\equiv\frac{2+z^{-1}+0{,}2\,z^{-2}-0{,}8\,z^{-3}-2\,z^{-5}}{\left(1-z^{-5}\right)\left(1-0{,}8\,z^{-1}\right)}.$$

(Útmutatás. Bontsa fel a függvényt két valódi tört összegére: az egyik nevezője $z-0{,}8$, a másiké z^5-1; ezek nem a szokásos részlettörtek!)

***F-6.** Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a)\ X(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)}.\qquad (b)\ X(s)=\frac{1}{s\left(1+\mathrm{e}^{-s}\right)}.$$

$$(c)\ X(s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}.\qquad (d)\ X(s)=\frac{1}{s\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)}.$$

F-7. Válassza ki az előző hat feladatból azokat a jeleket, amelyek Fourier-transzformáltja meghatározható az adott Laplace-transzformáltból $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s=\mathrm{j}\,\omega$ helyettesítéssel.

F-8. Oldja meg az előző feladatot, ha az F-3(a) és (b) feladatban mind a számlálóban, mind a nevezőben 0,9 helyére 1,1 számértéket vagy az F-4. feladatokban a nevezőben a 3 helyére –3 számértéket írunk!

***F-9.** Egy valós értékű, belépő DI illetve FI jel energiája definíció szerint

$$E_x=\sum_{k=0}^{\infty}x^2[k];\qquad E_x=\int_0^{\infty}x^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Igazolja, hogy ha E_x véges, akkor számítható a jel Laplace-transzformáltjából:

$$E_x=\sum_{|z_i|<1}\operatorname*{Res}_{z_i}\left\{z^{-1}\,X(z)\,X\left(z^{-1}\right)\right\};\qquad E_x=\sum_{|s_i|<1}\operatorname*{Res}_{s_i}\left\{X(s)\,X(-s)\right\}.$$

A Res $G(z)$ jelentését és számításának módját a 4.1-1.6. pontban tárgyaltuk. (Útmutatás. Fejezze ki az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jelet az inverziós integrállal, szorozza meg az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jellel, cserélje meg a műveletek sorrendjét, majd alkalmazza a reziduum tételt.)

Határozza meg a tétel alkalmazásával a jel energiáját, ha

$$(a)\ x[k]=\varepsilon[k]\,a^k,\quad |a|<1;\quad y(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t},\quad \alpha>0.$$

$$(b)\ x[k]=\varepsilon[k]\,k\,a^k,\quad |a|<1;\quad y(t)=\varepsilon(t)\,t\,\mathrm{e}^{-\alpha t},\ \alpha>0.$$

Ellenőrizze az eredményt az időtartományban végzett számítással, ha utóbbit el tudja végezni! A példa mutatja, hogy a komplex frekvenciatartományban a számítás néha egyszerűbb.

4.1-2.M. Megoldások

M-1. Célszerű a (*b*) és (*c*) szerinti függvényeket előbb egy más alakra hozni.

(*a*) $x[k]=0{,}5\,\varepsilon[k]0{,}5^k$.

(*b*) $X(z)=z^{-2}\dfrac{z\cdot z}{(z-0{,}8)(z+0{,}8)}$; $x[k]=0{,}5\,\varepsilon[k-2]\left\{0{,}8^{k-2}+(-0{,}8)^{k-2}\right\}$;

$X(z)=z^{-1}\dfrac{z}{(z-0{,}8)(z+0{,}8)}$; $x[k]=0{,}625\,\varepsilon[k-1]\left\{0{,}8^{k-1}-(-0{,}8)^{k-1}\right\}$;

$X(z)=\dfrac{z}{z(z-0{,}8)(z+0{,}8)}$; $x[k]=-1{,}5625\,\delta[k]+0{,}78125\,\varepsilon[k]\left\{0{,}8^{k-2}+(-0{,}8)^{k-2}\right\}$.

Ezek az alakok egyenértékűek, az első a legcélszerűbb.

(*c*) $X(z)=z^{-2}+2\,z^{-3}+z^{-4}\,\dfrac{z\,(0{,}64\,z+2{,}28)}{(z-0{,}8)(z+0{,}8)}$;

$x[k]=\delta[k-2]+2\,\delta[k-3]+\varepsilon[k-4]\left\{1{,}745\,(0{,}8)^{k-4}-1{,}105\,(-0{,}8)^{k-4}\right\}$.

Ha az eredeti alakot megszorozzuk és elosztjuk z-vel, akkor a $z=0$ helyen négyszeres pólus adódik. Ekkor a visszatranszformálás hosszadalmas számítást igényel és kevésbé áttekinthető eredményre vezet. Nem derül ki például ránézésre, hogy a jel a $k=2$ diszkrét időpont előtt nulla.

(*d*) $x[k]=\varepsilon[k]\left\{2{,}25\,(0{,}1)^k-1{,}25\,(0{,}5)^k\right\}$.

(*e*) $x[k]=5{,}590\,\varepsilon[k]\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)^k\cos(2{,}034\,k+1{,}391)$.

(*f*) $x[k]=1{,}5\,\delta[k]+\varepsilon[k-1]\left\{3{,}7\,(-0{,}4)^{k-1}-6{,}2\,(-0{,}6)^{k-1}\right\}$.

(*g*) $X(z)=\dfrac{z}{z-0{,}5}+\dfrac{z}{(z-0{,}5)^2}+\dfrac{z}{z-0{,}4}-\dfrac{0{,}8\,z}{(z-0{,}4)^2}$;

$x[k]=\varepsilon[k]\left\{(1+2\,k)(0{,}5)^k+(1-2\,k)(0{,}4)^k\right\}$.

(*h*) Ez nem lehet egy DI jel Laplace-transzformáltja, mert $z\to\infty$ esetén nincs véges határértéke.

M-2. A (*b*) feladatban a racionális függvény nem valódi tört!

(*a*) $x(t)=\varepsilon(t)\left\{\mathrm{e}^{-t}+2\,\mathrm{e}^{-4t}\right\}$.

(*b*) $x(t)=3\,\delta(t)+\varepsilon(t)\left\{\mathrm{e}^{-t}-4\,\mathrm{e}^{-4t}\right\}$.

(*c*) $x(t)=\varepsilon(t)\left\{(7-2t)\mathrm{e}^{-t}-(7+5t)\,\mathrm{e}^{-2t}\right\}$.

(*d*) $x(t)=\varepsilon(t)\left\{\cos 4\alpha t-\dfrac{3}{4}\sin 4\alpha t\right\}\mathrm{e}^{-3\alpha t}$. (*e*) $x(t)=\varepsilon(t)\left\{\cos\Omega t-\dfrac{\alpha}{\Omega}\sin\Omega t\right\}\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

(*f*) $x(t)=\varepsilon(t)\left\{1-\left[\cos\Omega t+\dfrac{\alpha}{\Omega}\sin\Omega t\right]\mathrm{e}^{-\alpha t}\right\}$.

M-3. A megoldások három tipikus alakja

$$x[k]=x[0]+x[1]\delta[k-1]+\ldots+x[k-(L-1)]\delta[k-(L-1)]+\varepsilon[k-L]f[k-L],$$
$$x[k]=\varepsilon[k]g[k]+\varepsilon[k-L]h[k-L],$$
$$x[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L]\}g[k]+\varepsilon[k-L]f[k-L].$$

Ha L nem nagyon kicsi, akkor a harmadik alak a legcélszerűbb. Mivel esetünkben $L=20$, ezért a harmadik alakot adjuk meg:

(a) $x[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-20]\}(0{,}9)^k-(0{,}9-0{,}9^{20})\varepsilon[k-20]0{,}9^{k-20}$; $0{,}9^{20}\approx 0{,}122$.

(b) $x[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-20]\}(0{,}9)^k$; véges hosszúságú jel.

(c) Elhanyagolva a $(0{,}3)^{20}\approx 3\cdot 10^{-11}$ és a $(0{,}1)^{20}\approx 10^{-20}$ számokat

$$x[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-20]\}\left\{-4{,}75(0{,}1)^k+5{,}75(-0{,}3)^k\right\}+\varepsilon[k-20]\left\{4{,}75(0{,}1)^{k-20}-5{,}75(-0{,}3)^{k-20}\right\}.$$

M-4. Alkalmazza a késleltetési (eltolási) tételt!

(a) $x(t)=\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-3t}-\varepsilon(t-1)\mathrm{e}^{-3(t-1)}=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\}\mathrm{e}^{-3t}-[1-\mathrm{e}^{-3}]\varepsilon(t-1)\mathrm{e}^{-3(t-1)}$.

(b) $x(t)=\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-3t}-\varepsilon(t-1)\mathrm{e}^{-3(t-1)}-\varepsilon(t-2)\mathrm{e}^{-3(t-2)}\equiv$

$$\equiv\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\}\mathrm{e}^{-3t}-[1-\mathrm{e}^{-3}]\{\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)\}\mathrm{e}^{-3(t-1)}-[1+\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-6}]\varepsilon(t-2)\mathrm{e}^{-3(t-2)}.$$

(c) $x(t)=\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-3}\,\varepsilon(t-1)\mathrm{e}^{-3(t-1)}\equiv\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\}\mathrm{e}^{-3t}$. Véges hosszúságú jel.

***M-5.** Az $X(z)$ vagy egy periodikus DI jel transzformáltja vagy egy periodikus és egy nem-periodikus jel összegének transzformáltja.

(a) $x[k]=\varepsilon_L[k]x_L[k]$; $x_L[k]=\delta[k-1]+\delta[k-2]$, $0\le k<L=5$.

(b) $X(z)=\dfrac{z^{-1}+z^{-2}+z^{-6}}{1-z^{-5}}=z^{-1}+\dfrac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-5}}$; $x[k]=\delta[k-1]+\varepsilon_L[k]f_L[k]$;

$f_L[k]=2\delta[k-1]+\delta[k-2]$, $0\le k<L=5$.

(c) $x[k]=\varepsilon_L[k]x_L[k]$; $x_L[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-4]\}a^k$; $L=5$.

$*(d)$ $X(z)=\dfrac{2z}{z-0{,}8}+\dfrac{z^4+z^3}{z^5-1}\equiv\dfrac{2z}{z-0{,}8}+\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-5}}$;

$x[k]=2\varepsilon[k](0{,}8)^k+\varepsilon_L[k]g_L[k]$; $g_L[k]=\delta[k-1]+\delta[k-2]$, $0\le k<L=5$.

***M-6.** Az $X(s)$ vagy egy periodikus FI jel Laplace-transzformáltja vagy egy periodikus és egy nem-periodikus jel összegének Laplace-transzformáltja.

(a) $x(t)=\varepsilon_T(t)x_T(t)$; $x_T(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$, $0<t<T=2$.

(b) Mint (a), noha ez nem látszik első ránézésre.

(c) $x(t)=\varepsilon_T(t)\delta(t)\equiv\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)+\ldots$.

(d) $x(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-4)+\ldots$.

A jel ábrázolásával könnyen belátható, hogy az egy $A+(t/2)$ és egy $g(t)=\varepsilon_T(t)g_T(t)$ periodikus jel összege, ahol

$$G(s)=\frac{1}{s\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)}-\left[\frac{A}{s}+\frac{1}{2s^2}\right]=\frac{2(1-A)s-1+(2As+1)\mathrm{e}^{-2s}}{2s^2\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)};$$

$$g_T(t)=(1-A)-\frac{t}{2},\ 0<t<T=2.$$

Az A állandó tetszőleges, az $A=0$, $A=1$ és $A=1/2$ választások ésszerűek.

M-7. A helyettesítés megengedett, ha $X(z)$ minden pólusa az egységkörön belül vagy ha $X(s)$ minden pólusa a bal félsíkon helyezkedik el. Az F-1., 2., 3. és 4. feladatokban ez teljesül, de az F-1(h) és az F-2(e, f) feladatokban csak akkor, ha $\alpha > 0$. Az F-5. és 6. feladatokban szereplő jelek egyikére sem megengedett a helyettesítés.

M-8. Az $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)$ illetve az $X(\mathrm{j}\omega)$ az F-3(b) illetve az F-4(c) feladatban a jel spektrumát szolgáltatja, mivel az $X(z)$ függvénynek a $z=1{,}1$ helyen, illetve az $X(s)$ függvénynek az $s=+3$ helyen nincsen pólusa. A többi említett feladatban az $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)$ illetve az $X(\mathrm{j}\omega)$ függvény nem belépő jel spektrumát adja.

***M-9.** Felcserélve a műveletek sorrendjét (ez megengedett, ha E_x véges) a DI esetben

$$E_x=\sum_{k=0}^{\infty}x^2[k]=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_{|z|=1}X(z)z^{k-1}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_{|z|=1}z^{-1}X(z)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^k\right\}\mathrm{d}z.$$

Az utolsó összeg az $x[k]$ Laplace-transzformáltja, de nem z hanem $1/z$ változóval. A FI esetben hasonló módon

$$E_x=\int_0^{\infty}x^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}x(t)\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}X(s)\left\{\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s.$$

Az utolsó összeg az $x(t)$ Laplace-transzformáltja, de nem s hanem $-s$ változóval.

A megadott konkrét jelek esetén:

$$(a)\ E_x=\sum_i\operatorname*{Res}_{|z_i|<1}\left\{z^{-1}\frac{z}{z-a}\frac{z^{-1}}{z^{-1}-a}\right\}=\operatorname*{Res}_{z=a}\left\{\frac{1}{(z-a)(1-az)}\right\}=\frac{1}{1-a^2};$$

$$E_y=\sum_i\operatorname*{Res}_{\mathrm{Re}\,s_i<0}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\frac{1}{-s+\alpha}\right\}=\operatorname*{Res}_{s=-\alpha}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)(\alpha-s)}\right\}=\frac{1}{2\alpha}.$$

$$(b)\ E_x=\sum_i\operatorname*{Res}_{|z_i|<1}\left\{z^{-1}\frac{az}{(z-a)^2}\frac{az^{-1}}{\left(z^{-1}-a\right)^2}\right\}=\operatorname*{Res}_{z=a}\left\{\frac{a^2z}{(z-a)^2(1-az)^2}\right\}=a^2\frac{1+a^2}{\left(1-a^2\right)^3};$$

$$E_y=\sum_i\operatorname*{Res}_{\mathrm{Re}\,s_i<0}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)^2}\frac{1}{(-s+\alpha)^2}\right\}=\operatorname*{Res}_{s=-\alpha}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)^2(\alpha-s)^2}\right\}=\frac{1}{4\alpha^3}.$$

A $D_1/(z-a)$ illetve a $D_1/(s+\alpha)$ tagot, vagy a benne szereplő D_1 reziduumot a részlettörtekre bontás technikájával határozhatjuk meg. Különösen a (b) feladat esetén a komplex frekvenciatartománybeli számítás egyszerűbbnek tűnik.

4.2. Rendszeranalízis a komplex frekvenciatartományban

E fejezet tárgya a lineáris, invariáns, kauzális, DI illetve FI rendszerek komplex frekvencia-tartománybeli analízise, más szóval a diszkrét idejű és a folytonos idejű Laplace- transzformáció alkalmazása rendszeranalízisre.

A 4.2-1. szakaszban értelmezzük az ilyen rendszer átviteli függvényét. Megmutatjuk, miként lehet a rendszer átviteli függvényét előállítani a rendszer impulzusválaszának, rendszeregyenletének, állapotváltozós leírásának vagy átviteli karakterisztikájának ismeretében. Itt foglakozunk a gerjesztés-válasz stabilitás *kritériumaival, valamint az átviteli függvény ábrázolásának módjával is. Az átviteli* függvénynek a hálózati reprezentáció alapján történő előállítását a 4.3. fejezetben tárgyaljuk.

A 4.2-2. szakasz tárgya az adott gerjesztéshez tartozó válasz számítása a Laplace-transzformáció felhasználásával. A belépő gerjesztéshez tartozó választ meghatározhatjuk az átviteli függvény ismeretében. Nem belépő gerjesztéshez tartozó válasz meghatározásához célszerű az impulzusválasz számítása, majd konvolúció alkalmazása. Módszert adunk a periodikus gerjesztéshez tartozó válasz olyan előállítására, amely nem a Fourier-felbontáson alapul.

A 4.2-3. szakaszban néhány speciális lineáris, invariáns, kauzális rendszer időtartománybeli, frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli leírását tárgyaljuk. *Itt lesz szó szűrőkkel kapcsolatos néhány alapfogalomról.* A rendszerek realizációjával a 4.3-2. szakaszban még fogunk foglalkozni.

4.2-1. Az átviteli függvény

4.2-1.1. Az átviteli függvény definíciója

Tekintsünk egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszert, amelyet $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasza jellemez, amely a kauzalitás következtében *belépő* jel. Jelölje az impulzusválasz Laplace-transzformáltját

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad H(z)=\mathscr{Z}\{h[k]\};\\ &\text{FI:}\quad H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}. \end{aligned} \tag{4.2-1}$$

A *kauzális* rendszer által meghatározott $H(z)$ illetve $H(s)$ a rendszer *átviteli függvénye* (transzfer függvénye).

Az (1) lehetőséget ad az impulzusválasz mérése és alkalmas függvénnyel történő approximálása alapján az átviteli függvény meghatározását.

A rendszer válasza kifejezhető az impulzusválasz és gerjesztés konvolúciójaként (2.1. szakasz):

$$y[k]=h[k]*u[k]; \quad y(t)=h(t)*u(t).$$

A Laplace-transzformáció (4.1-37) konvolúció-tétele értelmében ez, kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén kifejezhető h és u Laplace-transzformáltjának szorzataként:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad Y(z)=H(z)U(z); \quad h[k]=0, u[k]=0, \ k\in\mathbf{Z}_-; \\ &\text{FI}: \quad Y(s)=H(s)U(s), \quad h(t)=0, \ u(t)=0, \ t\in\mathbf{R}_-. \end{aligned} \tag{4.2-2}$$

A (2) értelmében a kauzális rendszer átviteli függvénye értelmezhető közvetlenül a komplex frekvenciatartományban az impulzusválasztól függetlenül is:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}; \quad u[k]=0, k\in\mathbf{Z}_-; \\ &\text{FI}: \quad H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}; \quad u(t)=0, \ t\in\mathbf{R}_-. \end{aligned} \tag{4.2-3}$$

A rendszer átviteli függvényét rendszerint a (3) összefüggéssel számítjuk rendszeregyenlete, állapotváltozós leírása vagy hálózati reprezentációja ismeretében. Ezt a következőkben részletezni fogjuk.

Az átviteli függvény ismeretében (1) alapján számíthatjuk a rendszer impulzusválaszát:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad h[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)\}; \\ &\text{FI}: \quad h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}. \end{aligned} \tag{4.2-4}$$

Rendszerint ez az impulzusválasz számításának a legegyszerűbb módja.

A rendszer átviteli függvénye a z illetve az s változó *racionális* függvénye, ha az alábbi feltételek bármelyike ki van elégítve:

– a rendszer *impulzusválasza* exponenciális és csillapított szinuszos függvények szuperpozíciója, bármelyik meg lehet szorozva egy polinommal (2.1-1. és 2. szakasz).
– a rendszer jellemezhető a *rendszeregyenletével* (2.2-1. szakasz).
– a rendszer jellemezhető az *állapotváltozós leírásával* (2.3-1. szakasz).
– a rendszer jellemezhető egy olyan *átviteli karakterisztikával*, amely az $e^{j\vartheta}$ illetve a $j\omega$ változó racionális függvénye.

Sok fontos folytonos idejű rendszer nem tartozik a fenti osztályok egyikébe sem, tehát átviteli függvénye nem racionális. Ilyenek például az időkéséssel (más néven holtidővel) bíró FI rendszerek.

Az átviteli függvény és az impulzusválasz kapcsolatát fentebb tisztáztuk, e szakasz további pontjaiban a többi kapcsolatot vizsgáljuk.

1. példa Határozzuk meg a DI illetve a FI rendszer átviteli függvényét, ha impulzusválasza

$$h[k]=\varepsilon[k]q^k; \qquad h(t)=\varepsilon(t)e^{pt}.$$

Mivel a rendszer kauzális, ezért az impulzusválasz Laplace-transzformáltját számítva kapjuk, hogy

$$H(z)=\frac{z}{z-q}; \qquad H(s)=\frac{1}{s-p}.$$

Az átviteli függvény $z = q$ vagy $s = p$ pólusa megegyezik az impulzusválaszban a DI esetben a k kitevő alapjával illetve a FI esetben a kitevőben a t szorzójával. #

***2. példa** Határozzuk meg a DI rendszer átviteli függvényét, ha impulzusválasza

$$h[k]=\delta[k]-\frac{1}{2!}\delta[k-2]+\frac{1}{4!}\delta[k-4]-\frac{1}{6!}\delta[k-6]+\ldots.$$

Tagonként képezve a Laplace-transzformáltakat kapjuk, hogy

$$H(z)=1-\frac{1}{2!}z^{-2}+\frac{1}{4!}z^{-4}-\frac{1}{6!}z^{-6}+\ldots\equiv\cos\left(z^{-1}\right).$$

Ez nem racionális függvénye a z változónak. A gyakorlatban nem szoktunk ilyen impulzusválasszal vagy átviteli függvénnyel találkozni. #

3. példa Határozzuk meg a FI rendszer átviteli függvényét, ha explicit gerjesztés válasz kapcsolata $y(t)=u(t-T)$, $T\in\mathbf{R}_+$.

Az egyenlet Laplace-transzformáltját képezve $Y(s)=\mathrm{e}^{-sT}\,U(s)\equiv H(s)U(s)$.

A FI rendszer (a folytonos idejű késleltető) átviteli függvénye ebből $H(s)=\mathrm{e}^{-sT}, T\in\mathbf{R}_+$. Ez az átviteli függvény az s változónak nem racionális függvénye. Ha $T\in\mathbf{R}_-$, akkor a rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett, a $H(s)$ ekkor nem nevezhető átviteli függvénynek. #

4.2-1.2. Átviteli függvény és rendszeregyenlet

Tekintsük egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszer *rendszeregyenletét* szokásos alakjában adottnak (2.2-1.2. és 3. pont):

$$\begin{aligned}&\text{DI}:\ y[k]+a_1y[k-1]+\ldots+a_ny[k-n]=b_0\,u[k]+b_1u[k-1]+\ldots+b_mu[k-m];\\&\text{FI}:\ y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n\,y(t)=b_0\,u^{(n)}(t)+b_1\,u^{(n-1)}(t)+\ldots+b_nu(t).\end{aligned}\qquad(4.2\text{-}5)$$

Itt $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ FI válasz i-edik általánosított deriváltja.

Feladatunk a rendszer átviteli függvényének meghatározása.

Képezzük az egyenlet Laplace-transzformáltját abban az esetben, amikor $u[k]$ illetve $u(t)$ belépő jel, ezért a kauzalitás következtében $y[k]$ illetve $y(t)$ is belépő jel. A (4.1-22) eltolási tétel értelmében ekkor $\mathscr{Z}\left\{y^{(i)}[k]\right\}=z^{-i}Y(z)$, a (4.1-29) derivált tétel értelmében $\mathscr{L}\left\{y^{(i)}(t)\right\}=s^i\,Y(s)$, tehát

$$\begin{aligned}&Y(z)+a_1\,z^{-1}Y(z)+\ldots+a_n\,z^{-n}Y(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\ldots+b_mz^{-m}\,U(z);\\&s^n\,Y(s)+a_1s^{n-1}\,Y(z)+\ldots+a_nY(s)=b_0\,s^n\,U(s)+b_1\,s^{n-1}\,U(s)+\ldots+b_nU(s).\end{aligned}$$

Ebből $H(z)=Y(z)/U(z)$ illetve $H(s)=Y(s)/U(s)$ nehézség nélkül kifejezhető.

Az (5) rendszeregyenletével leírt DI illetve FI rendszer *átviteli függvénye*

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:}\quad H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots+b_m z^{-m}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots+a_n z^{-n}};\\ &\text{FI:}\quad H(s)=\frac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+b_2 z^{n-2}+\ldots+b_{n-1} s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_{n-1} s+a_n}. \end{aligned}} \qquad (4.2\text{-}6)$$

Mind $H(z)$, mind $H(s)$változójának *racionális* függvénye. Mindkét függvény véges értékhez (gyakran nullához) tart, ha $z\to\infty\ (z^{-1}\to 0)$ illetve ha $s\to\infty$.

Ha a DI rendszerre $n=0$ (MA típusú vagy nem-rekurzív rendszer), akkor

$$H(z)=b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+b_{m-1} z^{-(m-1)}+b_m z^{-m},\quad n=0. \qquad (4.2\text{-}7)$$

A DI átviteli függvényt gyakran célszerűbb olyan alakra hozni, hogy csak z pozitív hatványait tartalmazza:

$$H(z)=\frac{b_0 z^N+b_1 z^{N-1}+\ldots+b_{N-1} z+b_N}{z^N+a_1 z^{N-1}+\ldots+a_{N-1} z+a_N},\quad N=\max(m,n). \qquad (4.2\text{-}8)$$

A *belépő gerjesztéshez* tartozó ugyancsak belépő válasz $y[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\}$ illetve $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$ alakban inverz Laplace-transzformációval számítható.

Az átviteli függvény nevezője megegyezik a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenletének bal oldalával (2.2-2.2. pont). Ebből következik, hogy a rendszeregyenlet valamennyi λ_i sajátértéke az átviteli függvény nevezőjének egy nullahelye és ezért többnyire egy pólusa az átviteli függvénynek: $\lambda_i=q_i$ illetve $\lambda_i=p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

Ha azonban az átviteli függvény redukálható, vagyis ha nevezőjének egyes nullahelyei megegyeznek számlálójának bizonyos nullahelyeivel, akkor a rendszeregyenlet egyes sajátértékei nem pólusai az átviteli függvénynek. Pontosabban fogalmazva: az átviteli függvény pólusainak multiplicitása legfeljebb akkora, mint a rendszeregyenlet megfelelő sajátértékeinek multiplicitása.

A rendszeregyenlet és az átviteli függvény kapcsolatát a gyakorlatban sokszor fordítva használjuk: meghatározzuk az átviteli függvényt (például a hálózati reprezentáció ismeretében vagy mérési eredmény approximációjával) és a (6) alak ismeretében előállítjuk a rendszeregyenlet (5) szerinti formáját.

Példa Határozzuk meg azon rendszer átviteli függvényét, amelynek rendszeregyenlete (2.2-1.2. és 3. pont)

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad y[k]-y[k-1]+0{,}24y[k-2]=u[k]+0{,}5\,u[k-1]-0{,}2\,u[k-3];\\ &\text{FI:}\quad y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+3y(t)=5u^{(1)}(t)+u(t). \end{aligned}$$

Az átviteli függvény közvetlenül felírható:

$$H(z)=\frac{1+0{,}5\,z^{-1}-0{,}2\,z^{-3}}{1-z^{-1}+0{,}24\,z^{-2}}\equiv z^{-1}\,\frac{z^3+0{,}5\,z^2-0{,}2}{z^2-z+0{,}24};\qquad H(s)=\frac{5\,s+1}{s^2+4\,s+3}.$$

A $H(z)$ felírható úgy is, hogy csak z pozitív hatványai szerepeljenek benne. #

4.2-1.3. Átviteli függvény és állapotváltozós leírás

A lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű és egy-válaszú DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírására közös alak adható (2.3-1.2. és 3. pont):

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,u, \qquad y = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x} + D\,u. \tag{4.2-9}$$

Itt $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$ illetve $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ általánosított deriváltja. Az x_i állapotváltozók számát N jelöli, ez az állapotváltozós leírás rendszáma.

Képezzük az egyenletek Laplace-transformáltját. A (4.1-26) illetve a (4.1-27) értelmében $\mathscr{Z}\{\mathbf{x}[k+1]\} = z\,\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]\,z$ illetve $\mathscr{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\,\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(-0)$, ahol belépő gerjesztés esetén $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$. Az átviteli függvény számításhoz az utóbbi esetre szorítkozhatunk:

$$z\,\mathbf{X}(z) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\,U(z), \qquad s\,\mathbf{X}(z) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\,U(s),$$
$$Y(z) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{X}(z) + D\,U(z); \qquad Y(s) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{X}(s) + D\,U(s).$$

Az első egyenlet átrendezett alakja DI illetve FI rendszer esetén

$$[z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\mathbf{X}(z) = \mathbf{B}\,U(z); \qquad [s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\,U(s). \tag{4.2-10}$$

E lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk $\mathbf{X}(z)$ illetve $\mathbf{X}(s)$ rendezőit. Formálisan ez mátrixinverzióval fejezhető ki:

$$\mathbf{X}(z) = [z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B}\,U(z); \qquad \mathbf{X}(s) = [s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B}\,U(s).$$

Helyettesítsük ezt $Y(z)$ illetve $Y(s)$ kifejezésébe:

$$Y(z) = \{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + D\}U(z); \qquad Y(s) = \{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + D\}U(s).$$

Ennek alapján a $H(z) = Y(z)/U(z)$ illetve a $H(s) = Y(s)/U(s)$ *átviteli függvény* kifejezése

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:} \quad H(z) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + D; \\ &\text{FI:} \quad H(s) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + D\,. \end{aligned}} \tag{4.2-11}$$

Az állapotváltozós leírással jellemzett rendszer átviteli függvénye egy racionális függvény, amelynek számlálója nem nagyobb fokszámú mint nevezője:

$$\begin{aligned} &\text{DI:} \quad H(z) = \frac{g_0 z^N + g_1 z^{N-1} + \ldots + g_{N-1} z + g_N}{s^N + d_1 z^{N-1} + d_2 z^{N-2} + \ldots + d_{N-1} z + d_N}; \\ &\text{FI:} \quad H(s) = \frac{g_0 s^N + g_1 s^{N-1} + \ldots + g_{N-1} s + g_N}{s^N + d_1 s^{N-1} + d_2 s^{N-2} + \ldots + d_{N-1} s + d_N}. \end{aligned} \tag{4.2-12}$$

Hasonlítsuk össze az átviteli függvénynek a rendszeregyenlet alapján kapott (6) és az állapotváltozós leírás alapján kapott (12) kifejezését. A gyakorlati esetek többségében $N = n$ és $d_i = a_i$, $g_i = b_i$. Ha azonban a (12) szerinti számlálónak és a nevezőnek van c számú közös gyöktényezője, akkor ezekkel egyszerűsíthetünk. Az így előálló *redukált* átviteli függvényre a számláló és a nevező fokszáma $N - c = n$. Nehéz annak eldöntése, hogy a számláló és a nevező két nullahelye valóban pontosan egyenlő-e. Ennek a stabilitásvizsgálat során lehet jelentőség (4.2-1.5. pont).

Példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u.$$

A transzformált állapotvektorra vonatkozó egyenlet és annak megoldása:

$$\begin{bmatrix} z & -1 \\ a_2 & z+a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_2} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} U(z).$$

Az $Y(z)$ kifejezésébe helyettesítve kapjuk a transzformált választ és az átviteli függvényt:

$$Y(z) = \left\{ \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2} + D \right\} U(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2} + D \equiv \frac{D z^2 + (C_2 + a_1 D) z + (C_1 + a_2 D)}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Ez a (12) szerinti alak $N = 2$ esetére. Az a_i, C_i, D paraméterek speciális értéke mellett előfordulhat, hogy az átviteli függvény csak elsőfokú. #

A DI Laplace-transzformáció alkalmazásával egyszerűen igazolhatjuk az állapotváltozós leírás (2.3-28) szerinti első Frobenius-alakját (ezt itt nem ismételjük meg; l. a 2.3-1.4. pontot). Belépő jelekre szorítkozva az állapotegyenlet egyes sorainak a Laplace-transzformáltja a DI esetben (a FI eset betűcserével adódik)

$$z X_1 = X_2 \Rightarrow X_2 = z X_1; \quad z X_2 = X_3 \Rightarrow X_3 = z^2 X_1,$$

$$X_i = z^{i-1} X_1, \ldots, X_N = z^{N-1} X_1; \; z X_N = -a_N X_1 - a_{N-1} X_2 - \ldots - a_1 X_N + U.$$

Ebből következik, hogy

$$X_1 = \frac{U}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}, \; X_2 = z X_1, \ldots, \; X_N = z^{N-1} X_1.$$

Ezeket a válasz transzformált kifejezésébe helyettesítve

$$Y = \left\{ \frac{1}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} \left[(b_N - b_0 a_N) + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) z + \ldots + (b_1 - b_0 a_1) z^{N-1} \right] + b_0 \right\} U.$$

Az egyenletet a nevezővel szorozva, rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$[z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N] \; Y(z) = [b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_N] \; U(z).$$

Ezt megszorozva z^{-N} tényezővel kapjuk a DI rendszeregyenlet szokásos alakjának Laplace-transzformáltját. Ha az egyenletben z helyére s változót írunk, akkor megkapjuk a FI rendszeregyenlet Laplace-transzformáltját. Az előző példában az $N = 2$ speciális esettel foglalkoztunk. A második Frobenius-alak is igazolható Laplace-transzformációval. Ezt a viszonylag egyszerű feladatot az Olvasóra bízzuk.

4.2-1.4. Átviteli függvény és átviteli karakterisztika

Egy lineáris, invariáns rendszert jellemezhetünk akár a $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ DI illetve $H(\mathrm{j}\omega)$ FI *átviteli karakterisztikájával* (3.1-1.3. pont), akár az előbb tárgyalt $H(z)$ illetve $H(s)$ *átviteli függvényével.*

Szorítkozzunk *GV stabilis* és *kauzális* rendszerekre (3.2-2.3. pont). Ekkor az *átviteli karakterisztika ismeretében az átviteli függvény előállítható (vagy fordítva)*, ha $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ helyére z, a $\mathrm{j}\omega$ helyére s változót írunk (vagy fordítva):

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:}\quad H(z)=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\big|_{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}=z} \quad\Leftrightarrow\quad H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}\,;\\ &\text{FI:}\quad H(s)=H(\mathrm{j}\omega)\big|_{\mathrm{j}\omega=s} \quad\Leftrightarrow\quad H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}\,. \end{aligned}} \tag{4.2-13}$$

Ha az átviteli karakterisztika $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve a $\mathrm{j}\omega$ *racionális* függvényeként ismert, akkor az átviteli függvény maga is racionális függvénye a z vagy az s változónak. A mért átviteli karakterisztika közelítése racionális függvénnyel azonban nem egyszerű feladat. A második oszlopban álló összefüggések az átviteli karakterisztika egy kényelmes számítási eljárását jelentik.

Az alkalmazott jelölések következtében az összefüggések trivialitásnak tűnhetnek, de a GV stabilitásra és a kauzalitásra vonatkozó kikötések mutatják, hogy ez nincs így. Ha például a rendszer nem kauzális, akkor a (13) hibás eredményre vezet, hiszen nem kauzális rendszerre az átviteli függvény nem értelmezett.

Jelölje a H átviteli karakterisztika valós részét P, képzetes részét Q, abszolút értékét K, szögét φ, vagyis akár DI, akár FI rendszer esetén

$$H=P+\mathrm{j}Q\,,\quad H=K\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}. \tag{4.2-14}$$

Az átvitel karakterisztika konjugáltja a $H(z^{-1})$, illetve a $H(-s)$ átviteli függvényből állítható elő $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$, illetve $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítéssel. Ebből következik, hogy az átviteli karakterisztika valós, illetve képzetes részének kifejezése

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad P(\vartheta)=\frac{H(z)+H(z^{-1})}{2}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}, \qquad \mathrm{j}Q(\vartheta)=\frac{H(z)-H(z^{-1})}{2}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}};\\ &\text{FI:}\quad P(\omega)=\frac{H(s)+H(-s)}{2}\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}, \qquad \mathrm{j}Q(\omega)=\frac{H(s)-H(-s)}{2}\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}. \end{aligned} \tag{4.2-15}$$

Az átviteli karakterisztika abszolút értékének négyzetére és szögére pedig írható, hogy

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad K^2(\vartheta)=H(z)H(z^{-1})\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi(\vartheta)}=\frac{H(z)}{H(z^{-1})}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}};\\ &\text{FI:}\quad K^2(\omega)=H(s)H(-s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi(\omega)}=\frac{H(s)}{H(-s)}\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}. \end{aligned} \tag{4.2-16}$$

A (15) és (16) összefüggések alapján az átviteli karakterisztikát jellemző $P(\vartheta), Q(\vartheta), K(\vartheta), \varphi(\vartheta)$ illetve $P(\vartheta), Q(\vartheta), K(\vartheta), \varphi(\vartheta)$ négy függvény bármelyikének ismeretében elvileg előállítható egy olyan $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvény, amelyből

származtatott átviteli karakterisztika valós része, képzetes része, abszolút értéke vagy szöge éppen a megadott. Ez az előállítás egyes esetekben egyértelmű, más esetekben több átviteli függvény is adódik.

Az átviteli függvény tényleges előállításának módszerével P, Q, K vagy φ ismeretében azonban nem foglakozunk, mert célunk csak az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika kapcsolatának bemutatása volt.

Előírt tulajdonságú amplitúdó-karakterisztikával bíró rendszerek egy típusára (maximális laposságú szűrők) az átviteli függvény meghatározását a 4.2-3.7. pontban be fogjuk mutatni.

4.2-1.5. Gerjesztés-válasz stabilitás

Egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvénye leírja a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát. Ebből következik, hogy az átviteli függvény ismeretében el tudjuk dönteni, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis (GV stabilis) vagy nem az. Emlékeztetőül: a rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis, ha bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a rendszer impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható legyen (2.1-1.3. és 2.1-2.3. pont):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

A rendszer feltételezett kauzalitása következtében az alsó határ $k = 0$ vagy $t = -0$ is lehet. A (3) értelmében a feltétel kifejezhető az átviteli függvénnyel is:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)\}\right| < \infty; \qquad \int_{-0}^{\infty} \left|\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}\right| \mathrm{d}t < \infty. \tag{4.2-17}$$

Ez az általános alak nem különösen hasznos.

Szorítkozzunk a továbbiakban racionális átviteli függvényre, amelynek általános alakját (6) adja. A $h[k]$ DI impulzusválasz, amely a q_i pólusokkal bíró $H(z)$ átviteli függvényhez tartozik a következő típusú tagok szuperpozíciója: q_i^k (egyszeres pólus), $k\,q_i^k$ (kétszeres pólus),..., $k^{p-1}\,q_i^k$ (p-szeres pólus), továbbá $\delta[k]$, $\delta[k-1]$, ..., $\delta[k-r]$. A $h(t)$ FI impulzusválasz, amely a p_i pólusokkal bíró $H(s)$ átviteli függvényhez tartozik a következő típusú tagok szuperpozíciója: $\mathrm{e}^{p_i t}$ (egyszeres pólus), $t\,\mathrm{e}^{p_i t}$ (kétszeres pólus),..., $t^{q-1}\,\mathrm{e}^{p_i t}$ (q-szoros pólus) esetleg még $\delta(t)$ is. Az ilyen függvény abszolút értékének szummája illetve integrálja csak akkor lehet véges, ha minden exponenciális tag nullához tart, amikor k illetve t végtelenhez tart. Ennek feltétele viszont az, hogy minden $|q_i|$ illetve minden $\left|\mathrm{e}^{p_i t}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathscr{R}e\{p_i\}t}\right|$ érték 1-nél kisebb legyen.

A *racionális átviteli függvényű* DI illetve FI rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis,* ha a $H(z)$ átviteli függvény minden q_i pólusára illetve a $H(s)$ átviteli függvény minden p_i pólusára

$$\boxed{\text{GV stabilis rendszer} \quad \Leftrightarrow \quad \text{DI}: |q_i| < 1; \qquad \text{FI}: \mathscr{R}e\{p_i\} < 0} \tag{4.2-18}$$

ki van elégítve, vagyis ha a DI átviteli függvény minden pólusa az *egységkörön belül*, a FI átviteli függvény minden pólusa a *bal félsíkon* helyezkedik el.

Ha az átviteli függvény pólusai csak a $|q_i| \le 1$ illetve a $\mathcal{R}e\{p_i\} \le 0$ feltételt elégítik ki és a $|q_i| = 1$ illetve a $\mathcal{R}e\{p_i\} = 0$ típusú, a tartomány határára eső pólusok egyszeresek, akkor azt mondhatjuk, hogy a nem GV stabilis rendszer a GV stabilitás *határhelyzetében* van. Külön megfontolást igényel, hogy az ilyen rendszer „stabilisnak" tekinthető-e.

Legyen az átviteli függvény a következő alakban adott:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}; \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{4.2-19}$$

ahol B és A polinomok, fokszámuk n. Ha az átviteli függvény *redukált* alakú (az A és B polinomoknak nincs közös nullahelyük), akkor a H átviteli függvény pólusai megegyeznek nevezőjének nullahelyeivel, azaz a következő n-edfokú egyenlet gyökei:

$$A(z) = 0, \; z = q_1, q_2, \ldots, q_n; \quad A(s) = 0, \; s = p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{4.2-20}$$

Mint korábban már láttuk (2.2-3.2. pont), a stabilitási feltételek teljesülése a polinom együtthatói ismeretében ellenőrizhetők a pólusok numerikus meghatározása nélkül is.

Ha az átviteli függvénynek nem a redukált alakja áll rendelkezésünkre (ilyen redukció egyébként ritkán lehetséges), akkor előző állításunkat a következőképpen kell kissé óvatosabbra fogalmaznunk.

Legyen az átviteli függvény $H(z) = G(z)/D(z)$ illetve $H(s) = G(s)/D(s)$ alakban adott, ahol G és D legfeljebb N-edfokú polinom, amelyeknek lehetnek közös nullahelyei. A $D(z) = 0$ egyenlet z_i gyökei, illetve a $D(s) = 0$ egyenlet s_i gyökei lehetnek az átviteli függvény pólusai. Ezek akkor nem pólusok, ha egyúttal a G számláló-polinomnak is nullahelyei. Pontosabban fogalmazva: ha z_i illetve s_i a nevező-polinomnak d_i multiplicitású, a számláló-polinomnak g_i multiplicitású nullahelye, akkor $d_i > g_i$ esetén $z_i = q_i$ illetve $s_i = p_i$ az átviteli függvénynek pólusa, egyébként nem pólusa az átviteli függvénynek.

Vizsgáljuk a következő esetet. Tételezzük fel, hogy az átviteli függvény nevezőjének valamennyi nullahelye az egységsugarú körön belül illetve a bal félsíkon van, kivéve egyetlen egyszeres nullahelyet az egységsugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon. Ha az átviteli függvény redukált alakú, akkor az általa jellemzett rendszer nem GV stabilis. Ha azonban az átviteli függvénynek van olyan redukált alakja, amelyben a stabilitást „elrontó" pólus nem lép fel, akkor az átviteli függvény GV stabilis rendszert jellemez. Elméletileg ez az állítás tökéletesen helytálló. Gyakorlatilag azonban felmerül az a kérdés, hogy kellő megbízhatósággal ismerjük-e a számláló és a nevező nullahelyeit vagy együtthatóit ahhoz, hogy a redukálhatóságot illetően ne legyenek kételyeink. A tankönyvi példákban az együtthatók pontosan ismert „kerek" számok, így ez a gond nem merül fel, ami ezáltal félrevezető.

Tekintsünk most két olyan esetet, amikor a kérdést viszonylag biztonságosan meg tudjuk válaszolni.

Tételezzük fel, hogy az átviteli függvényt a rendszer állapotváltozós leírásából állítottuk elő. A nevező nullahelyeit ekkor a rendszermátrix sajátértékeit adják. Ha ezek nincsenek mind az egységsugarú kör belsejében illetve a bal félsíkon, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis. Ekkor a rendszert többnyire akkor sem tekintjük „stabilisnak", ha a redukált átviteli függvény alapján gerjesztés-válasz stabilisnak bizonyul.

Tekintsünk most egy olyan átviteli függvényt, amely GV stabilis rendszert jellemez. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt egy $z-2$ illetve egy $s-2$ tényezővel. Az új átviteli függvény egyenértékű az eredetivel, de mivel nevezőjének van egy nullahelye az egységsugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon, ezért arra fogunk gyanakodni, hogy nem GV stabilis rendszert jellemez. Ekkor indokolt a redukált alakot előállítani és abból levonni a következtetést. (Azt természetesen nem tudhatjuk, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis-e, hiszen az állapotváltozós leírását nem ismerjük.)

A stabilitással kapcsolatos további megfontolások (például stabilitási tartalék értelmezése) már meghaladja kereteinket.

Példa Határozzuk meg a rendszer átviteli függvényét, ha rendszeregyenlete

$$\text{DI}: \quad y[k]-2{,}5\,y[k-1]+y[k-2]=u[k]-3\,u[k-1]+2\,u[k-2];$$
$$\text{FI}: \quad y^{(2)}(t)-y^{(1)}(t)-2\,y(t)=u^{(1)}(t)-2\,u(t).$$

Az átviteli függvény a rendszeregyenletből „ránézésre" felírható:

$$H(z)=\frac{1-3\,z^{-1}+2\,z^{-2}}{1-2{,}5\,z^{-1}+z^{-2}}\equiv\frac{z^2-3\,z+2}{z^2-2{,}5\,z+1}\equiv\frac{(z-1)(z-2)}{(z-0{,}5)(z-2)}\equiv\frac{z-1}{z-0{,}5};$$
$$H(s)=\frac{s-2}{s^2-s-2}\equiv\frac{s-2}{(s+1)(s-2)}\equiv\frac{1}{s+1}.$$

Ha a rendszeregyenlet minden együtthatója pontosnak tekinthető, akkor mindkét rendszer GV stabilis, mert $z = 2$ illetve $s = 2$ nem pólusa az átviteli függvénynek. A rendszeregyenletnek egy, belépő gerjesztésekre egyenértékű alakja ennek megfelelően

$$\text{DI}: \quad y[k]-0{,}5\,y[k-1]=u[k]-u[k-1];$$
$$\text{FI}: \quad y^{(1)}(t)+y(t)=u(t).$$

Ez az eredmény már ismert időtartománybeli megfontolás alapján (2.2-3.1. pont példája). Az időtartományban azonban nem adtunk módszert a rendszeregyenlet esetleges redukciójának elvégzésére, csak azt igazoltuk, hogy az elsőrendű és a másodrendű rendszer impulzusválasza megegyezik. Újból megjegyezzük, hogy példánk nem tipikus esetet tárgyal, mert az átviteli függvény csak kivételesen redukálható. #

4.2-1.6. A pólus-zérus elrendezés

A $H(z)$ illetve a $H(s)$ átviteli függvény $z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ komplex változójának komplex értékű függvénye. A következőkben két módszert tárgyalunk ennek ábrázolására.

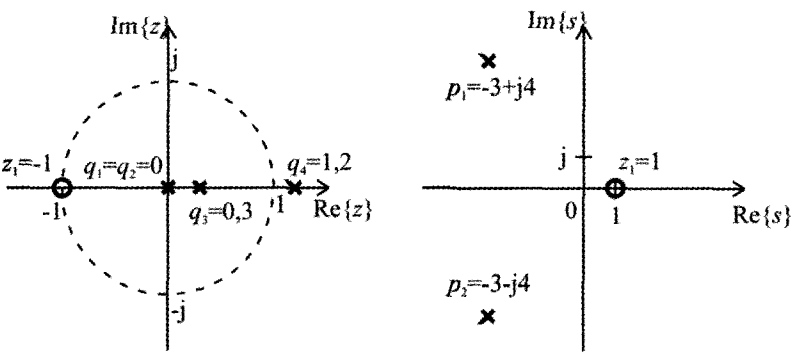
Az első módszer abban áll, hogy megadjuk a DI átviteli függvény viselkedését az egységsugarú körön (azaz elvégezzük a $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ helyettesítést) illetve a FI átviteli függvény viselkedését a képzetes tengelyen (azaz elvégezzük az $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítést). Ennek egy módja a $K(\vartheta)=\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)\right|$ és $\varphi(\vartheta)=\arg H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)$ illetve a $K(\omega)=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$ függvények ábrázolása. Az ábra csak akkor jellemzi egyértelműen az átviteli függvényt, ha annak pólusai az egységsugarú körön belül illetve a bal félsíkon vannak, vagyis amikor a vizsgált rendszer GV stabilis. Ekkor a helyettesítés - mint láttuk - az átviteli karakterisztikát szolgáltatja. Általánosabb esetben ez az ábrázolási mód nem célszerű.

A másik módszer akkor célszerű, ha $H(z)$ illetve $H(s)$ változójának *racionális* függvénye, vagyis két polinom hányadosa. Jelölje az átviteli függvény *zérusait* $z = s_i$ illetve $s = z_i$, *pólusait* pedig $z = q_i$ illetve $s = p_i$. Az átviteli függvény gyöktényezőkre bontott alakja a pólusok és a zérusok ismeretében ($m \le n$)

$$H(z) = C\frac{(z-s_1)(z-s_2)\ldots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)}; \quad H(s) = C\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}. \qquad (4.2\text{-}21)$$

Feltételezzük, hogy a számláló és a nevező esetleg megegyező gyöktényezőivel már egyszerűsítettünk. A pólusok és a zérusok vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. A $H(z)$ átviteli függvénynek bármelyik (akár mindegyik) pólusa lehet nulla, de egyetlen zérusa sem lehet nulla. Az átviteli függvénynek a végtelenben nincs pólusa.

Az átviteli függvény nehézség nélkül előállítható, ha ismerjük a pólusokat, a zérusokat és a C valós együtthatót. A komplex számsíkon a zérusokat karikával, a pólusokat dőlt kereszttel szokás ábrázolni. Az átviteli függvény e *pólus-zérus elrendezése* a C együtthatóval együtt egyértelműen jellemzi az átviteli függvényt, vagyis annak ábrázolásának tekinthető (1. ábra).



$$H(z) = 2\frac{z+1}{z^2(z-0{,}3)(z-1{,}2)} \equiv \qquad H(s) = 25\frac{s-1}{(s+3-\mathrm{j}4)(s+3+\mathrm{j}4)} \equiv$$

$$\equiv 2z^{-3}\frac{1+z^{-1}}{(1-0{,}3z^{-1})(1-1{,}2z^{-1})} \qquad \equiv 25\frac{s-1}{s^2+6s+25}$$

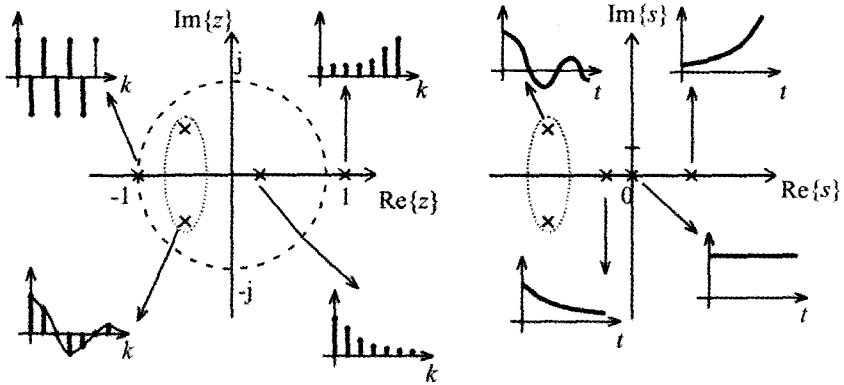
4.2-1. ábra A példaként választott DI illetve FI átviteli függvény és pólus-zérus elrendezése

A pólus-zérus elrendezés értelmezése az időtartományban

Tudjuk, hogy az impulzusválasz az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja, vagyis a DI esetben q_i^k típusú $(q_i \neq 0)$ tagok szuperpozíciója, többszörös pólus esetén még $k\,q_i^k, k^2 q_i^k, \ldots$ típusú összetevők is felléphetnek, illetve FI esetben az impulzusválasz $\mathrm{e}^{p_i t}$ típusú tagok szuperpozíciója, többszörös pólus esetén még $t\,\mathrm{e}^{p_i t}, t^2\mathrm{e}^{p_i t}, \ldots$ típusú összetevők is felléphetnek. A $q_i = 0$ pólus (azaz a z^{-r} tényező) a DI válasz késleltetéseként fogható fel. A 2. ábra mutatja néhány tipikus pólushoz vagy pólus-párhoz tartozó időfüggvény viselkedését (vö. 2.2-1. ábra).

Az átviteli függvény zérusainak nem adható ilyen közvetlen tartalom. A zérusok befolyásolják az egyes csökkenő vagy növekvő exponenciális jelek (általánosan: exponenciális függvénnyel és polinommal szorzott szinuszos jelek) együtthatóját.

Speciálisan: ha egy zérus nagyon közel van egy pólushoz, akkor ahhoz a pólushoz tartozó exponenciális függvény szorzója nagyon kicsi lesz. Ha egy pólus és egy zérus egybeesik és mindkettő egyszeres, akkor ott sem pólus sem zérus nincs, ami megfelel a gyöktényezővel történő egyszerűsítésnek, vagyis az átviteli függvény redukálásnak.



4.2-2. ábra Az átviteli függvény pólusainak hatása az időfüggvényre

Az ábrából jól látható a GV stabilitás és a pólusok helyzetének kapcsolata (az egységsugarú körön belül, kívül, speciálisan rajta, illetve a képzetes tengelytől balra, jobbra, speciálisan rajta). Stabilis rendszer *vezető pólusának* azt szokták nevezni, amelyik legközelebb van a stabilitási tartomány határához, vagyis amelyikre $|q_i|$ a legnagyobb illetve $|\mathscr{R}e\{p_i\}|$ a legkisebb. Ez határozza meg ugyanis azt a DI illetve FI időtaratmot, amely alatt a szabad összetevő leglassúbb tagja is elhanyagolhatóvá válik. Könnyen beláthatjuk, hogy $k_i \approx -3\ln|q_i|$ illetve $t_i \approx -3/\mathscr{R}e\{p_i\}$ idő után a megfelelő összetevő kezdeti értékének 5%-a alá csökken. A legnagyobb ilyen idő a szabad összetevő eltűnéséhez szükséges idő egy becslése. Ennél pontosabb kijelentést csak a válasz ismeretében tehetünk, hiszen a gerjesztéstől is függően a szabad összetevő egyes tagjainak az együtthatója nagyon eltérő lehet.

A pólus-zérus elrendezés értelmezése a frekvenciatartományban

A gerjesztés válasz stabilis rendszer pólus-zérus elrendezése az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}}$ illetve $H(\mathrm{j}\omega) = H(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$ kapcsolata alapján értelmezhető. A (21) alakba helyettesítve

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = C\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-s_1)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-s_2)\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-s_m)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_1)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_2)\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_n)};$$
$$H(\mathrm{j}\omega) = C\frac{(\mathrm{j}\omega-z_1)(\mathrm{j}\omega-z_2)\cdots(\mathrm{j}\omega-z_m)}{(\mathrm{j}\omega-p_1)(\mathrm{j}\omega-p_2)\cdots(\mathrm{j}\omega-p_n)}. \tag{4.2-22}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

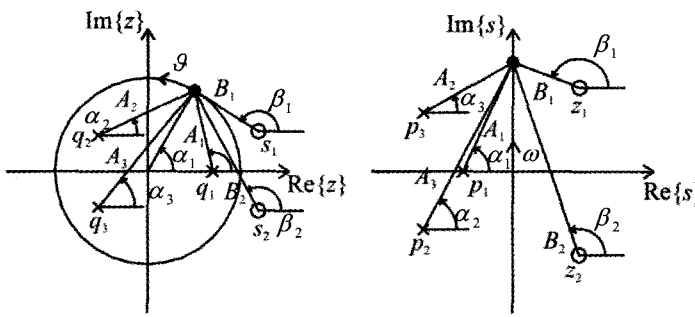
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-s_i = B_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_i = A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_i};$$
$$\mathrm{j}\omega-z_i = B_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i},\ \mathrm{j}\omega-p_i = A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_i}. \tag{4.2-23}$$

A 3. ábrából látható, hogy $e^{j\vartheta}-s_i$ (vagy $e^{j\vartheta}-q_i$) az s_i zérustól (vagy a q_i pólustól) az egységsugarú kör ϑ szögű pontja felé mutat, illetve $j\omega - z_i$ (vagy $j\omega - p_i$) a z_i zérustól (vagy a p_i pólustól) a képzetes tengely ω pontja felé mutat.

A (22)-be helyettesítve kapjuk az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika következő kifejezését:

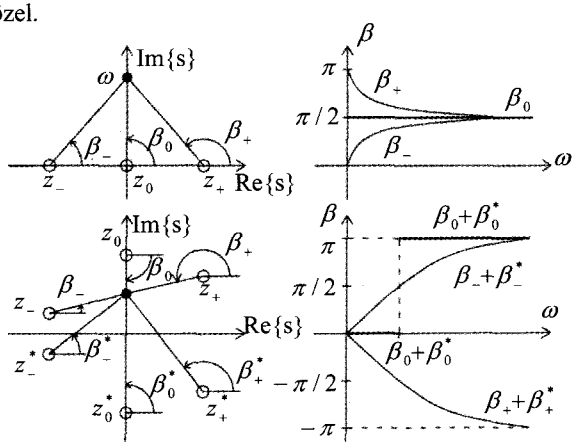
$$|H| = |C| \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n},$$
$$\arg H = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + \arg C. \tag{4.2-24}$$

Az arc $C = 0$, ha C pozitív és arc $C = \pm 180°$, ha C negatív.



4.2-3. ábra Az átviteli karakterisztika szerkesztése az átviteli függvény pólus-zérus elrendezéséből

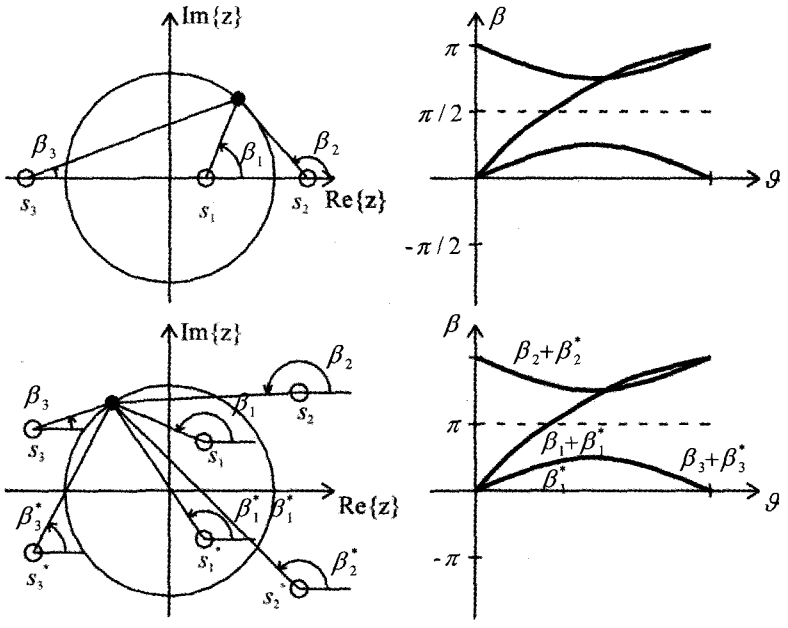
Ennek alapján az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika akár meg is szerkeszthető. Többnyire azonban csak kvalitatív következtetéseket vonunk le ezek viselkedéséről. Ha például valamilyen ϑ illetve ω körfrekvencián a körön illetve a képzetes tengelyen mozgó pont nagyon közel kerül egy pólushoz, akkor a megfelelő A_i érték a nevezőben kicsi lesz, ezért az várható, hogy ezen körfrekvencia környezetében $|H|$-nak lokális maximuma van. Fordított következtetés vonható le, ha a mozgó pont egy zérushoz kerül közel.



4.2-4. ábra A β szög függése az ω körfrekvenciától néhány tipikus zérusra

Egy GV stabilis rendszer pólus-zérus elrendezéséből érdekes következtetéseket vonhatunk le a *fázis-karakterisztika* viselkedését illetően. Alább megvizsgáljuk először a FI rendszer, aztán a DI rendszer fázis-karakterisztikájának viselkedését. Látni fogjuk, hogy bizonyos hasonlóságok mellett eltérések is vannak a két esetben.

A 3. ábrából következik, hogy a FI rendszerre az $\beta_i(\omega) = \arc(\mathrm{j}\omega - z_i)$ szögek a 4. ábrán megadott módon változnak attól függően, hogy a vizsgált zérus vagy konjugált komplex zérus-pár hol helyezkedik el. Ha a zérus a bal félsíkon van (z_-), akkor $\beta_-(\omega)$ monoton növekszik. Ha a zérus a képzetes tengelyen van (z_0), akkor $\beta_0(\omega)$ szakaszonként állandó és ugrása van. Ha a zérus a jobb félsíkon van (z_+), akkor $\beta_+(\omega)$ monoton csökken. Az átviteli függvény pólusai feltétlenül a bal félsíkon vannak. Az $\alpha_i(\omega) = \arc(\mathrm{j}\omega - p_i)$ szögek ugyanolyan viselkedésűek, mint a $\beta_-(\omega)$ szög, vagyis monoton növekszenek.



4.2-5. ábra A β szög viselkedése a ϑ körfrekvencia függvényében néhány tipikus zérusra

A DI rendszer fázis-karakterisztikájának menetét hasonló módon követhetjük, de most a helyzet valamivel bonyolultabb. A 3. és az 5. ábrából arra következtethetünk, hogy az egységsugarú kör belsejébe eső zérushoz tartozó $\beta_1(\vartheta) = \arc(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - s_1)$ szög monoton növekszik. Az egységsugarú körön kívüli zérusokhoz tartozó $\beta_2(\vartheta)$, vagy $\beta_3(\vartheta)$ szög változása azonban nem monoton, nem úgy, mint FI esetben. A pólushoz tartozó $\alpha_i(\vartheta) = \arc(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - q_i)$ szög monoton növekszik.

A fázis-karakterisztika helyett gyakran annak körfrekvencia szerinti negatív deriváltját, a futási idő karakterisztikát vizsgálják.

A 4.2-3.4. pontban még visszatérünk e tulajdonságokra, amikor a minimálfázisú rendszert értelmezzük.

4.2-1.F. Feladatok

F-1. Egy DI illetve FI rendszer impulzusválasza

(a) $h[k]=2\,\delta[k]$; $h(t)=2\,\delta(t)$.

(b) $h[k]=2\,\delta[k-3]$; $h(t)=2\,\delta(t-3)$.

(c) $h[k]=\varepsilon[k]$; $h(t)=\varepsilon(t)$.

(d) $h[k]=\varepsilon[k+1]$; $h(t)=\varepsilon(t+1)$.

(e) $h[k]=\varepsilon[k]\{0{,}5^k-0{,}6^k\}$; $h(t)=\varepsilon(t)\,\{e^{-0{,}5t}-e^{-0{,}6t}\}$.

(f) $h[k]=\varepsilon[k-1]\{0{,}5^{k-1}-2^{k-1}\}$; $h(t)=\varepsilon(t-1)\{e^{-0{,}5(t-1)}-e^{2(t-1)}\}$.

(g) $h[k]=\varepsilon[k]-\varepsilon[k-10]$; $h(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-10)$.

Határozza meg a rendszer átviteli függvényét, ha az értelmezett!

F-2. Az előző feladatban megadott rendszerek közül melyiknek van olyan alakú rendszeregyenlete vagy állapotváltozós leírása, mint amilyent eddig értelmeztünk?

F-3. Az F-1. feladatban meghatározott átviteli függvények ismeretében döntse el, hogy melyik rendszer GV stabilis!

Ellenőrizze így kapott megállapításokat az impulzusválasz alapján!

F-4. Jelölje a lineáris, invariáns, DI illetve FI rendszer ugrásválaszát, azaz az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$ egységugrás gerjesztéshez tartozó válaszát $g[k]$ illetve $g(t)$.

Igazolja a Laplace-transzformáció alkalmazásával, hogy kauzális rendszer esetén az ugrásválasz kifejezése az impulzusválasszal

$$g[k]=\varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k}h[k-i]\equiv\varepsilon[k]\sum_{p=0}^{k}h[p]; \qquad g(t)=\varepsilon(t)\int_{-0}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

F-5. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y^{(i)}[k]=y[k-i]$ jelöléssel (vö. 2.2-2.F-3.)

(a) $y-0{,}5\,y^{(1)}=u-u^{(1)}$

(b) $y-2{,}5\,y^{(1)}+y^{(2)}=u-3\,u^{(1)}+2\,u^{(2)}$.

(c) $y-2{,}5\,y^{(1)}+y^{(2)}=u-3\,u^{(1)}+2{,}0001\,u^{(2)}$.

Azonos vagy különböző rendszereket írnak le ezek a rendszeregyenletek?

F-6. Egy DI illetve egy FI rendszer átviteli karakterisztikája

(a) valós értékű.

(b) képzetes értékű.

Leírható egy ilyen rendszer az átviteli függvényével?

F-7. Egy DI illetve egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}5 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+D\,u.$$

E rendszer nyilván nem aszimptotikusan stabilis. (Indokolja meg, miért nyilvánvaló ez!)

Mi a feltétele annak, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis legyen?

Nagyon speciális a vizsgált másodrendű rendszer?

F-8. Egy DI rendszer amplitúdó-karakterisztikájának négyzete (a rendszer energia-átviteli karakterisztikája)

$$K^2(\vartheta)=\frac{1}{1+a^2\sin^2(\vartheta/2)}.$$

(a) Lássa be, hogy ez egy aluláteresztő jellegű rendszer! Határozza meg azt a ϑ_0 körfrekvenciát, amelyen $K(\vartheta_0)=1/\sqrt{2}$ értékű!

**(b)* Adjon meg egy olyan $H(z)$ átviteli függvényt, amelyhez a megadott amplitúdó-karakterisztika tartozik!

4.2-1.M. Megoldások

M-1. Határozza meg a DI illetve a FI impulzusválasz Laplace-transzformáltját!

(*a*) $H(z)=2$; $H(s)=2$.

(*b*) $H(z)=2z^{-3}\equiv\frac{2}{z^3}$; $H(s)=2\mathrm{e}^{-3s}$.

(*c*) $H(z)=\frac{z}{z-1}$; $H(s)=\frac{1}{s}$.

(*d*) A rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett, az impulzusválasz Laplace-transzformáltja nem ad értelmes mennyiséget.

(*e*) $H(z)=\frac{-0{,}1z}{(z-0{,}5)(z-0{,}6)}$; $H(s)=\frac{0{,}1}{(s+0{,}5)(s+0{,}6)}$.

(*f*) $H(z)=\frac{-1{,}5}{(z-0{,}5)(z-2)}$; $H(s)=\frac{-2{,}5\,\mathrm{e}^{-s}}{(s+0{,}5)(s-2)}$.

(*g*) $H(z)=(1-z^{-10})\frac{z}{z-1}$; $H(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-10s}}{s}$.

M-2. Azok az átviteli függvények, amelyek racionálisak. A DI esetben a (*d*) kivételével valamennyi, a FI esetben csak (*a*), (c) és (*e*).

M-3. A $H(z)$ alapján: az (*a*), (*b*), (*e*) és (*g*) jelűek GV stabilisak; a (*c*) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; az (*f*) jelű nem GV stabilis, sőt labilisnak nevezhető, a (*d*) nem dönthető el.

A $H(s)$ alapján: az (*a*) és az (*e*) jelű GV stabilis:, a (*c*) jelű nem GV stabilis, a stabilitás határhelyzetében van; a (*b*), (*d*), (*f*) és (*g*) jelű nem dönthető el. Valójában csak a (*d*) jelű eset nem dönthető el. A másik három esetben, amikor az átviteli függvény nem racionális, az eltolási tétel alapján tudunk dönteni.

A $h[k]$ alapján: a (*d*) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; a többi, mint előbb.

A $h(t)$ alapján: a (*b*) és (*g*) jelű GV stabilis, a (*d*) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; az (*f*) jelű nem GV stabilis, sőt labilisnak nevezhető; a többi, mint előbb.

M-4. A DI vagy a FI esetben az egységugrás Laplace-transzformáltját képezve a válasz kifejezhető inverz Laplace-transzformációval:

$$g[k]=\mathscr{Z}^{-1}\left\{H(z)\frac{z}{z-1}\right\}=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\left[1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\right]H(z)\right\};\quad g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}H(s)\right\}.$$

Ebből a megadott összefüggések már következnek.

Az ugrásválasz kifejezhető az impulzusválasszal nem kauzális rendszerre is, de ehhez nem használható a Laplace-transzformáció és az eredmény is kissé módosul.

M-5. Határozza meg az átviteli függvényt és redukálja azt, ha lehetséges.

$$(a)\ H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-0{,}5\,z^{-1}}\equiv\frac{z-1}{z-0{,}5}.$$

$$(b)\ H(z)=\frac{1-3\,z^{-1}+2\,z^{-2}}{1-2{,}5\,z^{-1}+z^{-2}}\equiv\frac{(z-1)(z-2)}{(z-0{,}5)(z-2)}=\frac{z-1}{z-0{,}5}.$$

$$(c)\ H(z)=\frac{z^2-3\,z+2{,}0001}{(z-0{,}5)(z-2)}\equiv\frac{(z-1)(z-2)+0{,}0001}{(z-0{,}5)(z-2)}.$$

Elméleti szempontból az (*a*) és a (*b*) ugyanazt a rendszert írja le, a (*c*) jelű rendszer hozzájuk nagyon hasonló, de míg az előzőek GV stabilisak, az utolsó nem az.

A numerikus bizonytalanságok miatt nehéz határozott választ adni a kérdésre, noha az elméleti válasz egyértelmű.

M-6. Az impulzusválasz az (*a*) jelű esetben páros, a (*b*) jelű esetben páratlan jel. Eltekintve a $H = K$ esettől (a frekvenciától független, valós értékű átviteli karakterisztika) az ilyen rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett.

M-7. A rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha $B_2\,C_2 = 0$, vagyis ha e két paraméter legalább egyike nulla. Egyszeres valós sajátértékek esetén mindig elérhető, hogy az A mátrix diagonális legyen.

M-8. *(a)* A $K(\vartheta)$ monoton csökken a $(0,\pi)$ intervallumban a $K(0) = 1$ értékről a $K(\pi)=1/\sqrt{1+a^2}<1$ értékre. Ha $a^2>1$, akkor $\vartheta_0 = 2\arcsin(1/a)$.

**(b)* Az amplitúdó-karakterisztika négyzetének más alakjai

$$K^2(\vartheta)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\cos\vartheta}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-\frac{1}{4}a^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta}}.$$

Ebből következően $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}=z$ helyettesítéssel

$$H(z)H(z^{-1})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2z-\frac{1}{4}a^2\,z^{-1}}=\frac{C^2}{(z-q)(z^{-1}-q)}.$$

A C és q paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek

$$\frac{1+q^2}{C^2}=1+\frac{a^2}{2},\ \frac{q}{C^2}=\frac{a^2}{4}\ \Rightarrow\frac{1+q^2}{q}=2\,\frac{2+a^2}{a^2}.$$

A másodfokú egyenlet megoldásával és $|q|<1$ kielégítésével

$$q=\frac{2+a^2-2\sqrt{1+a^2}}{a},\quad C=\pm\frac{2\sqrt{q}}{a}.$$

A keresett átviteli függvény $H(z)=C/(z-q)$ vagy $H(z)=C\,z/(z-q)$.

4.2-2. A válasz számítása

4.2-2.1. Az átviteli függvény alkalmazása

Meg akarjuk határozni egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszernek az adott $u[k]$ illetve $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y[k]$ illetve $y(t)$ válaszát $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényének ismeretében. A feladat többféleképpen is megoldható. Az alkalmazható módszerek a gerjesztés és a rendszer tulajdonságaitól függnek.

Belépő gerjesztéshez tartozó válasz

Tekintsük először azt az esetet, amikor a belépő gerjesztéshez tartozó választ keressük. Először határozzuk meg a gerjesztés Laplace-transzformáltját (ez szinte minden gyakorlati esetben értelmezett):

$$U(z)=\mathscr{Z}\{u[k]\};\quad U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}. \tag{4.2-25}$$

Az átviteli függvény (1) definíciója értelmében a válasz kifejezése a komplex frekvenciatartományban:

$$Y(z)=H(z)U(z);\quad Y(s)=H(s)U(s). \tag{4.2-26}$$

Inverz Laplace-transzformációval (4.1-2. szakasz) előállíthatjuk a válasz időfüggvényét:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{DI}: y[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\};\\ &\text{FI}: y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}.\end{aligned}} \tag{4.2-27}$$

Az inverz transzformáció belépő választ eredményez. Ez helyes is, hiszen kikötéseink szerint a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő.

Stabilis rendszer válasza

Ha a rendszer GV stabilis, azaz $H(z)$ minden pólusa egységsugarú körön belül illetve $H(s)$ minden pólusa a bal félsíkon van. Ekkor a $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ illetve a $H(\mathrm{j}\omega)$átviteli karakterisztika előállítható $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ illetve $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítéssel az átviteli függvényből. Ha meg tudjuk határozni a (nem feltétlenül belépő) gerjesztés spektrumát, akkor a válasz spektruma is előállítható. Pontos vagy közelítő inverz Fourier-transzformációval előállítható a válasz $y[k]$ illetve $y(t)$ időfüggvénye (3.2-2.1. pont).

Példa Egy DI illetve egy FI rendszer átviteli függvénye adott:

$$H(z)=\frac{0{,}5\,z}{z-0{,}5};\qquad H(s)=\frac{s}{s+2}.$$

Határozzuk meg a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés

$$u[k]=\varepsilon[k]\{1-0{,}8^k\};\qquad u(t)=\varepsilon(t)\{1-\mathrm{e}^{-3t}\}.$$

A gerjesztés belépő, ezért alkalmazhatjuk a számítás legegyszerűbb módját:

$$U(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}8}=\frac{0{,}2\,z}{(z-1)(z-0{,}8)};\quad U(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}=\frac{3}{s(s+3)};$$

$$Y(z)=\frac{0{,}1\,z^2}{(z-1)(z-0{,}8)(z-0{,}5)}; \qquad Y(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)};$$

$$y[k]=\varepsilon[k]\left\{1-\frac{4}{3}(0{,}8)^k+\frac{1}{3}(0{,}5)^k\right\}; \qquad y(t)=\varepsilon(t)\left\{2\,\mathrm{e}^{-2t}-2\,\mathrm{e}^{-3t}\right\}.$$

Az Olvasóra bízzuk az eredmény ellenőrzését a második és a harmadik módszer alkalmazásával. A spektrális leírás alkalmazható, de némi óvatosságra van szükség. #

A válasz számítása általános esetben

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a kauzális (de esetleg nem GV stabilis) rendszer gerjesztése nem belépő. Ekkor inverz Laplace-transzformációval meghatározzuk a rendszer $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválaszát, majd ennek ismeretében számítjuk a nem belépő választ az impulzusválasz és a gerjesztés konvolúciójaként.

4.2-2.2. A rendszeregyenlet megoldása

Legyen adott egy lineáris, invariáns, kauzális rendszer *rendszeregyenlete* a szokásos alakjában (2.2-1. szakasz):

$$\begin{aligned} &\mathrm{DI}: \quad y[k]+\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{i=0}^{m} b_i\, u[k-i]; \\ &\mathrm{FI}: \quad y^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\, y^{(i)}(t)=\sum_{i=0}^{n} b_{n-i}\, u^{(i)}(t), \end{aligned} \tag{4.2-28}$$

ahol $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i-edik (általánosított) deriváltját jelöli. Ismertek az a_i, b_i állandó együtthatók, továbbá $u[k], k \in \mathbf{Z}$ illetve $u(t), t \in \mathbf{R}$. Feltételezzük, hogy a rendszer „múltjának", azaz a $k=0$ illetve a $t=0$ időpont előtti viselkedésének ismeretében már meghatároztuk az $y[-1], y[-2], \ldots, y[-n]$ illetve az $y(-0), y^{(1)}(-0), \ldots, y^{(n-1)}(-0)$ kiindulási értékeket. Belépő gerjesztés esetén ezek mindegyike nulla. Célunk $y[k], k \in \mathbf{N}$ illetve $y(t), t \in \mathbf{R}_+$ meghatározása.

Először belépő, majd általános gerjesztésre tárgyaljuk a feladat megoldását a Laplace-transzformáció alkalmazásával.

Belépő gerjesztés hatása

Ha a gerjesztés belépő, akkor a kauzális rendszer válasza is belépő. Ekkor meghatározhatjuk a rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényét (4.2-1.2. pont). Ennek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz inverz DI illetve FI Laplace-transzformációval számítható.

Nem belépő gerjesztés hatása

A nem belépő gerjesztés vizsgálata során a jelölések egyszerűsítése érdekében szorítkozzunk másodrendű rendszerekre. Az általánosítás nagyobb rendszámra nem okoz elvi nehézséget.

Vizsgáljuk a következő rendszeregyenletet és kiindulási értékeket:

$$y[k]+a_1\,y[k-1]+a_2\,y[k-2]=b_0u[k]+b_1\,u[k-1]+b_2\,u[k-2];\ y[-1],y[-2];$$
$$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_2\,y(t)=b_0\,u^{(2)}(t)+b_1u^{(1)}(t)+b_2\,u(t);\ y(-0),y^{(1)}(-0). \tag{4.2-29}$$

Képezzük az egyenlet Laplace-transzformáltját. Vegyük figyelembe a késleltetett DI jelre vonatkozó (4.1-25) illetve a FI jel deriváltjára vonatkozó (4.1-27, 28) szabályokat:

$$\mathscr{Z}\{x[k-1]\}=z^{-1}X(z)+x[-1],\quad \mathscr{Z}\{x[k-2]\}=z^{-2}X(z)+x[-2]+x[-1]z^{-1};$$
$$\mathscr{L}\{x^{(1)}(t)\}=s\,X(s)-x(-0),\quad \mathscr{L}\{x^{(2)}(t)\}=s^2X(s)-x(-0)s-x^{(1)}(-0).$$

A transzformáció eredménye

$$Y(z)+a_1\,\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\}+a_2\,\{z^{-2}\,Y(z)+y[-2]+y[-1]z^{-1}\}=$$
$$=b_0\,U(z)+b_1\,\{z^{-1}U(z)+u[-1]\}+b_2\{z^{-2}U(z)+u[-2]+u[-1]z^{-1}\};$$
$$\{s^2\,Y(s)-y(-0)s-y^{(1)}(-0)\}+a_1\,\{s\,Y(s)-y(-0)\}+a_2Y(s)=$$
$$=b_0\,\{s^2U(s)-u(-0)s-u^{(1)}(-0)\}+b_1\,\{s\,U(s)-u(-0)\}+b_2\,U(s).$$

Ennek megoldásával kapjuk a transzformált válasz kifejezését:

$$\text{DI}:\ Y(z)=\frac{\{b_0\,z^2+b_1\,z+b_2\}U(z)+c_0\,z^2+c_1\,z}{z^2+a_1\,z+a_2},$$
$$c_0\equiv b_1u[-1]+b_2\,u[-2]-a_1y[-1]-a_2y[-2],\ c_1\equiv b_2u[-1]-a_2y[-1]; \tag{4.2-30}$$
$$\text{FI}:\ Y(s)=\frac{\{b_0s^2+b_1s+b_2\}U(s)+c_1s+c_2}{s^2+a_1s+a_2},$$
$$c_1\equiv y(-0)-b_0\,u(-0),\ c_2\equiv -a_1y(-0)-y^{(1)}(-0)-b_1u(-0)-b_0u^{(1)}(-0).$$

Az $y[k]$ illetve az $y(t)$ válasz két összetevőből áll. Az elsőt a gerjesztés nem-negatív k illetve t esetén felvett értékei határozzák meg, ez $H(z)U(z)$ illetve $H(s)U(s)$ inverz Laplace-transzformáltja. A válasz második összetevője csak a gerjesztés negatív időkben felvett értékeitől függ. A második összetevőt nem befolyásolják a gerjesztés Laplace-transzformáltjának pólusai.

Összehasonlítva a rendszeregyenlet időtartománybeli megoldásával (2.2-2. szakasz), jól látható a Laplace-transzformációs módszer egy előnye: csak a válasz kiindulási értékeire van szükségünk, az $y[0]$, $y[1]$,... illetve az $y(+0)$, $y^{(1)}(+0)$,... kezdeti értékeket nem kell meghatároznunk.

A kiindulási értékek meghatározása csak akkor kerülhető el, ha számításunkat mindig attól az időponttól kezdjük, amely előtt a gerjesztés azonosan nulla. Ez az álláspont fizikailag indokolt, de nem mindig kényelmes. Ha azonban nem a gerjesztés belépésének pillanatától kezdjük a számítást, akkor meg kell vizsgálni, hogy a formálisan számított kiindulási értékek valóban előállnak-e, vagyis hogy a rendszer stabilis-e.

1. példa Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y-y^{(1)}+0{,}24\,y^{(2)}=u+0{,}5\,u^{(1)}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a gerjesztés

$$u[k]=2\,\{1-\varepsilon[k]\}+\varepsilon[k]0{,}5^k.$$

A rendszer GV stabilis (ezt célszerű a számítás kezdése előtt tisztázni, egyébként a feladat értelmetlen). Az $u[k]=2$, $k \in \mathbf{Z}_-$ állandó gerjesztéshez egy $y[k]=y^-$, $k \in \mathbf{Z}_-$ állandó válasz tartozik. A rendszeregyenletbe helyettesítve:

$$y^- - y^- + 0{,}24\, y^- = 2 + (0{,}5)(2) \Rightarrow y^- = 12{,}5 .$$

Most helyettesíthetünk (30)-ba, vagy követhetjük az előzőleg leírt eljárást:

$$Y(z) - \left\{z^{-1}Y(z) + 12{,}5\right\} + 0{,}24\left\{z^{-2}Y(z) + 12{,}5 + 12{,}5z^{-1}\right\} = \frac{z}{z-0{,}5} + 0{,}5\left\{z^{-1}\frac{z}{z-0{,}5} + 2\right\}.$$

A válasz transzformáltjának kifejezése elemi rendezések után

$$Y(z) = z\,\frac{11{,}5\,z^2 - 7{,}75\,z + 1{,}5}{\left(z^2 - z + 0{,}24\right)(z-0{,}5)} \equiv z\,\frac{11{,}5\,z^2 - 7{,}75\,z + 1{,}5}{(z-0{,}6)(z-0{,}4)(z-0{,}5)}.$$

Részlettörtekre bontás után egyszerűen kapjuk a válasz időfüggvényét:

$$y[k] = 49{,}5\,(0{,}6)^k + 12{,}0\,(0{,}4)^k - 50{,}0\,(0{,}5)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tudjuk, hogy $k \in \mathbf{Z}_-$ esetén $y[k]=12{,}5$. Noha a megoldás csak k nem-negatív értékeire érvényes, de $k = -1$ és -2 esetén mégis a helyes eredményt adja, de k más negatív értékeire nem. #

2. példa Egy folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 4\,y^{(1)} + 3\,y = 5\,u^{(1)} + u .$$

Határozzuk meg a választ, ha a gerjesztés

$$u(t) = 6\left\{1 - \varepsilon(t)\right\} + 4\,\varepsilon(t).$$

Mivel a rendszer GV stabilis (egyébként a feladat értelmetlen), ezért az $u(t)=6$, $t \in \mathbf{R}_-$ állandó gerjesztéshez $y(t)=y^-$, $t \in \mathbf{R}_-$ állandó válasz tartozik. Az állandó minden deriváltja nulla. Ennek alapján a rendszeregyenletből $y^- = 6/3 = 2$ adódik. Képezzük a rendszeregyenlet Laplace-transzformáltját ezek felhasználásával:

$$\left\{s^2\,Y(s) - 2\,s - 0\right\} + 4\left\{s\,Y(s) - 2\right\} + 3\,Y(s) = 5\left\{s\,\frac{4}{s} - 6\right\} + \frac{4}{s}.$$

A transzformált válasz kifejezése ebből

$$Y(s) = \frac{2\,s^2 - 2s + 4}{s\left(s^2 + 4s + 3\right)} \equiv \frac{2\,s^2 - 2\,s + 4}{s\,(s+1)\,(s+3)}.$$

Részlettörtekre bontás után egyszerűen kapjuk a válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \frac{4}{3} - 4\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{14}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad t \in \mathbf{R}_+ .$$

Az Olvasóra bízzuk a válasz megadását a gerjesztéshez hasonló alakban.

Akár $Y(s)$ kifejezéséből polinomosztással, akár $y(t)$ kifejezéséből differenciálással megállapíthatjuk, hogy $y(+0) = 2$, $y'(+0) = -10$. Az $y(t)$ folytonos a $t = 0$ helyen, de deriváltja nem az. #

4.2-2.3. Az állapotváltozós leírás megoldása

Legyen adott egy lineáris, invariáns kauzális DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírása normál alakban. Egy gerjesztés és egy válasz esetén (2.3-1. szakasz):

$$\mathbf{x}'=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}+\mathbf{B}\,u, \qquad y=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+D\,u, \tag{4.2-31}$$

ahol $x'[k] = x[k+1]$ illetve $x'(t)$ az $x(t)$ általánosított deriváltja.

Ha minden *gerjesztés belépő*, akkor meghatározhatjuk a H átviteli függvényt (4.2-1.3. pont). Ennek ismeretében a transzformált válasz kifejezhető:

$$Y(z)=H(z)U(z); \qquad Y(s)=H(s)U(s). \tag{4.2-32}$$

Inverz Laplace-transzformációval előállíthatjuk a válasz $y[k]$ illetve $y(t)$ időfüggvényét, amely maga is belépő jel.

Ha a gerjesztés nem belépő, akkor először meg kell határoznunk az állapotvektor $\mathbf{x}[0]$ kezdeti értékét illetve $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét a rendszer múltbeli viselkedése alapján ($k \in \mathbf{Z}_-$ illetve $t \in \mathbf{R}_-$). Képezzük az állapotváltozós leírás Laplace- transzformáltját a (4.1-26, 27) figyelembe vételével, amely szerint

$$\mathscr{Z}\{x'[k]\}=z\,X(z)-x[0]\,z; \quad \mathscr{L}\{x'(t)\}=sX(s)-x(-0).$$

Az állapotváltozós leírás Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} z\,\mathbf{X}(z)-\mathbf{x}[0]\,z &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{X}(z)+\mathbf{B}\,U(z), & s\,\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(-0) &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\,U(s),\\ Y(z) &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(z)+D\,U(z); & Y(z) &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(z)+D\,U(z). \end{aligned}$$

A transzformált állapotegyenlet megoldása

$$\mathbf{X}(z)=[z\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\{\mathbf{B}\,U(z)+\mathbf{x}[0]\,z\}; \qquad \mathbf{X}(s)=[s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\{\mathbf{B}\,U(s)+\mathbf{x}(-0)\}.$$

Ezt a transzformált válasz kifejezésbe helyettesítve, kapjuk annak végső alakját:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[z\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{B}+D\}U(z)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[z\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{x}[0]\,z;\\ Y(s) &= \{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{B}+D\}U(s)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[z\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{x}(-0). \end{aligned} \tag{4.2-33}$$

Az első tagban az U szorzója az átviteli függvénynek a már megadott (12) szerinti alakját adja. A második tag fejezi ki az állapotvektor kezdeti illetve kiindulási értékének hatását a válaszra. A válasz időfüggvénye inverz Laplace-transzformációval állítható elő.

*4.2-2.4. A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz

Legyen a lineáris, invariáns, kauzális rendszer egyetlen gerjesztése *belépő* és k illetve t nem-negatív értékeire *periodikus* jel, amelynek periódusideje $L \in \mathbf{Z}_+$ illetve $T \in \mathbf{R}_+$. A 4.1-1.4. pontban bevezetett jelölést alkalmazva, a gerjesztés első periódusát

$$u_L[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L]\}\,u[k]; \quad u_T(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}\,u(t) \tag{4.2-34}$$

írja le. A $k=0$ illetve a $t=0$ időpont után periodikus gerjesztés kifejezése ($\varepsilon_L[k]$ illetve $\varepsilon_T(t)$ az ismétlési operátor):

$$u[k]=\varepsilon_L[k]u_L[k]\equiv u_L[k]+u_L[k-L]+u_L[k-2L]+\ldots;$$
$$u(t)=\varepsilon_T(t)u_T(t)\equiv u_T(t)+u_T(t-T)+u_T(t-2T)\ldots. \tag{4.2-35}$$

Képezzük $u_L[k]$ illetve $u_T(t)$ Laplace-transzformáltját, ami rendszerint egyszerű feladat:

$$U_L(z)=\mathscr{Z}\{u_L[k]\};\quad U_T(s)=\mathscr{L}\{u_T(t)\}.$$

A gerjesztés Laplace-transzformáltja a (4.1-42) értelmében

$$U(z)=\frac{1}{1-z^{-L}}U_L(z)\equiv\frac{z^L}{z^L-1}U_L(z);\quad U(s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}U_T(s). \tag{4.2-36}$$

A rendszer $H(z)$ vagy $H(s)$ átviteli függvényének ismeretében kifejezhetjük a válasz Laplace-transzformáltját:

$$Y(z)=H(z)\frac{z^L}{z^L-1}U_L(z);\quad Y(s)=H(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}U_T(s). \tag{4.2-37}$$

Célunk az $y[k]$ illetve $y(t)$ válasz időfüggvényének meghatározása. Erre két eljárást fogunk adni. Konkrét feladatok megoldásánál az alább leírtak gondolatmenetét célszerű követni és nem a végeredményeket formulaként használni.

A továbbiakban racionális átviteli függvényre szorítkozunk:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)};\quad H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}, \tag{4.2-38}$$

ahol a B polinom fokszáma nem nagyobb az A polinom fokszámánál.

A diszkrét idejű válasz Fourier-soros alakja

Állítsuk elő az $y[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ DI függvényt részlettörtekre bontással. Az $Y(z)$ pólusai egyfelől a $H(z)$ átviteli függvény q_i pólusai, másrészt a $z^L-1=0$ egyenlet L számú z_p gyöke, amelyek az egységsugarú körön helyezkednek el. Az ennek megfelelő $z_p^L=\mathrm{e}^{\mathrm{j}p2\pi}$ alakból következik, hogy

$$z_p=\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Theta},\quad \Theta\equiv\frac{2\pi}{L};\quad p=0,1,2,\ldots,L-1. \tag{4.2-39}$$

A $z^L U_L(z)$ függvénynek nincs pólusa, mert $U_L(z)$ a z^{-1} változónak legfeljebb $L-1$ fokszámú polinomja.

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény minden q_i pólusa egyszeres (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). A válasz kifejezése ekkor

$$y[k]=\varepsilon[k]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{B(q_i)}{A_i(q_i)}\frac{q_i^{L-1}}{q_i^L-1}U_L(q_i)q_i^k+\sum_{p=0}^{L-1}\frac{1}{L}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Theta})U_L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Theta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\Theta k}\right\}, \tag{4.2-40}$$

ahol $A_i(z)=A(z)/(z-q_i)$. Például a L'Hospital-szabály alapján kapjuk, hogy

$$\left.\frac{z^L-1}{z-z_p}\right|_{z=z_p}=L\,z_p^{L-1},$$

amint azt a második tagban felhasználtuk.

A válasz kifejezésében az első tag a válasz szabad összetevője, amely nullához tart, ha a rendszer GV stabilis (minden $|q_i|<1$). A második tag a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakja. Ez átírható arra a célszerűbb alakra, amely csak a $p=0,1,\ldots,L/2$ vagy $(L-1)/2$ sorszámú tagokat tartalmazza (3.1-2.2. pont).

A folytonos idejű válasz Fourier-soros alakja

A folytonos idejű esetben az előzőhöz hasonlóan járhatunk el. Az $Y(s)$ transzformált válasz pólusai egyfelől a $H(s)$ átviteli függvény p_i pólusai, továbbá az $1-\mathrm{e}^{-sT}=0$ egyenlet gyökei, amelyek mind képzetesek. Az $\mathrm{e}^{s_kT}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}k2\pi}$ alakból kapjuk, hogy

$$s_k=\mathrm{j}k\,\Omega,\quad \Omega\equiv\frac{2\pi}{T};\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{4.2-41}$$

Az $U_T(s)$ függvénynek nincs pólusa, hiszen ellenkező esetben nem lehetne nulla $t>T$ esetén. Az $1-\mathrm{e}^{-sT}$ függvény nem polinom, mégis alkalmazható rá a részlettörtekre bontás módszere, amely most végtelen sort jelent. A nevezőben megjelenő tényező

$$D_i(s_k)=\lim_{s\to s_k}\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s-s_k}=\left.\frac{\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-sT}\right)}{\mathrm{d}s}\right|_{s_k}=T\,\mathrm{e}^{s_kT}=T.$$

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény minden p_i pólusa egyszeres (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). A válasz kifejezése ekkor

$$y(t)=\varepsilon(t)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{B(p_i)}{A_i(p_i)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p_iT}}U_T(p_i)\mathrm{e}^{p_it}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}H(\mathrm{j}k\Omega)U_T(\mathrm{j}k\Omega)\right\}, \tag{4.2-42}$$

ahol $A_i(s)=A(s)/(s-p_i)$. A válasz kifejezésében az első és a második összeg ugyanúgy értelmezhető, amint azt a DI esetben előzőleg láttuk.

A folytonos idejű válasz ismétlődős alakja

A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz két tag összege: az $y_f(t)$ szabad összetevőt az átviteli függvény p_i pólusai határozzák meg, míg az $y_g(t)$ gerjesztett összetevő periodikus, amely a (35) szerinti $\varepsilon_T(t)y_T(t)$ ismétlődő alakban írható fel. A komplex frekvencia-tartományban e felbontás

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}U_T(s)=\frac{C(s)}{A(s)}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}Y_T(s). \tag{4.2-43}$$

A $C(s)$ polinom és az $Y_T(s)$ függvény ismeretlen. A $C(s)$ polinom fokszáma kisebb az $A(s)$ polinom n fokszámánál.

Bontsuk az első összetevőt részlettörtjeire. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény p_i pólusai egyszeresek (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). Ekkor

$$\frac{C(s)}{A(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-p_i}. \tag{4.2-44}$$

Szorozzuk meg (43) mindkét oldalát az $(s-p_i)$ tényezővel és végezzük el az $s\to p_i$ határátmenetet. A C_i együttható kifejezése ebből

$$C_i=\frac{B(p_i)}{A_i(p_i)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p_iT}}U_T(p_i);\quad A_i(p_i)=\left.\frac{A(s)}{s-p_i}\right|_{s=p_i}. \tag{4.2-45}$$

Most már számíthatjuk a válasz *szabad összetevőjét:*

$$y_{\mathrm{f}}(t)=\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{n}C_i\,\mathrm{e}^{p_it}. \tag{4.2-46}$$

Fejezzük ki az ismeretlen $Y_T(s)$ függvényt az (43)-ból:

$$Y_T(s)=\frac{B(s)}{A(s)}U_T(s)-\left[1-\mathrm{e}^{-sT}\right]\frac{C(s)}{A(s)}. \tag{4.2-47}$$

Egyszeres pólusok esetére egyszerűen igazolható (ennek mintájára többszörös pólusok esetére is), hogy $y_T(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_T(s)\}=0$, ha $t>T$, amiből következik, hogy (43) második tagja valóban periodikus jelet ír le. Határozzuk most meg $Y_T(s)$ inverz Laplace-transzformáltját $0\le t<T$ esetére:

$$y_T(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{A(s)}U_T(s)-\frac{C(s)}{A(s)}\right\},\quad 0\le t<T. \tag{4.2-48}$$

A második tag inverz Laplace-transzformáltja $y_{\mathrm{f}}(t)$, amelyet egyszeres pólusokra (46) ad meg. Az első tag inverz transzformáltját körültekintően kell számítani, mert $U_T(s)$ többnyire tartalmaz e^{-sT_i} $(0<T_i<T)$ alakú tényezőket.

A válasz kifejezésének végső alakja

$$y(t)=y_{\mathrm{f}}(t)+\varepsilon_T y_T(t),\quad t\in\mathbf{R}, \tag{4.2-49}$$

ahol $y_{\mathrm{f}}(t)$ kifejezését a (46) adja egyszeres pólusok esetére, míg $y_T(t)$ kifejezését a (48) adja meg.

Mint említettük: az eljárás alkalmazása során az (43)-(49) összefüggéseket számítási utasításként célszerű felfogni és nem képletekként.

A módszerek összehasonlítása

A belépő, majd ezután periodikus gerjesztéshez tartozó választ előállíthatjuk egy periodikus gerjesztett összetevő és egy nem-periodikus (szabad) összetevő összegeként. A periodikus összetevőt vagy Fourier-sorával adjuk meg vagy első periódusával. Ha csak a gerjesztett összetevőre van szükségünk, akkor a szabad összetevő számítása az első esetben elhagyható, a második eljárás alkalmazásakor azonban nem.

A DI esetben a Fourier-sor véges (legfeljebb $L/2$ vagy $[L+1]/2$) számú tagból áll. A második alak ezért ekkor nem különösen hasznos, ezért annak előállítását nem is részleteztük.

A FI esetben a Fourier-sor általában végtelen számú tagból áll, a csonkításával elkövetett hiba becslése nem egyszerű feladat. A második alak azonban véges számú tag összege, ezért elvileg pontos eredményt szolgáltat.

A Laplace-transzformáció alkalmazása még akkor is előnyös lehet, ha a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakját akarjuk előállítani. Most ugyanis el tudjuk dönteni a rendszer GV stabilitását, tehát azt, hogy a gerjesztett válasz tekinthető-e állandósult válasznak. Nincs szükségünk továbbá a gerjesztés Fourier-soros alakjának előállítására.

Folytonos idejű esetben mindkét módszernek van előnye is, hátránya is, diszkrét idejű esetben a Fourier-soros előállítás hatékonyabb.

1. példa Egy GV stabilis DI rendszer átviteli függvénye

$$H(z)=\frac{1+0{,}5\,z^{-1}-0{,}2\,z^{-3}}{1-z^{-1}+0{,}24\,z^{-2}}\equiv\frac{z^3+0{,}5\,z^2-0{,}2}{z(z-0{,}4)(z-0{,}6)}.$$

A gerjesztés belépő és k pozitív értékeire periodikus:

$$u[k]=\varepsilon_L[k]u_L[k];\quad u_L[k]=\delta[k]+\delta[k-1],\quad L=6.$$

Határozzuk meg a válasz időfüggvényét!

A gerjesztés és a válasz DI Laplace-transzformáltja

$$U(z)=\frac{z^6}{z^6-1}U_L(z),\quad U_L(z)=1+z^{-1}\equiv\frac{z+1}{z};$$

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{z^3+0{,}5\,z^2-0{,}2}{z(z-0{,}4)(z-0{,}6)}\frac{z^6}{z^6-1}\frac{z+1}{z}=\frac{z^4(z+1)(z^3+0{,}5\,z^2-0{,}2)}{(z^6-1)(z-0{,}4)(z-0{,}6)}.$$

Határozzuk meg először a gerjesztett válasz Fourier-soros alakját. Ehhez szükségünk van a $z^6=1$ egyenlet gyökeire, amelyek

$$z_p=\mathrm{e}^{\mathrm{j}p2\pi/6}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\pi/3};\quad p=0,\pm1,\pm2,3.$$

A gerjesztés által meghatározott alap-körfrekvencia $\Theta=2\pi/L=\pi/3$.

Az $y_g[k]$ gerjesztett összetevő komplex Fourier-együtthatói a (40) szerint

$$Y_p^C=\frac{1}{6}\frac{z^3+0{,}5\,z^2-0{,}2}{z(z-0{,}4)(z-0{,}6)}\frac{z+1}{z}\bigg|_{z_p}.$$

A gerjesztett válasz kifejezése elemi számítás után

$$y_g[k]=1{,}806+1{,}150\cos(\Theta k-1{,}861)+0{,}133\cos(2\Theta k-2{,}375),\quad \Theta=\pi/3.$$

Ez megegyezik a 3.1-2.3. pont példájában más módon kapott eredménnyel.

A válasz szabad összetevője az átviteli függvény 0,4 és 0,6 pólusaihoz tartozik. A visszatranszformálás előtt célszerű lehet $Y(z)$ kifejezését a következő alakra hozni:

$$Y(z)=z\frac{z^3(z+1)(z^3+0{,}5\,z-0{,}2)}{(z^6-1)(z-0{,}4)(z-0{,}6)}.$$

Inverz DI Laplace-transzformációval kapjuk a válasz szabad összetevőjének kifejezését:

$$y_f[k]=0{,}0288\cdot 0{,}4^k-0{,}500\cdot 0{,}6^k\,.$$

Ha $k>10$, akkor a szabad összetevő elhanyagolható, beáll az állandósult állapot. #

2. példa Egy folytonos idejű, stabilis rendszer átviteli függvénye

$$H(s)=\frac{s}{s+0{,}2}\,.$$

A belépő és t pozitív értékeire periodikus gerjesztés

$$u(t)=\varepsilon_T(t)u_T(t);\qquad u_T(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1),\quad 0<t<T=2\,.$$

Határozzuk meg a választ mindkét előzőleg tárgyalt alakjában.
A gerjesztés és a válasz FI Laplace-transzformáltja

$$U(s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s};\quad Y(s)=\frac{s}{s+0{,}2}\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)s}=\frac{1}{(s+0{,}2)\left(1+\mathrm{e}^{-s}\right)}.$$

Határozzuk meg először a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakját. Ezeket az $\mathrm{e}^s=-1$ egyenlet gyökei határozzák meg, amelyek

$$s_k=\mathrm{j}\pi k,\quad k=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots.$$

A gerjesztés által meghatározott alapharmonikusú körfrekvencia $\Omega=2\pi/T=\pi$. A nevezőben szereplő tényező

$$\left.\frac{1+\mathrm{e}^{-s}}{s-s_k}\right|_{s=s_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{1+\mathrm{e}^{-s}\right\}\Big|_{s=s_k}=-\mathrm{e}^{-s}\Big|_{s=s_k}=+1\,.$$

A válasz gerjesztett összetevőjének Fourier-soros alakja ennek alapján

$$y_g(t)=2\sum_{k=1,3,\ldots}\mathcal{R}e\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega t}}{\mathrm{j}\pi k+0{,}2}\right\}=\sum_{k=1,3,\ldots}Y_k\cos(k\pi t+\rho_k);\quad Y_k=\frac{2}{\sqrt{0{,}2^2+\pi^2k^2}},\ \mathrm{tg}\,\rho_k=-5\pi k\,.$$

Láthatjuk, hogy az $Y_1=0{,}318$ alapharmonikusú amplitúdó a legnagyobb, az amplitúdók monoton csökkennek $(Y_3=0{,}106, Y_5=0{,}0637,\ldots)$. A konvergencia lassú. Ez nem meglepő, mert a gerjesztés nem folytonos és a rendszer felüláteresztő jellegű. Az eredményt úgy is megkaphattuk volna, hogy kiszámítjuk a gerjesztés Fourier-sorát és a $H(\mathrm{j}k\Omega)$ átviteli együtthatókat.

A válasz szabad összetevője az átviteli függvény $p_1=-0{,}2$ pólusa által meghatározott:

$$y_f(t)=\varepsilon(t)\frac{1}{1+\mathrm{e}^{0{,}2}}\mathrm{e}^{-0{,}2t}=0{,}450\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}.$$

Ha $t>25$ (mintegy 12 periódus), akkor ez az összetevő elhanyagolható, beáll az állandósult állapot.

A válasz ismétlődő alakjának előállításához fejezzük ki Laplace-transzformáltját a következő alakban:

$$Y(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)(s+0{,}2)}=\frac{C(s)}{s+0{,}2}+\frac{Y_T(s)}{1-\mathrm{e}^{-2s}}.$$

Az átviteli függvény $p_1=-0{,}2$ pólusánál

$$C(-0{,}2)=\left.\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\right|_{s=-0{,}2}=\frac{1-\mathrm{e}^{0{,}2}}{1-\mathrm{e}^{0{,}4}}=0{,}4502.$$

A vizsgált esetben $C(s)$ állandó és megegyezik a $C(p_1)$ értékkel. A $C(s)$ függvényre egyébként sincs szükségünk, csak a $C(p_i)$ helyettesítési értékekre. A válasz szabad összetevője ennek felhasználásával

$$y_{\mathrm{f}}(t)=0{,}4502\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t},$$

mint azt korábban már megállapítottuk. A transzformált válasz kifejezéséből

$$Y_T(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s+0{,}2}-\left[1-\mathrm{e}^{-2s}\right]\frac{C(s)}{s+0{,}2}.$$

Ennek inverz transzformáltja $y_{\mathrm{f}}(t)$ kifejezését is felhasználva

$$y_T(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-0{,}2t}-\varepsilon(t-1)\mathrm{e}^{-0{,}2(t-1)}-0{,}4502\,\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-0{,}2t};\quad 0<t<T=2.$$

Rendezés után áttekinthetőbb alakhoz jutunk:

$$y_T(t)=0{,}550\left\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\right\}\mathrm{e}^{-0{,}2t}-0{,}550\left\{\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)\right\}\mathrm{e}^{-0{,}2(t-1)}.$$

Az Olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy $\mathscr{L}^{-1}\{Y_T(s)\}=0$, ha $t>T$ teljesül.

A második alakból látható, hogy $y(+0)=1$ vagy hogy $\left|y_{\mathrm{g}}(t)\right|_{\max}=0{,}550$. Ezek az eredmények a Fourier-soros alakból csak hosszadalmas számítással állíthatók elő. #

4.2-2.F. Feladatok

F-1. Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y-0{,}25\,y^{(2)}=u.$$

Határozza meg a $H(z)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

(*a*) $u[k]=\delta[k]$; (impulzusválasz).

(*b*) $u[k]=\varepsilon[k]0{,}5^k$.

(*c*) $u[k]=0{,}5^k$, $k\in\mathbf{N}$ és $y[-1]=0$, $y[-2]=1$.

*(*d*) Határozza meg azt az $u[k]$ gerjesztést, amely létrehozhatja az előző feladatban megadott kiindulási értékeket. (Útmutatás. Nem egyetlen ilyen gerjesztés létezik.)

Ellenőrizze az eredményeket $k=0$ és 1 esetére a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete (vö. 2.2-2.F-4.)

$$y^{(2)} + 6\,y^{(1)} + 5\,y = u^{(1)} + 9\,u\,.$$

Határozza meg a $H(s)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y(t)$ **választ, ha a** rendszer gerjesztése

$(a)\ u(t) = \varepsilon(t).$ $(b)\ u(t) = \varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-2t}.$

$(c)\ u(t) = \varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-t}.$ $(d)\ u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1).$

$(e)\ u(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} + \varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-2t}.$ $(f)\ u(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} + 2\,\varepsilon(t).$

Az *(a)* feladat megoldása a rendszer ugrásválasza.

F-3. Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y - y^{(1)} + 0{,}5\,y^{(2)} = 0{,}5\,u\,.$$

Határozza meg a $H(z)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

$(a)\ u[k] = \delta[k].$ $(b)\ u[k] = \varepsilon[k].$ $(c)\ u[k] = \varepsilon[k+1].$

Az *(a)* feladat megoldása a rendszer impulzusválasza, a *(b)* feladat megoldása a rendszer ugrásválasza.

***F-4.** Adott a DI illetve FI rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvénye és belépő gerjesztésének $U(z)$ illetve $U(s)$ Laplace-transzformáltja.

Hogyan bonthatjuk fel a válasz időfüggvényét szabad és gerjesztett összetevőre? Egyértelmű ez a felbontás? (Útmutatás. Gondolja meg, hogy $Y(z)$ vagy $Y(s)$ pólusai honnan származnak!)

***F-5.** Egy x jel x_s *állandósult összetevője* (stacionárius összetevője) az a periodikus (speciálisan állandó) jel, amelyhez x tart, amint $k \to \infty$ illetve $t \to \infty$.

(a) Hogyan határozható meg az $X(z)$, illetve az $X(s)$ Laplace-transzformált ismeretében az $x_s[k]$, illetve az $x_s(t)$ állandósult összetevő?

(b) Igaz-e, hogy ha a lineáris, invariáns rendszer u gerjesztésének van u_s állandósult összetevője, akkor az y válasznak is van y_s állandósult összetevője, amelynek periódusideje megegyezik az u_s periódusidejével?

(c) Igaz-e, hogy minden jelnek van állandósult összetevője (legfeljebb az 0 értékű)?

***F-6.** Adott egy másodrendű FI rendszer átviteli függvénye:

$$H(s) = \frac{b_0\,s^2 + b_1\,s + b_2}{(s+1)(s+2)}\,.$$

Adjon meg egy olyan állapotváltozós leírást, amelyhez ez az átviteli függvény tartozik!

4.2-2.M. Megoldások

M-1. Az átviteli függvény

$$H(z)=\frac{1}{1-0{,}25\,z^{-2}}\equiv\frac{z^2}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a)\ h[k]=\mathscr{Z}^{-1}\left\{z\frac{z}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}\right\}=\varepsilon[k]\left\{0{,}5\,(0{,}5)^k+0{,}5\,(-0{,}5)^k\right\}.$$

$$(b)\ y[k]=\varepsilon[k]\left\{(0{,}25\,k+0{,}75)(0{,}5)^k+0{,}25\,(-0{,}5)^k\right\}.$$

$$(c)\ Y(z)-0{,}25\left\{z^{-2}Y(z)+y[-1]z^{-1}+y[-2]\right\}=U(z),$$

$$y[k]=(0{,}5\,k+0{,}875)(0{,}5)^k+0{,}375\,(-0{,}5)^k.$$

*(d) Feltételezve, hogy $y[k]=0, k\le 3$, kapjuk, hogy $u[k]=\delta[k+1]+\varepsilon[k](0{,}5)^k$.

M-2. Az átviteli függvény

$$H(s)=\frac{s+9}{s^2+6\,s+5}\equiv\frac{s+9}{(s+1)(s+5)}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a)\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{s\,(s+1)(s+5)}\right\}=\varepsilon(t)\left\{1{,}8-2\,\mathrm{e}^{-t}+0{,}2\,\mathrm{e}^{-5t}\right\}.$$

$$(b)\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{(s+1)(s+2)(s+5)}\right\}=\varepsilon(t)\left\{-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-2t}+2\,\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5t}\right\}.$$

$$(c)\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{(s+1)^2(s+5)}\right\}=\varepsilon(t)\left\{\left(2\,t-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-5t}\right\}.$$

$$(d)\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{(s+1)(s+5)}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right\}=$$

$$=\varepsilon(t)\left\{1{,}8-2\,\mathrm{e}^{-t}+0{,}2\,\mathrm{e}^{-5t}\right\}-\varepsilon(t-1)\left\{1{,}8-2\,\mathrm{e}^{-(t-1)}+0{,}2\,\mathrm{e}^{-5(t-1)}\right\}.$$

$$(e)\ \left\{s^2\,Y(s)-1{,}8\,s+6\right\}+s\,Y(s)=\left\{s\frac{1}{s+2}-1\right\}+9\frac{1}{s+2},$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1{,}8\,s^2+14{,}4\,s+28{,}6}{(s+1)(s+5)(s+2)}\right\}=4\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t},\ t\in\mathbf{R}_+.$$

Mind $y(t)$, mind deriváltja ebben az esetben folytonos.

$$(f)\ y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1{,}8\,s^2+11{,}8\,s+18}{(s+1)(s+5)s}\right\}=3{,}6-2\,\mathrm{e}^{-t}+0{,}2\,\mathrm{e}^{-5t},\ t\in\mathbf{R}_+.$$

Az $y(t)$ folytonos, deriváltja a $t=0$ helyen nem folytonos.

M-3. Az átviteli függvény

$$H(z)=\frac{0{,}5}{1-z^{-1}+0{,}5\,z^{-2}}\equiv\frac{0{,}5\,z^2}{(z-R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta})(z-R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta})};\ R=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \Theta=\frac{\pi}{4}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a)\ h[k]=\mathscr{Z}^{-1}\left\{z\,\frac{0{,}5z}{\left(z-R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\right)\left(z-R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta}\right)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon[k]\,R^k\cos\left(\Theta k-\Theta\right).$$

$$(b)\ y[k]=\mathscr{Z}^{-1}\left\{z\,\frac{0{,}5z^2}{\left(z-R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\right)\left(z-R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Theta}\right)(z-1)}\right\}=\varepsilon[k]\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,R^k\cos\left(\Theta k-3\Theta\right)\right\}.$$

(*c*) Az előző eredmény felhasználásával vagy a rendszeregyenlet DI Laplace-transzformáltját képezve és az inverz transzformáltat számítva

$$y[k]=\varepsilon[k+1]\left\{1+\frac{1}{2}R^k\cos\left(\Theta k-2\Theta\right)\right\}.$$

***M-4.** Ha a H átviteli függvénynek és az U transzformált gerjesztésnek nincs közös pólusa, akkor a H pólusaihoz tartozó tagok összege tekinthető az y_{f} szabad válasznak, míg az U pólusaihoz tartozó tagok összege tekinthető az y_{g} gerjesztett válasznak. A felbontás azonban nem egyértelmű, mivel a H pólusaihoz tartozó összetevő egy részét hozzáadhatjuk a gerjesztett válaszhoz (hiszen az továbbra is ki fogja elégíteni az inhomogén rendszeregyenletet vagy állapotváltozós leírást). Még inkább homályossá válik a felbontás, ha az átviteli függvénynek és a gerjesztés transzformáltjának vannak közös pólusai. Ez a felbontás tehát inkább számítási eljárásnak tekinthető, nem rendelhető hozzá egyértelmű jelentés. Az állapotváltozós leírásban szereplő zérus gerjesztésű összetevő és zérus (kezdeti) állapotú összetevő egyértelműen meghatározott. Ez azonban nem kapcsolható egyértelműen a válasznak az átviteli függvény pólusaihoz illetve a gerjesztés transzformáltjának pólusaihoz.

***M-5.** *(a)* Ha $X(z)$ minden q_i pólusára $|q_i|\le 1$ érvényes, vannak $|q_r|=1$ típusú pólusok és ezek egyszeresek, illetve ha $X(s)$ minden p_i pólusára $\mathscr{Re}\{p_i\}\le 0$ érvényes, vannak $\mathscr{Re}\{p_r\}=0$ típusú pólusok és ezek egyszeresek, akkor x_{s} a q_r pólusokhoz tartozó q_r^k, illetve a p_r pólusokhoz tartozó $\mathrm{e}^{p_r t}$ típusú összetevők szuperpozíciója. Az előbbiek száma rendszerint véges, az utóbbiaké végtelen is lehet. Szigorúan véve még azt is meg kellene követelnünk, hogy a $\vartheta_r=\arg q_r$, illetve az $\omega_r=\mathscr{Im}\{p_r\}$ körfrekvenciáknak legyen közös osztójuk, de ez tetszőleges pontossággal biztosítható.

(b) Szigorúan véve ez nem feltétlenül igaz, mert az átviteli függvénynek lehetnek olyan, az egységsugarú körre, illetve a képzetes tengelyre eső pólusai, amelyeknek megfelelő ϑ_r, illetve ω_r körfrekvenciájú összetevő nem szerepel e gerjesztés Fourier-sorában. A válasznak ekkor lesz olyan állandósult összetevője, amelynek nincs kapcsolata a gerjesztés állandósult összetevőjével.

(c) Nem igaz, hiszen a jel nem feltétlenül tart egy periodikus jelhez. Ilyen jel például egy polinom vagy egy növekvő exponenciális függvény.

***M-6.** Például az első Frobenius-alak (2.3-1.4. pont) alapján

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}b_2-2b_0 & b_1-3b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+b_0\,u.$$

Természetesen más megoldások is lehetnek.

4.2–3. Néhány speciális rendszer

4.2-3.1. Bevezetés

Egy lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer $y = \mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatának leírására eddig a következő *rendszerjellemző függvényeket* vezettük be:

– az *időtartományban* a $h[k]$ illetve a $h(t)$ *impulzusválaszt;* ez a lineáris, invariáns rendszerek általános rendszerjellemző függvénye.

– a *frekvenciatartományban* a $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ illetve a $H(\mathrm{j}\omega)$ *átviteli karakterisztikát;* ez az impulzusválasz Fourier-transzformáltja, amennyiben ez létezik (tipikusan GV stabilis rendszer esetén).

– a *komplex frekvenciatartományban* a $H(z)$ illetve a $H(s)$ *átviteli függvényt;* ez az impulzusválasz Laplace-transzformáltja, ha az impulzusválasz belépő, vagyis ha a rendszer kauzális.

Bevezethetők további rendszerjellemző függvények is (az ugrásválaszt tárgyaltuk is), de a továbbiakban a fenti háromra szorítkozunk.

A rendszer jellemezhető a rendszeregyenletével, az állapotváltozós leírásával és hálózati reprezentációjával is. Ezek ismeretében bármelyik rendszerjellemző függvény meghatározható. Ebben a szakaszban a rendszerjellemző függvényekkel foglalkozunk.

Bármelyik rendszerjellemző függvény egy kiszemelt tulajdonsága alapján kiválaszthatjuk rendszerek speciális osztályát (például a GV stabilis vagy a kauzális rendszerek). Valamely speciális tulajdonság néha csak az egyik rendszerjellemző függvényben jelentkezik. Egy speciális tulajdonság azzal a következménnyel járhat, hogy az átviteli függvény vagy az átviteli karakterisztika nem értelmezett (például nem kauzális rendszernek nem értelmezett az átviteli függvénye).

Ebben a szakaszban értelmezünk néhány olyan rendszert, amelynek valamelyik rendszerjellemző függvénye speciális tulajdonságú. Nem törekszünk sem teljességre, sem az egyes speciális rendszerek tulajdonságainak teljes feltárására.

4.2-3.2. Véges impulzusválaszú rendszer

Egy *véges impulzusválaszú rendszer* vagy szokásos rövidítésével egy FIR rendszer („Finite Impulse Response") impulzusválasza véges hosszúságú, azaz egy véges hosszúságú időintervallumon kívül azonosan nulla. Kauzális rendszerekre szorítkozva az L illetve T hosszúságú FIR rendszer impulzusválaszának tulajdonsága

$$\begin{aligned} &\mathrm{DI}:\ h[k]=0,\ k\le -1,\ k\ge L;\\ &\mathrm{FI}:\ h(t)=0,\ t<0,\ t>T. \end{aligned} \tag{4.2-70}$$

A véges impulzusválaszú rendszer biztosan GV *stabilis*.

A *diszkrét idejű* FIR rendszer impulzusválasza megadható

$$h[k]=c_0\,\delta[k]+c_1\,\delta[k-1]+c_2\,\delta[k-2]+\ldots+c_{L-1}\,\delta[k-(L-1)] \tag{4.2-71}$$

alakban. Ilyen rendszert (például szűrőt) gyakran alkalmaznak GV stabilitása miatt. Ugyanazt a feladatot megoldó végtelen impulzusválaszú vagy IIR rendszert („Infinite Impulse Response") azonban többnyire egyszerűbb és ezért olcsóbb módon lehet megvalósítani, viszont akkor annak stabilitását biztosítani kell.

A folytonos idejű FIR rendszerek ritkán fordulnak elő, mivel megvalósításuk bonyolult. Ezek nem differenciális rendszerek, rendszeregyenletük vagy állapotváltozós leírásuk nem olyan alakú, amint azt az eddigiekben láttuk.

Egy diszkrét idejű kauzális FIR rendszer *átviteli karakterisztikája* az $e^{-j\vartheta}$, míg *átviteli függvénye* a z^{-1} változó *polinomja:*

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\vartheta}\right) &= c_0 + c_1 e^{-j\vartheta} + c_2 e^{-j2\vartheta} + \ldots + c_{L-1} e^{-j(L-1)\vartheta}; \\ H(z) &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_{L-1} z^{-(L-1)}. \end{aligned} \tag{4.2-72}$$

Ennek a $H(z)$ átviteli függvénynek csak a $z = 0$ helyen van pólusa, amely $(L-1)$-szeres, és $L-1$ számú zérusa van.

4.2-3.3. Mindentáteresztő rendszer

A *mindentáteresztő* egy olyan rendszer, amely bármilyen frekvenciájú szinuszos gerjesztés amplitúdóját azonos mértékben viszi át. A fázis átvitelére nincs megszorítás, az általában a frekvencia függvénye.

A diszkrét idejű illetve a folytonos idejű *mindentáteresztő* (mindentáteresztő rendszer) amplitúdó-karakterisztikája állandó (a frekvenciától független):

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI}: \quad K_{\text{MÁ}}(\vartheta) \equiv \left|H_{\text{MÁ}}\left(e^{j\vartheta}\right)\right| = K_0 > 0\,; \\ &\text{FI}: \quad K_{\text{MÁ}}(\omega) \equiv \left|H_{\text{MÁ}}(j\omega)\right| = K_0 > 0\,. \end{aligned}} \tag{4.2-73}$$

Ha a mindentáteresztő fázis-karakterisztikája állandó ($\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pm\pi$), akkor a rendszer egy erősítő. Ha a mindentáteresztő fázis-karakterisztikája lineáris, vagyis ha $\varphi_{\text{MÁ}}(\vartheta) = -r\vartheta$ $(r \in \mathbf{Z})$, illetve ha $\varphi_{\text{MÁ}}(\omega) = -T\omega$ $(T \in \mathbf{R})$, akkor a mindentáteresztő változatlan alakban eltolja a gerjesztést: ha r illetve T pozitív, akkor késlelteti (kauzális rendszer), ha r illetve T negatív, akkor sietteti (nem kauzális, „jósló" rendszer). A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor a mindentáteresztő kauzális.

A mindentáteresztő $\varphi_{\text{MÁ}}$ *fázis-karakterisztikájának* a következő érdekes tulajdonsága van (igazolását később adjuk):

$$\frac{d\varphi_{\text{MÁ}}(\vartheta)}{d\vartheta} \le 0, \quad 0 \le \vartheta < \pi; \qquad \frac{d\varphi_{\text{MÁ}}(\omega)}{d\omega} \le 0, \quad 0 \le \omega < \infty, \tag{4.2-74}$$

azaz monoton csökken (kivéve esetleges szakadási helyeit, ahol a derivált nem értelmezett). Mint már említettük, a

$$\tau(\vartheta) = -\frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta}; \qquad \tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \tag{4.2-75}$$

mennyiséget futási idő karakterisztikának is nevezik. A (74) szerint a mindentáteresztő futási idő karakterisztikája nem-negatív ott, ahol értelmezett.

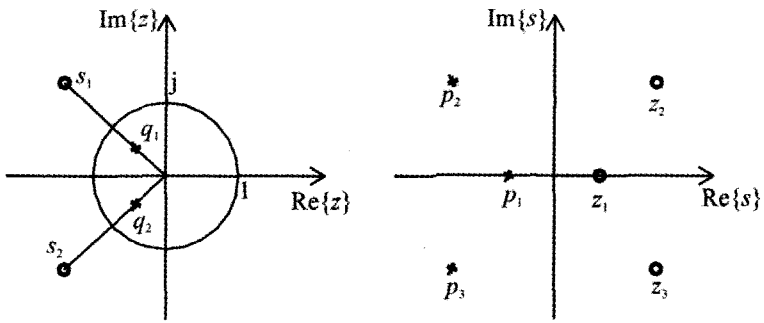
A mindentáteresztő egy gyakorlati jelentősége a következő. Legyen a feladatunk egy olyan átviteli karakterisztika meghatározása, amelynek mind a K amplitúdó-karakterisztikája, mind a φ fázis-karakterisztikája előírt. Első lépésként ekkor meghatározunk egy olyan $H_1 = K_1 e^{j\varphi_1}$ átviteli karakterisztikát, amelynek amplitúdó-karakterisztikája az előírtnak egy elfogadható közelítése, de fázis-karakterisztikája nem

tesz eleget az előírásnak. A feladat ezután egy olyan mindentáteresztő meghatározása, amelynek $\varphi_{\text{MÁ}}$ fázis-karakterisztikája a $\varphi - \varphi_{\text{l}}$ elfogadható közelítése. Ekkor $H_{\text{l}} \cdot H_{\text{MÁ}}$ az előírt H egy elfogadható közelítése. A (74) mutatja, hogy ez az eljárás nem mindig alkalmazható.

Egy DI illetve FI mindentáteresztő racionális *átviteli függvénye*:

$$\begin{aligned} H_{\text{MÁ}}(z) &= K_A\, z^{-r} \frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}, \quad r \in \mathbf{N},\ |q_i|<1,\ s_i = \frac{1}{q_i^*},\ |s_i|>1; \\ H_{\text{MÁ}}(s) &= K_A \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad \mathcal{R}e\{p_i\}<0,\ z_i = -p_i^*,\ \mathcal{R}e\{z_i\}>0. \end{aligned} \tag{4.2-76}$$

A DI átviteli függvény q_i pólusai az egységsugarú körön belül, $s_i = 1/q_i^*$ zérusai az egységsugarú körön kívül helyezkednek el, ezek az egyes pólusok inverzei az egységsugarú körre. A FI átviteli függvény p_i pólusai a bal félsíkon, $z_i = -p_i^*$ zérusai a jobb félsíkon helyezkednek el, ezek az egyes pólusok tükörképei a képzetes tengelyre. Egy tipikus pólus-zérus elrendezést mutat a 6. ábra. A $H_{\text{MÁ}}(s)$ FI átviteli függvény tartalmazhat egy e^{-sT} $(T>0)$ nem racionális szorzótényezőt is.



4.2-6. ábra Egy DI és egy FI mindentáteresztő pólus-zérus elrendezése

Annak igazolásához, hogy (76) mindentáteresztőt ír le, vizsgáljuk számlálójának és nevezőjének egy tényezőjét:

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - 1/q_i^*}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - q_i} = -\frac{1}{q_i^*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta} - q_i^*}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - q_i} = \frac{1}{q_i^*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vartheta+\pi)}\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - q_i\right)^*}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta} - q_i};$$

$$\frac{\mathrm{j}\omega + p_i^*}{\mathrm{j}\omega - p_i} = -\frac{-\mathrm{j}\omega - p_i^*}{\mathrm{j}\omega - p_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}\frac{\left(\mathrm{j}\omega - p_i\right)^*}{\mathrm{j}\omega - p_i}.$$

Az utolsó alakban a számláló a nevező konjugáltja. Ebből következik, hogy a tényező abszolút értéke $|1/q_i|$ illetve 1, vagyis állandó, ezért a $|H|$ amplitúdó-karakterisztika sem függ a frekvenciától. Egy további következményként megadhatjuk a fázis-karakterisztika kifejezését:

$$\varphi_{\text{MÁ}}(\vartheta)=\arc K_A+\pi+(2n-r)\vartheta-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad \alpha_i=\arc\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_i\right);$$
$$\varphi_{\text{MÁ}}(\omega)=\arc K_A-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad \alpha_i=\arc(\mathrm{j}\omega-p_i). \tag{4.2-77}$$

A pólus-zérus elrendezésből látható, hogy α_i monoton növekszik, amint ϑ növekszik 0 és π között, illetve amint ω növekszik 0 és ∞ között. Ennek következtében $\varphi(\omega)$ csökken (vö. 4.2-1.7. pont). Csökken $\varphi(\vartheta)$ is, mivel a $\mathrm{d}\vartheta$ központi szöghöz tartozó 2 $\mathrm{d}\alpha$ kerületi szög nála mindig nagyobb. A 2 $\mathrm{d}\alpha$ és a $\mathrm{d}\vartheta$ akkor lenne egyenlő, ha $|q_i|=1$ lenne, de valójában $|q_i|<1$. Ezzel (74) és a (75) is igazolást nyert.

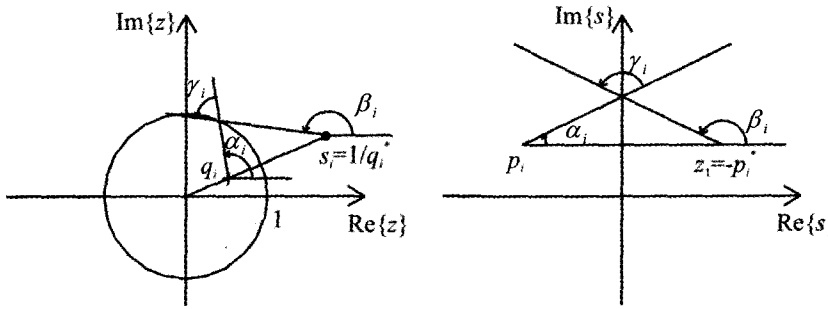
A DI illetve az FI mindentáteresztő racionális átviteli függvényének számlálója a nevezője által meghatározott:

$$H_{\text{MÁ}}(z)=K_A\,z^{-r}\,\frac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+1}{z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n};$$
$$H_{\text{MÁ}}(s)=K_A\,\frac{s^n-a_1 s^{n-1}+\ldots\pm a_{n-1}s\mp a_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}. \tag{4.2-78}$$

Az a_i együtthatók úgy választandók, hogy a stabilitás biztosítva legyen (a pólusok az egységkörön belül illetve a bal félsíkon helyezkedjenek el), egyébként tetszőlegesek.

Vizsgáljuk most meg a pólus-zérus elrendezés alapján a mindentáteresztő fázis-karakterisztikájának viselkedését. Vezessük be a következő jelöléseket (7. ábra):

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-\frac{1}{q_i^*}=B_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i},\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-q_i=A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_i};\qquad \mathrm{j}\omega+p_i^*=B_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_i},\ \mathrm{j}\omega-p_i=A_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_i}.$$



4.2-7. ábra Egy komplex pólus-zérus pár hatása a DI és a FI mindentáteresztő fáziskarakterisztikájának viselkedésére

A (76) alakból következik a fázis-karakterisztika következő kifejezése:

$$\varphi(\vartheta)=\arc K_A-r\vartheta+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(\vartheta),\ \gamma_i(\vartheta)=\beta_i(\vartheta)-\alpha_i(\vartheta);$$

$$\varphi(\omega)=\arc K_A+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(\omega),\ \gamma_i(\omega)=\beta_i(\omega)-\alpha_i(\omega).$$

A 7. ábrából látható, hogy DI mindentáteresztőre valós q_i esetén $\gamma_i(0)=\pi$ vagy 0, konjugált komplex q_i, q_{i+1} pár esetén $\gamma_i(0)+\gamma_{i+1}(0)=2\pi$. A $\gamma_i(\vartheta)$ monoton csökken és $\gamma_i(\pi)=0$ vagy $-\pi$. A 7. ábrából látható, hogy FI mindentáteresztőre valós p_i esetén $\gamma_i(0)=\pi$, konjugált komplex p_i, p_{i+1} pár esetén $\gamma_i(0)+\gamma_{i+1}(0)=2\pi$. Az $\alpha_i(\omega)$ monoton növekszik, a $\gamma_i(\omega)$ monoton csökken és $\gamma_i(\infty)=0$. Összefoglalva:

$$\text{DI}:\ \varphi_{\text{MÁ}}(\pi)-\varphi(0)=-(n+r)\pi; \qquad \text{FI}:\ \varphi_{\text{MÁ}}(\infty)-\varphi(0)=-n\pi. \tag{4.2-79}$$

A fázis-karakterisztika monoton csökken azaz deriváltja nem-pozitív (a futási idő karakterisztika nem-negatív), amint már korábban megállapítottuk.

A DI mindentáteresztő $h[k]$ *impulzusválasza* nem rendelkezik különleges tulajdonsággal. A FI mindentáteresztő $h(t)$ impulzusválasza mindig tartalmaz egy $\delta(t)$ összetevőt.

4.2-3.4. Minimálfázisú rendszer

A minimálfázisú rendszer átviteli függvényének formális tulajdonsága alapján definiált.

A diszkrét idejű *minimálfázisú rendszer* egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, rendszer, amelyre a racionális $H(z)$ átviteli függvény minden pólusa az egységsugarú körön belül van (de a $z = 0$ helyen nincs pólus) és nincs zérusa az egységsugarú körön kívül. Ha a zérusok is csak az egységsugarú körön belül vannak, akkor a rendszer *szigorúan minimálfázisú.*

A folytonos idejű *minimálfázisú rendszer* egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, rendszer, amelyre a racionális $H(s)$ átviteli függvény minden pólusa a bal félsíkon van és nincs zérusa a jobb félsíkon. Ha a zérusok is csak a bal félsíkon vannak, akkor a rendszer *szigorúan minimálfázisú.*

A minimálfázisú rendszer definíciójából következően gerjesztés-válasz stabilis.

A minimálfázisú rendszer átviteli függvényének gyöktényezős alakja ezek szerint

$$\boxed{\begin{aligned}
&\text{DI}:\ H_{\text{MF}}(z)=K\frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)},\ m\le n,\ 0<|q_i|<1, 0<|s_i|\le 1;\\
&\text{FI}:\ H_{\text{MF}}(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)},\ m\le n,\ \mathcal{R}e\{p_i\}<0,\ \mathcal{R}e\{z_i\}\le 0.
\end{aligned}} \tag{4.2-80}$$

Látható, hogy ha H_{MF} egy szigorúan minimálfázisú rendszer átviteli függvénye és $m = n$, akkor $1/H_{\text{MF}}$ is egy szigorúan minimálfázisú rendszer átviteli függvénye.

A minimálfázisú rendszer φ_{MF} fáziskarakterisztikájának φ'_{MF} meredeksége sosem kisebb mint bármely olyan rendszer φ fáziskarakterisztikájának φ' meredeksége, amelynek ugyanakkora az amplitúdó-karakterisztikája:

$$\begin{aligned}
&\text{DI}:\ \frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{MF}}(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\ge\frac{\mathrm{d}\varphi(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta},\ \text{ha } K_{\text{MF}}(\vartheta)=K(\vartheta);\\
&\text{FI}:\ \frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{MF}}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\ge\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega},\ \text{ha } K_{\text{MF}}(\omega)=K(\omega).
\end{aligned} \tag{4.2-81}$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a megegyező amplitúdó-karakterisztikájú rendszerek közül a minimálfázisúnak a legkisebb a futási idő karakterisztikája.

Az állítást a következő pontban fogjuk igazolni.

Racionális átviteli függvényű rendszerek átviteli karakterisztikája csak egy állandó szorzóban tér el, ha minden valós s_i illetve z_i zérusra elvégezzük az $s_i \to \hat{s}_i = 1/s_i$ illetve a $z_i \to \hat{z}_i = -z_i$ helyettesítést, az egyes konjugált komplex zérus-párokra pedig az $s_i^* \to \hat{s}_i = 1/s_i^*$, $\hat{s}_i^* = 1/s_i$ (inverzió az egységsugarú körre) illetve a $z_i^* \to \hat{z}_i = -z_i^*$, $\hat{z}_i^* = -z_i$ helyettesítést (tükrözés a valós tengelyre).

Korábban (4.2-1.7. pont) már láttuk a 4. ábrán, hogy a FI esetben $H(\mathrm{j}\omega)$ számlálójának $\beta(\omega)$ szögére $\beta'_-(\omega) > 0$ és $\beta'_+(\omega) < 0$. Ebből már következik, hogy (81) helyes. Az is látható a 4. ábrából, hogy a FI esetben $\beta_-(\omega) < \beta_+(\omega)$. Ez megmagyarázza az FI esetben a „minimálfázisú rendszer" elnevezést. Mivel azonban a fázishoz 2π vagyis 360° hozzáadható vagy levonható (és ezt gyakran meg is tesszük, hogy φ értéke $-\pi$ és $+\pi$ közé essék), ezért a minimálfázisú tulajdonság szemléletes értelmezése nem egyértelmű.

A DI esetben nem ennyire egyszerű a helyzet. Az 5. ábrából következik, hogy $\beta'_-(\vartheta) > 0$ most is érvényes, de $\beta'_+(\vartheta)$ változtathatja előjelét, ezért (81) DI megfelelője nem látható a szemlélet alapján. Az is következik az 5. ábrából, hogy $\beta_-(\vartheta) > \beta_+(\vartheta)$, ezért a minimálfázisú DI rendszer fázisa nem minimális. A „minimálfázisú" elnevezés ezért a DI esetben csak a FI esettel kapcsolatos formális analógiára utal és tartalmilag félrevezető.

A $H(z) = z^{-r} H_{\mathrm{MF}}(z), r \in \mathbf{N}$ alakú átviteli függvény pólusai ugyancsak az egységsugarú körön belüliek, $\varphi(\vartheta) = -r\vartheta + \varphi_{\mathrm{MF}}(\vartheta)$ fázis-karakterisztikája azonban nyilván kisebb mint $\varphi_{\mathrm{MF}}(\vartheta)$. Ez az egyik oka annak, amiért nem engedjük meg, hogy a $H_{\mathrm{MF}}(z)$ átviteli függvénynek a $z = 0$ helyen pólusa legyen. Egy másik okot a következő pontban fogunk látni.

Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor a $H_{\mathrm{MF}}(z) = P(z)/Q(z)$ illetve a $H_{\mathrm{MF}}(s) = P(s)/Q(s)$ átviteli függvény szigorúan minimálfázisú rendszert ír le (P és Q polinom). Ekkor a az átviteli függvény logaritmusa, a $V(z) \equiv \ln H_{\mathrm{MF}}(z) = \ln P(z) - \ln Q(z)$ illetve a $V(s) \equiv \ln H_{\mathrm{MF}}(s) = \ln P(s) - \ln Q(s)$ függvény minden szingularitása az egységsugarú körön belül illetve a bal félsíkon van. (Ezek a szingularitások nem pólusok, hanem logaritmikus szingularitások.) Fejezzük ki az átviteli karakterisztika, vagyis $H_{\mathrm{MF}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = K(\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\vartheta)}$ illetve $H_{\mathrm{MF}}(\mathrm{j}\omega) = K(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ logaritmusát:

$$\ln H_{\mathrm{MF}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = \ln K(\vartheta) + \mathrm{j}\varphi(\vartheta); \quad \ln H_{\mathrm{MF}}(\mathrm{j}\omega) = \ln K(\omega) + \mathrm{j}\varphi(\omega).$$

A valós rész és a képzetes rész Hilbert-párt alkot, vagyis alkalmazható a (3.2-52) szerinti Bode-tétel, amelyben most $\ln K$ a valós rész és φ a képzetes rész. Láthatjuk, hogy miért volt szükséges annak kikötése, hogy a rendszer szigorúan minimálfázisú: a logaritmus-képzés következtében az átviteli függvény zérusai lényegében ugyanolyan szerepet játszanak, mint a pólusai.

A K amplitúdó-karakterisztikához, illetve a φ fázis-karakterisztikához a *Hilbert-transzformáció* vagy a *Bode-képletek* alapján olyan fázis-karakterisztika, illetve amplitúdó-karakterisztika rendelhető, hogy $H = K\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ egy kauzális, stabilis és minimálfázisú rendszert írjon le. A korábban megadott összefüggésekből következik, hogy

$$\varphi(\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ln K(\lambda)}{\operatorname{tg}((\lambda-\vartheta)/2)}\mathrm{d}\lambda,\quad \ln\frac{K(\vartheta)}{K(0)}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(\lambda)}{\operatorname{tg}((\lambda-\vartheta)/2)}\mathrm{d}\lambda;$$
$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln K(\lambda)}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda,\ \ln\frac{K(\omega)}{K(\infty)}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda,\ \ln\frac{K(\omega)}{K(0)}=-\frac{\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda[\lambda-\omega]}\mathrm{d}\lambda. \tag{4.2-82}$$

Az integrálokon azok Cauchy-főértéke értendő, tényleges kiszámításuk ritkán egyszerű. Az utolsó összefüggés az előzőből csak némi megfontolás árán adódik.

A tétel általánosítható nem minimálfázisú rendszerekre is, de ezzel nem foglalkozunk.

Példa Egy FI rendszer amplitúdó-karakterisztikája

$$K(\omega)=\begin{cases}K_0, & |\omega|<\Omega,\\ K_1, & |\omega|>\Omega.\end{cases}$$

Határozzuk meg a fázis-karakterisztikát úgy, hogy az átviteli karakterisztika kauzális rendszert jellemezzen!

A (82) értelmében például $0<\omega<\Omega$ esetén az integrál Cauchy-főértéke

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\Lambda}^{-\Omega}\frac{\ln K_1}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda+\int_{-\Omega}^{\omega-\varepsilon}\frac{\ln K_0}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda+\int_{\omega+\varepsilon}^{\Omega}\frac{\ln K_0}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda+\int_{\Omega}^{\Lambda}\frac{\ln K_1}{\lambda-\omega}\mathrm{d}\lambda\right\}.$$

Hasonló az eljárás $\Omega<\omega$ esetén. Az integrálok számítása, majd a határértékek képzése nem okoz nehézséget. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{K_1}{K_0}\right)\ln\left|\frac{\Omega+\omega}{\Omega-\omega}\right|.$$

Az ω pozitív értékeire $\varphi(\omega)$ előjele megegyezik $\ln(K_1/K_0)$ előjelével, vagyis például $K_1/K_0<1$ esetén (aluláteresztő) a fázis negatív. A K_1 és K_0 egyike sem lehet nulla, ezért az ideális aluláteresztő és felüláteresztő nem kauzális rendszer. #

4.2-3.5. Az átviteli függvény tényezőkre bontása

Bármely gerjesztés-válasz stabilis rendszer $H(z)$ vagy $H(s)$ átviteli függvénye felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyek egyike mindentáteresztő, másika minimálfázisú rendszert ír le:

$$H(z)=H_{\mathrm{MÁ}}(z)\cdot H_{\mathrm{MF}}(z);\qquad H(s)=H_{\mathrm{MÁ}}(s)\cdot H_{\mathrm{MF}}(s). \tag{4.2-83}$$

A felbontás egy állandó szorzó erejéig egyértelmű.

Legyen a *diszkrét idejű* rendszer átviteli függvénye a következő alakban adott:

$$H(z)=K\,z^{-r}\frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)},$$
$$|s_i|>1,\ i=1,2,\ldots,h,\ |s_i|\le 1,\ i=h+1,h+2,\ldots,m; \tag{4.2-84}$$
$$0<|q_i|<1,\ i=1,2,\ldots,n,\ m\le n+r.$$

A (83) szerinti felbontás két tényezője ekkor

$$H_{\text{MÁ}}(z)=K_A\, z^{-r}\,\frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_h)}{(z-1/s_1^*)(z-1/s_2^*)\cdots(z-1/s_h^*)},$$

$$H_{\text{MF}}(z)=\frac{K}{K_A}\,\frac{(z-1/s_1^*)(z-1/s_{21}^*)\cdots(z-1/s_h^*)(z-s_{h+1})(z-s_{h+2})\ldots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}. \quad (4.2\text{-}85)$$

Legyen a *folytonos idejű* rendszer átviteli függvénye a következő alakban adott:

$$H(s)=K\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},$$

$$\mathcal{Re}\{z_i\}>0,\ i=1,2,\ldots,h;\ \mathcal{Re}\{z_i\}\le 0,\ i=h+1,h+2,\ldots,m; \quad (4.2\text{-}86)$$

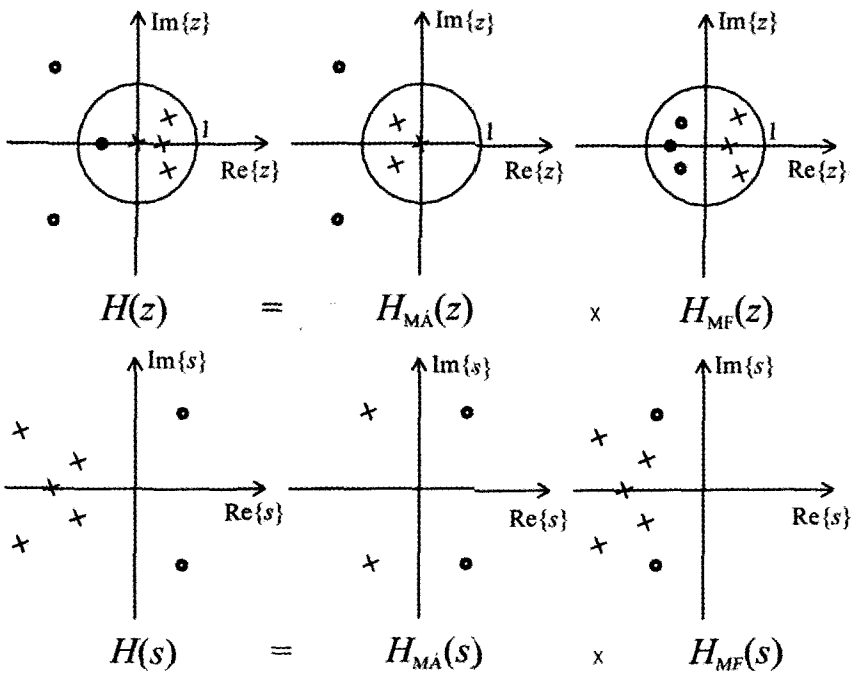
$$\mathcal{Re}\{p_i\}<0,\ i=1,2,\ldots,n;\ m\le n.$$

A (83) szerinti felbontás két tényezője ekkor

$$H_{\text{MÁ}}(s)=K_A\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_h)}{(s+z_1^*)(s+z_2^*)\cdots(s+z_h^*)},$$

$$H_{\text{MF}}(s)=\frac{K}{K_A}\,\frac{(s+z_1^*)(s+z_2^*)\ldots(s+z_h^*)(s-z_{h+1})(s-z_{h+2})\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}. \quad (4.2\text{-}87)$$

A K_A állandó tetszőleges, $K_A=1$ egy szokásos választás.



4.2-8. ábra Az átviteli függvény felbontása egy mindentáteresztő és egy minimálfázisú rendszer átviteli függvényére a pólus-zérus elrendezéssel szemléltetve

Láthatjuk, hogy $H_{\text{MÁ}}$ és H_{MF} szorzata valóban az adott H függvényt adja. A H_{MF} minimálfázisú, de nem szigorúan minimálfázisú rendszert jellemez.

A $H_{\text{MÁ}}$ zérusai megegyeznek a H egységsugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon elhelyezkedő zérusaival. A $H_{\text{MÁ}}$ pólusait úgy választottuk, hogy a mindentáteresztő jelleg biztosított legyen, tehát a pólusok a zérusok tükörképei az egységsugarú körre illetve a képzetes tengelyre, továbbá a $q_i = 0$ pólus, ha ilyen van. A H_{MF} pólusai megegyeznek H pólusaival (a $q_i = 0$ pólus kivételével). A H_{MF} átviteli függvény h számú zérusa megegyezik egyrészt $H_{\text{MÁ}}$ pólusaival (ezek a szorzás után egyszerűsödnek), a további zérusok pedig H azon zérusaival, amelyek az egységsugarú körön belül és e körön illetve a bal félsíkon és a képzetes tengelyen helyezkednek el.

A felbontást egy egyszerű esetre a 8. ábra szemlélteti az átviteli függvény és tényezőinek pólus-zérus elrendezésével.

Ha H egy pólusa eleve valamelyik zérusának megfelelő tükörképe, akkor azt természetesen nem kell külön bevezetni a felbontás során.

*4.2-3.6. Szűrők

Tág értelemben a *szűrő* egy olyan rendszer, amelynek gerjesztés-válasz kapcsolata kielégít bizonyos előírásokat, más szóval specifikációkat. Többnyire megköveteljük a kauzalitást és a stabilitást, gyakran a linearitást és az invarianciát is. Az előírások egy része merev (például kauzalitás, stabilitás), más részük optimum típusú (egy választott hibamérték legyen minimális) vagy tolerancia típusú (egy vagy több jellemzőnek egy előírt értéktartományba kell esnie).

A *szűrő* szűkebb értelemben a *frekvenciatartományban* specifikált rendszert jelent. A továbbiakban ezt a szűkebb értelmezést fogjuk alkalmazni. Célunk csak néhány alapgondolat bemutatása, nem törekszünk teljességre sem a feladatok megfogalmazását, sem azok megoldását illetően. Tárgyalásunk során FI szűrőkre szorítkozunk.

Tipikus szűrőspecifikáció a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika előírása. Ide sorolható a rendszer *sávszélességének* előírása (3.2-2.5. pont) vagy a *mindentáteresztő* értelmezése (4.2-3.3. pont.). További specifikációkhoz vezessünk be két fogalmat.

Egy szűrő *áteresztősávja*, illetve *zárósávja* az a frekvencia-intervallum, amelyben a rendszer $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikája eleget tesz a következő követelménynek:

$$\text{áteresztősáv } (\omega_a < \omega < \omega_b)\text{: } \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \le K(\omega) \le K_{\max}, \quad 0 < \varepsilon \le 1;$$

$$\text{zárósáv } (\omega_c < \omega < \omega_d)\text{: } 0 \le K(\omega) \le \eta K_{\max}, \quad 0 < \eta < \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \qquad (4.2\text{-}88)$$

Ezek szerint az áteresztősávban a szűrő $K^2(\omega)$ energia-átviteli karakterisztikája nem kisebb maximális értékének felénél. Az áteresztősávbeli megengedett ingadozást jellemző ε paraméter ilyen alakú értelmezésének történeti oka van.

Ha az ε paraméter nincs explicite megadva, akkor $\varepsilon = 1$ a szokásos értelmezés:

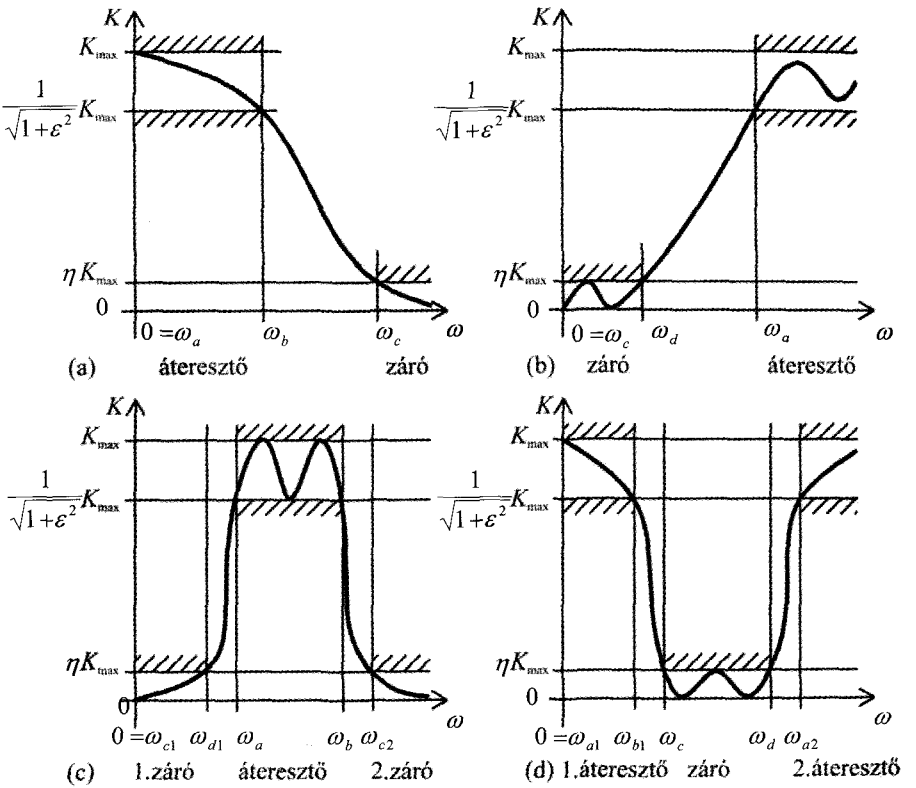
$$\text{áteresztősáv: } \frac{1}{\sqrt{2}} K_{\max} \le K(\omega) \le K_{\max}; \quad k_{\max} - 3\,\text{dB} \le k(\omega) \le k_{\max}. \qquad (4.2\text{-}89)$$

Rendszerint ennél kisebb ε értéket engednek meg a jó szűrés érdekében. Az η paraméterre nincs ilyen megállapodás szerinti értelmezés.

Az áteresztősávot és a zárósávot az *átmeneti sáv* választja el egymástól, ahol egyik feltétel sincs kielégítve. Egy szűrőnek lehet több áteresztősávja és több zárósávja.

A 9. ábra négy tipikus *toleranciasémát* szemléltet:

– az *aluláteresztő* átengedi a kis frekvenciákat és nem engedi át a nagy frekvenciákat;
– a *felüláteresztő* átengedi a nagy frekvenciákat és nem engedi át a kis frekvenciákat;
– a *sáváteresztő* csak a közepes frekvenciákat engedi át;
– a *sávzáró* a közepes frekvenciákat nem engedi át.



4.2-9. ábra A négy alapvető szűrőtípus toleranciasémája és egy azt kielégítő amplitúdó-karakterisztika

Az ábrákon feltüntettünk egy-egy olyan $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikát, amely kielégíti a követelményeket. Ennek menete lehet egy sávon belül vagy monoton (esetleg egyetlen lokális szélsőértékű) vagy ingadozó. A következő pontban a monoton típusú amplitúdó-karakterisztika tervezésére mutatunk egy módszert.

Az ábrán az áteresztősáv alsó határát ω_a, felső határát pedig ω_b jelöli, a zárósáv alsó határát ω_c, felső határát pedig ω_d jelöli. A sáváteresztőnek két zárósávja, a sávzárónak két áteresztősávja van. Az ábrából látható, hogy a nulla és a végtelen frekvencia mindegyik típusnál sávhatár.

A szűrő annál bonyolultabb, minél kisebb ingadozást engedünk meg az áteresztő- és a zárósávban és minél keskenyebb az átmeneti sávot vagy sávokat írunk elő.

Gyakran csak az áteresztősáv (vagy csak a zárósáv) előírt. Például a torzításmentes átvitelhez az áteresztősáv előírt, a zárósávnak nincs jelentősége (3.2-2.4. pont).

Hasonló előírások vonatkozhatnak a $\varphi(\omega)$ fázis-karakterisztikára, vagy a $\tau(\omega)$ futási idő karakterisztikára. Láttuk, hogy a torzításmentes átvitelhez az áteresztősávban lineáris fázis-karakterisztikára, vagyis állandó futási idő karakterisztikára van szükségünk.

Egyes esetekben ugyanabban a frekvenciasávban mind az amplitúdó-karakterisztikára, mind a fázis-karakterisztikára vonatkozik előírás. Ez a helyzet a torzításmentes átvitelnél is. Más esetekben az egyik sávban az amplitúdó-karakterisztikára, egy másik sávban a fázis-karakterisztikára vonatkozik előírás. Ezeket a bonyolult feladatokat a továbbiakban nem is érintjük.

A következő két pontban ízelítőt adunk a szűrőtervezés módszereiből. A diszkrét idejű szűrő tervezését rendszerint a folytonos idejűre vezetik vissza. A szűrőtervezési feladatok megoldására számítógépes programok állnak rendelkezésre.

*4.2-3.7. Maximálisan lapos szűrők

A folytonos idejű szűrők tervezésének feladatára és annak egy megoldására ebben és a következő pontban mutatunk egy-egy példát.

Határozzuk meg egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, folytonos idejű rendszer racionális $H(s)$ átviteli függvényét úgy, hogy a rendszer amplitúdó-karakterisztikája kielégítse a (88) szerinti specifikációt. A fázis-karakterisztikára nincs előírás.

A feladat megoldására sok módszer ismeretes, amelyek mindegyike valamilyen szempontból optimális. A következőkben a legegyszerűbb (de nem a leggazdaságosabb) megoldást tárgyaljuk, amelyet *maximálisan lapos* vagy *Butterworth* típusú közelítésnek neveznek.

Először az aluláteresztő szűrő átviteli függvényének meghatározását tárgyaljuk, azután megmutatjuk, miként származtatható ebből a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró szűrő átviteli függvénye.

Maximálisan lapos aluláteresztő szűrő

Tekintsük a következő folytonos idejű amplitúdó-karakterisztikát:

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^{2n}}},\quad n\in\mathbf{Z}_+. \tag{4.2-90}$$

Az Olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy ez a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$K(0)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}^i K(\omega)}{\mathrm{d}\omega^i}\right|_{\omega=0}=0,\ i=1,2,\ldots,2n-1;\quad K(\omega_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow k(\omega_0)=-3\,\mathrm{dB}. \tag{4.2-91}$$

Az amplitúdó-karakterisztika jellegét a 9. ábra bal felső diagramja mutatja. A $K(\omega)$ maximálisan lapos abban az értelemben, hogy az $\omega=0$ körfrekvencián nem csak érintője „vízszintes" és görbülete nulla, de még $2n-1$ számú deriváltja is nulla értékű. Az n növelésével az amplitúdó-karakterisztika egyre „laposabbá" alakítható. Az amplitúdó-karakterisztika ω pozitív értékeire szigorúan monoton csökkenő.

Az n és az ω_0 paraméter a (88) szerinti két feltételből határozható meg. Jelölje az áteresztősáv felső határát ω_b, a zárósáv alsó határát ω_c, akkor a specifikáció értelmében

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_b/\omega_0)^{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega_0)^{2n}}}=\eta.$$

Elemi számítással kapjuk, hogy

$$n \approx \nu \equiv \frac{\ln\left(\sqrt{\eta^{-2}-1}/\varepsilon\right)}{\ln(\omega_c/\omega_b)} \approx \frac{-\ln(\varepsilon\,\eta)}{\ln(\omega_c/\omega_b)}, \qquad \omega_0=\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n}\omega_b. \tag{4.2-92}$$

Először meghatározzuk ν értékét. Az n az a legkisebb egész szám, amelyre $n \geq \nu$. Ezzel az n értékkel számítjuk az ω_0 paramétert. Látható, hogy annál nagyobb n fokszám szükséges, minél kisebb ε, η és ω_c/ω_b érték van előírva, ami megfelel várakozásainknak.

Igazolható (l. alább), hogy azon átviteli függvény, amely GV stabilis rendszert ír le és $|H(\mathrm{j}\omega)|=K(\omega)$ a (90) szerinti, a következő racionális függvény:

$$\begin{aligned}
H(s)&=\frac{\omega_0^n}{(s-p_0)(s-p_1)(s-p_1^*)\cdots(s-p_r)(s-p_r^*)}, \quad n=2r+1;\\
p_k&=\omega_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_k}, \quad \alpha_k=\pi-\frac{k}{n}\pi, \quad k=0,1,2,\ldots,r;\\
H(s)&=\frac{\omega_0^n}{(s-p_1)(s-p_1^*)\cdots(s-p_r)(s-p_r^*)}, \quad n=2r;\\
p_k&=\omega_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_k}, \alpha_k=\pi-\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k=1,2,\ldots,r.
\end{aligned} \tag{4.2-93}$$

Az átviteli függvény pólusai a bal félsíkon helyezkednek el az origó körüli ω_0 sugarú félkörön, két egymást követő pólus szögének különbsége π/n radián.

Az igazolásnak csak a vázlatát adjuk meg. Könnyen belátható, hogy $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítéssel $D(s)\equiv 1+(\pm s/\omega_0)^{2n}$ a (90) szerinti $K(\omega)$ nevezője. A p_k értékek a $D(s)=0$ egyenletnek a bal félsíkon elhelyezkedő gyökei. Az $|\mathrm{j}\omega-p_k|$ tényezők szorzata a $K(\omega)$ nevezőjét adja.

Példa Egy aluláteresztő szűrő specifikációs adatai: ω_b = 100 krad/s, ε = 0,5 és ω_c = 1000 krad/s, η = 0,003. Határozzuk meg a maximálisan lapos átviteli függvényt!

Az n fokszám és az ω_0 körfrekvencia számítása (92) alapján:

$$\nu=\frac{-\ln(0{,}003\cdot 0{,}5)}{\ln(1000/100)}=2{,}82 \;\Rightarrow\; n=3; \qquad \omega_0=0{,}5^{-1/3}\omega_b=126{,}0\ \text{krad/s}.$$

Az átviteli függvény pólusai $p_0=-\omega_0, p_1=-\omega_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^\circ}=\omega_0(-0{,}5-\mathrm{j}0{,}866)$ és p_1^*. Az átviteli függvény nevezője és számlálója ezek felhasználásával

$$A(s)=(s+\omega_0)(s^2+\omega_0 s+\omega_0^2)=s^3+2\,\omega_0 s^2+2\,\omega_0^2\,s+\omega_0^3, \quad B(s)=\omega_0^3.$$

Ellenőrzésül megállapíthatjuk, hogy

$$|A(\mathrm{j}\omega)|^2=\left(-2\,\omega_0\,\omega^2+\omega_0^3\right)^2+\left(-\omega^3+2\,\omega_0^2\,\omega\right)^2=\omega^6+\omega_0^6\,.$$

Az amplitúdó-karakterisztika valóban a (90) szerinti. Ellenőrizhetjük, hogy $A(0)=1$, $K(\omega_b)=1/\sqrt{1{,}25}=0{,}894$, a specifikációnak megfelelően, de $K(\omega_c)=0{,}002$, ami kisebb az előírt 0,003 értéknél, ami annak következménye, hogy n az egész számra kerekítés miatt nagyobb az elméletileg szükséges értékénél. #

Maximálisan lapos más típusú szűrők

Az előzőek alapján meg tudjuk határozni egy olyan aluláteresztő szűrő átviteli függvényét, amely kielégíti az áteresztősávban az $\{\hat{\omega}_a=0\,,\hat{\omega}_b\,;\varepsilon\}$, míg a zárósávban az $\{\hat{\omega}_c,\hat{\omega}_d=\infty\,;\eta\}$ adathármasokkal jellemzett specifikációt.

Jelölje ezt az átviteli függvényt illetve az amplitúdó-karakterisztikát $\hat{H}(\hat{s})$ illetve $\hat{K}(\hat{\omega})$. A felső „sapka" az aluláteresztő *referenciaszűrő* jellemzőire (körfrekvencia, komplex frekvencia, átviteli függvény, átviteli karakterisztika) utal.

Módszert fogunk adni a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró olyan $H(s)$ átviteli függvényének és $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájának meghatározására, amelynek paraméterei megegyeznek a referenciaszűrő ε áteresztősávi és η zárósávi paraméterével, három (nem több!) határfrekvenciája tetszőlegesen előírható. A módszer a frekvencia-transzformáció: ennek során az $\hat{s}$ változóról az $\hat{s}=\hat{s}(s)$, az $\hat{\omega}$ változóról az $\hat{\omega}=\hat{\omega}(\omega)$ függvénykapcsolattal térünk át az s illetve az ω változóra. A transzformációnak olyannak kell lennie, hogy ne befolyásolja a stabilitási tulajdonságot, vagyis az $\hat{s}$ bal félsíkjátt az s sík bal félsíkjába kell átvinnie. Ezáltal a referencia átviteli függvény bal félsíkra eső pólusaiból a keresett átviteli függvény bal félsíkra eső pólusai lesznek.

Maximálisan lapos felüláteresztő szűrő

A felüláteresztő szűrő áteresztősávjának paraméterei $\{\omega_a,\omega_b=\infty\,;\varepsilon\}$, zárósávjának paraméterei $\{\omega_c=0,\omega_d\,;\,\eta\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega}=\frac{\Omega^2}{\omega},\qquad \hat{s}=\frac{\Omega^2}{s}. \tag{4.2-94}$$

Az Ω körfrekvencia tetszőleges ($\Omega^2=\omega_a\,\omega_d$ egy szokásos választás). A felüláteresztő (FÁ) és az aluláteresztő refrenciaszűrő (AÁ) összetartozó frekvenciái a következők:

$$\begin{array}{llllll}
\text{FÁ:} & \omega=0 & \omega_d & \omega_a & \infty & \omega_0\equiv\varepsilon^{1/n}\omega_a \\
\text{AÁ:} & \hat{\omega}=\infty & \dfrac{\Omega^2}{\omega_d}=\hat{\omega}_c & \dfrac{\Omega^2}{\omega_a}=\hat{\omega}_b & 0 & \hat{\omega}_0\equiv\varepsilon^{-1/n}\hat{\omega}_b
\end{array}$$

A $\{0,\omega_d\,;\eta\}$ zárósáv az $\{\hat{\omega}_c,\infty\,;\eta\}$ referencia-zárósávba, míg az $\{\omega_a,\infty\,;\varepsilon\}$ áteresztősáv a $\{0,\hat{\omega}_b;\varepsilon\}$ referencia-áteresztősávba transzformálódik. Ismerve a referencia-aluláteresztő $\hat{H}(\hat{s})$ átviteli függvényét – előzőleg a maximális laposságú közelítést meg is adtuk – a felüláteresztő átviteli függvényének kifejezése

$$\text{FÁ}: \; H(s)=\hat{H}(\hat{s})\Big|_{\hat{s}=\Omega^2/s}. \tag{4.2-95}$$

Hasonlóan kapjuk a $K(\omega)=\hat{K}(\hat{\omega})\Big|_{\hat{\omega}=\Omega^2/\omega}$ amplitúdó-karakterisztikát.

Példa Határozzuk meg annak a felüláteresztő szűrőnek az átviteli függvényét és átviteli karakterisztikáját, amelynek zárósávját a {0, 100 krad/s; 0,003}, áteresztősávját az {1000 krad/s, ∞; 0,5} paraméterek jellemzik.

Legyen $\Omega^2=\omega_a\,\omega_d=10^5\,(\text{krad/s})^2$. Ekkor $\hat{\omega}_b=\Omega^2/\omega_a=\omega_d=100\,\text{krad/s}$ és $\hat{\omega}_c=\Omega^2/\omega_d=\omega_a=1000\,\text{krad/s}$ adódik. Ezek szerint éppen az előző példában vizsgált aluláteresztő specifikációit kaptuk. Az átviteli függvény ennek megfelelően

$$H(s)=\frac{\hat{\omega}_0^3}{\hat{s}^3+2\,\hat{\omega}_0\,\hat{s}^2+2\,\hat{\omega}_0^2\,\hat{s}+\hat{\omega}_0^3}\Bigg|_{\hat{s}=\Omega^2/s}=\frac{s^3}{s^3+2\,\omega_0\,s^2+2\,\omega_0^2\,s+\omega_0^3};\quad \omega_0\equiv\varepsilon^{1/3}\omega_a=793{,}70\,\frac{\text{krad}}{\text{s}}.$$

Némi számolással belátható, hogy az energia-átviteli karakterisztika kifejezése

$$K^2(\omega)=\frac{(\omega/\omega_0)^6}{1+(\omega/\omega_0)^6},$$

továbbá $K(\omega_a)=0{,}894$; $K(\omega_d)=0{,}002$ mint az előző példában az aluláteresztőre, amint annak lennie is kell. #

Maximálisan lapos sáváteresztő szűrő

A sáváteresztő szűrő áteresztősávjának paraméterei $\{\omega_a,\omega_b;\varepsilon\}$, zárósávjainak paraméterei $\{0,\omega_d;\eta\}$ és $\{\omega_c,\infty;\eta\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega}=\omega-\frac{\Omega^2}{\omega},\quad \hat{s}=s+\frac{\Omega^2}{s};\quad \Omega^2=\begin{cases}\omega_a\,\omega_b\\ \omega_c\,\omega_d\end{cases}. \tag{4.2-96}$$

Az $\omega_a\,\omega_b=\omega_c\,\omega_d$ feltétel azt jelenti, hogy csak három határfrekvenciát választhatunk meg szabadon. A (96) megkötés egy következménye

$$\hat{\omega}_b=\omega_b-\omega_a,\quad \hat{\omega}_c=\omega_c-\omega_d. \tag{4.2-97}$$

A sáváteresztő (SÁ) és az aluláteresztő referencia-szűrő (AÁ) összetartozó körfrekvenciái

$$\begin{array}{lcccccccc}\text{SÁ}: & \omega= & 0 & \omega_d & \omega_a & \Omega & \omega_b & \omega_c & \infty\\ \text{AÁ}: & \hat{\omega}= & -\infty & -\hat{\omega}_c & -\hat{\omega}_b & 0 & \hat{\omega}_b & \hat{\omega}_c & +\infty\end{array}$$

Az $\{\omega_a,\omega_b;\varepsilon\}$ áteresztősáv a $\{-\hat{\omega}_b,\hat{\omega}_b;\varepsilon\}$ áteresztősávba, míg a $\{0,\omega_d;\eta\}$, illetve az $\{\omega_c,\infty;\eta\}$ zárósáv a $\{-\infty,-\hat{\omega}_c;\eta\}$, illetve az $\{\hat{\omega}_c,\infty;\eta\}$ zárósávba transzformálódik.

Az átviteli függvényt vagy az amplitúdó-karakterisztikát az előzőhöz hasonlóan behelyettesítéssel kapjuk. A $K(\omega)$ maximális értéke 1, ez az Ω körfrekvencián (az áteresztősáv mértani közepénél) lép fel. A $H(s)$ fokszáma kétszerese a referenciaszűrő fokszámának. Ez azt jelenti, hogy a jelfolyam hálózattal történő realizálás során kétszer

annyi integrátorra van szükség a sáváteresztő mint az ugyanolyan specifikációjú aluláteresztő realizálásához.

Példa Határozzuk meg egy olyan sáváteresztő átviteli függvényét és amplitúdó-karakterisztikáját, amelyre az áteresztősávi specifikáció {100 krad/s, 200 krad/s; 0,5}, első zárósávjának specifikációja {0 krad/s, 19,6 krad/s; 0,003}, második zárósávjának specifikációja {1020 krad/s, ∞; 0,003}. A második zárósáv alsó határát (100)(200)/19,6 adja, a többi adat szabadon választható.

Az aluláteresztő referenciaszűrőre $\hat{\omega}_b = 100$ krad/s és $\hat{\omega}_c = 1000$ krad/s. Ez éppen a korábban vizsgált aluláteresztő, ezért felhasználhatjuk annak átviteli függvényét (amelyben $\hat{\omega}_0 = 126{,}0$ krad/s):

$$H(s) = \left.\frac{\hat{\omega}_0^3}{\hat{s}^3 + 2\,\hat{\omega}_0\,\hat{s}^2 + 2\,\hat{\omega}_0^2\,\hat{s} + \hat{\omega}_0^3}\right|_{\hat{s} = s + \Omega^2/s} = \frac{\hat{\omega}_0^3\, s^3}{A(s)}\ ;$$

$$A(s) = s^6 + 2\hat{\omega}_0 s^5 + \left(3\,\Omega^2 + 2\,\hat{\omega}_0^2\right)s^4 + \left(4\,\Omega^2 + \hat{\omega}_0^2\right)\hat{\omega}_0 s^3 +$$
$$+ \left(3\,\Omega^2 + 2\,\hat{\omega}_0^2\right)\Omega^2 s^2 + 2\,\Omega^4 \hat{\omega}_0 s + \Omega^6;\quad \Omega^2 = \omega_a \omega_b = 20\,000\,(\text{krad/s})^2.$$

Az átviteli karakterisztika kifejezése elemi, de hosszadalmas számítás után:

$$K(\omega) = \frac{\hat{\omega}_0^3\, \Omega^3}{|A(\mathrm{j}\,\omega)|}\ ;$$

$$|A(\mathrm{j}\,\omega)|^2 = \omega^{12} - 6\Omega^2\omega^{10} + 15\Omega^4\omega^8 - \left(20\Omega^6 - \hat{\omega}_0^6\right)\omega^6 + 15\Omega^8\omega^4 - 6\Omega^{10}\omega^2 + \Omega^{12}\ .$$

Ezt az eredményt előállíthatjuk $\hat{K}(\hat{\omega})$ kifejezésének felhasználásával is. #

Maximálisan lapos sávzáró szűrő

A sávzáró szűrő zárósávjának paraméterei $\{\omega_c, \omega_d; \eta\}$, két áteresztősávjának paraméterei $\{0, \omega_b; \varepsilon\}$ és $\{\omega_a, \infty; \varepsilon\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega} = \frac{\Omega_0^2\,\omega}{\Omega^2 - \omega^2},\quad \hat{s} = \frac{\Omega_0^2\, s}{\Omega^2 + s^2};\quad \Omega^2 = \begin{cases} \omega_a\,\omega_b \\ \omega_c\,\omega_d \end{cases},\ \Omega_0^2 = (\omega_a - \omega_b)(\omega_d - \omega_c). \qquad (4.2\text{-}98)$$

Az Ω_0^2 helyett más állandó is használható. Az $\omega_a\,\omega_b = \omega_c\,\omega_d$ feltétel azt jelenti, hogy csak három határfrekvenciát választhatunk meg szabadon. A (98) megkötés egy következménye

$$\hat{\omega}_b = \omega_d - \omega_c\,,\quad \hat{\omega}_c = \omega_a - \omega_b\,. \qquad (4.2\text{-}99)$$

A sávzáró (SZ) és az aluláteresztő referencia-szűrő (AÁ) összetartozó körfrekvenciái:

$$\begin{array}{llllllll} \text{SZ:} & \omega = 0 & \omega_b & \omega_c & \Omega & \omega_d & \omega_a & \infty \\ \text{AÁ:} & \hat{\omega} = 0 & \hat{\omega}_b & \hat{\omega}_c & \pm\infty & -\hat{\omega}_c & -\hat{\omega}_b & 0 \end{array}$$

Az értelmezés hasonló, mint a sáváteresztőnél, ezért nem ismételjük meg és nem adunk példát sem.

Mint már említettük, a megadott frekvencia-transzformációk nemcsak a maximális laposságú közelítés esetén használhatók, hanem más, általunk nem tárgyalt közelítések esetén is. Ezek vagy az áteresztősávban vagy a zárósávban, vagy mindkettőben ingadozó amplitúdó-karakterisztikát eredményeznek. Ilyenek alkalmazásával gyakran kisebb fokszámú szűrővel is kielégíthető a specifikáció.

Látható, hogy a frekvencia-transzformáció nem biztosítja a sáváteresztő és a sávzáró szűrő tervezésének általános megoldását, mert a specifikáció paramétereire megkötések vonatkoznak,

*4.2-3.8. Maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztő

Mint már láttuk (3.2-2.4. pont), a torzításmentes jelátvitel egy olyan FI rendszerrel valósítható meg, amelynek átviteli karakterisztikája $H_0(\mathrm{j}\omega)=K_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$, ahol $T>0$ a késleltetési idő. Az ennek megfelelő átviteli függvény $H_0(s)=K_0\mathrm{e}^{-sT}$.

Célunk egy olyan közelítő *racionális* $H(s)$ átviteli függvény előállítása, amelynek pólusai a bal félsíkra esnek. E feladatnak sok megoldása van, ezek egyikét tárgyaljuk.

A $\tau(\omega)$ *futási idő karakterisztika* kifejezhető a következő alakban

$$\tau(\omega)=-\mathcal{R}e\left\{\left.\frac{H'(s)}{H(s)}\right|_{s=\mathrm{j}\omega}\right\},\qquad \frac{H'(s)}{H(s)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\ln H(s)\},\tag{4.2-100}$$

ahol a vessző az s szerinti differenciálást jelöli. Ugyanis $H(\mathrm{j}\omega)=K(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ jelöléssel

$$\ln H(\mathrm{j}\omega)=\ln K(\omega)+\mathrm{j}\,\varphi(\omega),$$

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathrm{j}\omega}\ln H(\mathrm{j}\omega)\right\}=\mathcal{R}e\left\{-\mathrm{j}\frac{1}{K(\omega)}\frac{\mathrm{d}K(\omega)}{\mathrm{d}\omega}+\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right\},$$

amiből (100) már következik.

Meg akarjuk határozni az $H_0(s)=\mathrm{e}^{-sT}$ mindentáteresztő átviteli függvény egy olyan racionális közelítését, amelyre az amplitúdó-karakterisztika pontosan állandó, tehát feladatunk a $\varphi_0(\omega)=-\omega T$ lineáris fázis-karakterisztika, vagyis a $\tau_0(\omega)=T$ állandó futási idő karakterisztika közelítése.

Tekintsük a mindentáteresztő futási ideje legjobb közelítésének a *maximális laposságút*, vagyis azt, amelyik a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\tau(0)=T;\quad \left.\frac{\mathrm{d}^i\tau(\omega)}{\mathrm{d}\omega^i}\right|_{\omega=0}=0,\ i=1,2,\ldots,n.\tag{4.2-101}$$

A mindentáteresztő racionális átviteli függvénye (4.2-3.3. pont; alább bevezettük a $c_i=a_{n-i}/a_n$ új együtthatókat):

$$H(s)\equiv\frac{A(-s)}{A(s)}=\frac{1-c_1s+c_2s^2-\ldots+(-1)^nc_ns^n}{1+c_1s+c_2s^2+\ldots+c_ns^n}.\tag{4.2-102}$$

Az együtthatóknak még ki kell elégíteniük a stabilitási feltételeket is (többek között mindegyiknek pozitívnak kell lennie).

A futási idő karakterisztika kifejezéséhez képezzük a (100) szerinti alakot:

$$\frac{H'(s)}{H(s)}=\frac{\{A(-s)\}'A(s)-A(-s)A'(s)}{[A(s)]^2}\frac{A(s)}{A(-s)}=-\frac{A'(s)}{A(s)}+\frac{\{A(-s)\}'}{A(-s)}.$$

Az $s=\mathrm{j}\omega$ helyettesítés után a második tag az első tag konjugált komplex párja, ezért összegük valós. A (100) értelmében ezért

$$\tau(\omega)=-\left.\frac{H'(s)}{H(s)}\right|_{s=\mathrm{j}\omega};\quad H(s)\equiv\frac{A(-s)}{A(s)}. \tag{4.2-103}$$

Célunk a c_i együtthatók meghatározása úgy, hogy egy n megválasztása után a (101) feltételek és a stabilitás feltételei is ki legyenek elégítve.

Tekintsük először az $n=2$ esetet. Ekkor $A(s)=1+c_1 s+c_2 s^2$ és ebből $A'(s)=c_1+2c_2 s$. Az osztást elkezdve

$$(c_1+2c_2 s):(1+c_1 s+c_2 s^2)=c_1+(2c_2-c_1^2)s+c_1(c_1^2-3c_2)s^2$$
$$(2c_2-c_1^2)s-c_1c_2 s^2$$
$$(-3c_1c_2+c_1^3)s^2-(2c_2^2-c_2c_1^2)s^3$$

Az s változót a $-s$ változóval helyettesítve, a (100) szerint kapjuk, hogy

$$\frac{H'(s)}{H(s)}=-2c_1\{1+(c_1^2-3c_2)s^2+\ldots\},\qquad \tau(\omega)=2c_1\{1-(c_1^2-3c_2)\omega^2+\ldots\}.$$

Látható, hogy az optimális választás $2c_1=T$. Ezek szerint $n=1$ esetén

$$H(s)=\frac{1-sT/2}{1+sT/2},\qquad \tau(\omega)=\frac{T}{1+(\omega T/2)^2}$$

a maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztőre. Ha $n=2$, akkor a másodfokú tag együtthatója nullává tehető $3c_2=c_1^2=(T/2)^2$ választással és ekkor

$$H(s)=\frac{1-(sT/2)+(sT/2)^2/3}{1+(sT/2)+(sT/2)^2/3},\qquad \tau(\omega)=T\frac{1+(\omega T/2)^2/3}{1+(\omega T/2)^2/3+(\omega T/2)^4/9}.$$

Látható, hogy mindkét esetben az átviteli függvény stabilis rendszert ír le. Ez szerencsés körülmény, hiszen ennek biztosításáról nem gondoskodtunk. Nagyobb fokszámú közelítések hasonló módon számíthatók.

Igazolható, hogy a maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztő átviteli függvényének általános kifejezése

$$H(s)=\frac{A(-s)}{A(s)},\quad A(s)=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!\,(2n-i)!}{(2n)!\,(n-i)!\,i!}(sT)^i,\ i=1,2,\ldots. \tag{4.2-104}$$

Az $A(s)$ polinom zérusai mind a bal félsíkon helyezkednek el, vagyis az átviteli függvény stabilis rendszert ír le. E pólusok szükség esetén numerikusan számíthatók.

Az n fokszám alkalmas megválasztásával elérhető, hogy ha $T-T_f$ a futási idő karakterisztika megengedett eltérése az előírt $[0,\ \omega_f]$ frekvenciasávban, akkor $\tau(\omega_f)\geq T_f$ teljesüljön, aminek következtében $T_f\leq\tau(\omega)\leq T,\ 0\leq\omega\leq\omega_f$ ki van elégítve.

4.2-3.F. Feladatok

F-1. Egy diszkrét idejű, FIR típusú rendszer impulzusválasza (háromszögletű vagy Bartlett-ablak)

$$h[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-M]\}\frac{k}{M}+\{\varepsilon[k-M]-\varepsilon[k-2M]\}\frac{2M-k}{M}.$$

Határozza meg a rendszer átviteli függvényét, átviteli karakterisztikáját, amplitúdó- és fázis-karakterisztikáját! Lineáris a fázis-karakterisztika?

F-2. Egy diszkrét idejű, lineáris fázisú, ideális aluláteresztő átviteli karakterisztikája

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\vartheta},\ 0\le|\vartheta|<\frac{\pi}{2};\quad H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=0,\ \frac{\pi}{2}\le|\vartheta|<\pi.$$

Határozza meg annak a DI, kauzális, FIR típusú rendszernek a $H_L(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ átviteli karakterisztikáját, amelynek impulzusválasza az ideális impulzusválasz csonkítottja:

$$h_L[k]=\{\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L]\}h[k],$$

ahol $h[k]$ az ideális rendszer impulzusválasza. Legyen $p = 4$ és

(*a*) $L = 2$. (*b*) $L = 4$. (*c*) $L = 8$.

Melyik csonkított impulzusválaszú rendszer aluláteresztő jellegű?

***F-3.** Tekintse a következő E_{mn} függvényeket, az első néhány Padé-törtet (az első index a számláló, a második a nevező fokszámát jelöli):

$$\mathrm{E}_{01}(x)=\frac{1}{1+x},\quad \mathrm{E}_{11}(x)=\frac{1-x/2}{1+x/2},\quad \mathrm{E}_{02}(x)=\frac{1}{1+x+x^2/2},$$

$$\mathrm{E}_{12}(x)=\frac{1-x/3}{1+2x/3+x^2/6},\quad \mathrm{E}_{22}(x)=\frac{1-x/2+x^2/12}{1+x/2+x^2/12}.$$

Igazolja, hogy ezek Taylor-sorának első $m + n$ számú tagja megegyezik az

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\ldots$$

Taylor-sor első $m + n$ számú tagjával.

A fenti eredményeket felhasználva adjon racionális közelítést az alábbi, nem racionális FI átviteli függvényekre ($T > 0$):

(*a*) $H(s)=\mathrm{e}^{-sT}$ (késleltető vagy lineáris fázisú mindentáteresztő).

(*b*) $H(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{sT}$ (állandó értékű, véges hosszúságú impulzusválasz).

Igaz-e, hogy az így kapott $H_{mn}(s)$ átviteli függvények kauzális és gerjesztés-válasz stabilis rendszert jellemeznek?

***F-4.** Egy FI rendszer fázis-karakterisztikája

$$\varphi(\omega)=0,\ 0<\omega<\omega_1;\quad \varphi(\omega)=C\pi,\ \omega_1<\omega<\omega_2;\quad \varphi(\omega)=0,\ \omega_2<\omega<\infty.$$

Határozza meg azt az amplitúdó-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Lehet-e $\omega_1 = 0$, illetve $\omega_2 = \infty$ értékű?

***F-5.** Egy DI rendszer amplitúdó-karakterisztikája

$$K(\vartheta) = K_0,\ 0 < \vartheta < \vartheta_1;\quad K(\vartheta) = K_1,\ \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2;\quad K(\vartheta) = K_2,\ \vartheta_2 < \vartheta < \pi.$$

Határozza meg azt a fázis-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Van-e valamilyen megkötés a K_i vagy a ϑ_i előírásokra?

***F-6.** Egy DI rendszer fázis-karakterisztikája

$$\varphi(\vartheta) = 0,\ 0 < \vartheta < \vartheta_1;\quad \varphi(\vartheta) = C\pi,\ \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2;\quad \varphi(\vartheta) = 0,\ \vartheta_2 < \vartheta < \pi.$$

Határozza meg azt az amplitúdó-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Lehet-e $\vartheta_1 = 0$, illetve $\vartheta_2 = \pi$ értékű?

4.2-3.M. Megoldások

M-1. A 4.1-1.F-3(*d*) feladat eredményét is felhasználva

$$H(z) = z^2 \frac{1 - 2z^{-M} + z^{-2M}}{M(z-1)^2},\qquad H(e^{j\vartheta}) = \left[\frac{1 - e^{-jM\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}}\right]^2 = \left[\frac{\sin(M\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}\right]^2 \frac{e^{-j(M-1)\vartheta/2}}{M}.$$

A rendszer lineáris fázisú, mint az a legutolsó összefüggésből következik.

M-2. A lineáris fázisú, ideális aluláteresztő impulzusválasza a megadott sávhatár esetén

$$h[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j(k-p)\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(k-p)\pi/2}{k-p}.$$

A csonkítással előállított, kauzális FIR típusú rendszer átviteli karakterisztikája $p = 4$ figyelembe vételével

$$H_L(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-1}{3}e^{-j\vartheta} + e^{-j3\vartheta} + \frac{\pi}{2}e^{-j4\vartheta} + e^{-j5\vartheta} + \frac{-1}{3}e^{-j7\vartheta} + \ldots\right\}.$$

A megadott impulzushosszak esetén

$$(a)\ H_2(e^{j\vartheta}) = -\frac{1}{3\pi}e^{-j\vartheta},\qquad K_2(\vartheta) = \frac{1}{3\pi}.$$

$$(b)\ H_4(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-1}{3}e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}\right\}e^{-j2\vartheta},\qquad K_4(\vartheta) = \frac{1}{3\pi}\sqrt{10 - 6\cos 2\vartheta}.$$

$$(c)\ H_8(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + 2\cos\vartheta - \frac{2}{3}\cos 3\vartheta\right\}e^{-j4\vartheta}.$$

Az amplitúdó-karakterisztika ábrázolásával belátható, hogy csak a (*c*) szerinti ír le aluláteresztőt. Ebből következik, hogy az impulzusválasz csonkítása megváltoztathatja a frekvenciafüggés jellegét (esetünkben az aluláteresztő tulajdonságot)!

***M-3.** Az állítást például polinomosztással ellenőrizhetjük.

$(a)\ H_{mn}(s)=\mathrm{E}_{mn}(sT)$.

Csak $H_{11}(s)$ és $H_{22}(s)$ ír le lineáris fázisú mindentáteresztőt.

$$(b)\ H_{01}(s)=\frac{1}{1+sT};\qquad H_{11}(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}sT};\qquad H_{02}(s)=\frac{1+\frac{1}{2}sT}{1+sT+\frac{1}{2}(sT)^2};$$

$$H_{12}(s)=\frac{1+\frac{1}{6}sT}{1+\frac{2}{3}sT+\frac{1}{6}(sT)^2};\qquad H_{22}(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}sT+\frac{1}{12}(sT)^2}.$$

Mindegyik rendszer kauzális és gerjesztés-válasz stabilis.

***M-4.** A (82) Bode-képlet alapján az $\omega_1<\omega<\omega_2$ intervallumban

$$\ln\frac{K(\omega)}{K(\infty)}=-\frac{1}{\pi}\left\{-C\pi\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda-\omega}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[C\pi\int_{\omega_1}^{\omega-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda-\omega}+C\pi\int_{\omega+\varepsilon}^{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda-\omega}\right]\right\}.$$

Ha $0<\omega<\omega_1$ vagy ha $\omega_2<\omega<\infty$,, akkor az (ω_1,ω_2) intervallumra vonatkozó integrál közvetlenül számítható. Hasonló az eljárás a (82) másik összefüggése alapján. Végeredményben

$$K(\omega)=K(\infty)\left|\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right|^C,\quad K(\omega)=K(0)\left|\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right|^C.$$

Ha $C>0$, akkor $K(\omega_1)=0, K(\omega_2)=\infty$; ha $C<0$, akkor $K(\omega_1)=\infty, K(\omega_2)=0$.

Ha $\omega_1=0$, illetve ha $\omega_2=\infty$, akkor

$$K(\omega)=K(\infty)\left|\frac{\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right|^C,\quad K(\omega)=K(0)\left|\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_1^2}\right|^C,$$

míg a másik alak nem értelmezett.

***M-5.** A (82) Bode-képlet alapján például $0<\vartheta<\vartheta_1$ esetén

$$\varphi(\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln K_2\int_{-\pi}^{-\vartheta_2}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\ln K_1\int_{-\vartheta_2}^{-\vartheta}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\ln K_0\int_{-\vartheta_1}^{0}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\right.$$

$$\left.+\ln K_0\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\vartheta-\varepsilon}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\int_{\vartheta+\varepsilon}^{\vartheta_1}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda\right]+\ln K_1\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\ln K_2\int_{\vartheta_2}^{\pi}f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda\right\},$$

ahol $f(\alpha)=\cos\alpha/\sin\alpha$. Az integrál és a határérték könnyen számítható. Végeredményben

$$\varphi(\vartheta)=\frac{1}{\pi}\left\{\ln K_0 \ln\frac{\sin\frac{|\vartheta_1-\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_1+\vartheta|}{2}}+\ln K_1 \ln\left[\frac{\sin\frac{|\vartheta_1+\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_1-\vartheta|}{2}}\frac{\sin\frac{|\vartheta_2-\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_2+\vartheta|}{2}}\right]+\ln K_2 \ln\frac{\sin\frac{|\vartheta_2+\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_2-\vartheta|}{2}}\right\}.$$

Egyik K_i sem lehet nulla, de például $\vartheta_1=\vartheta_2$ azt jelenti, hogy K_1 nincs előírva.

***M-6.** A (82) Bode-képlet alapján például $0<\vartheta<\vartheta_1$ esetén

$$\ln\frac{K(\vartheta)}{K(0)}=\frac{1}{2\pi}\left\{-C\pi\int_{-\vartheta_2}^{-\vartheta_1} f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\ln K_1\int_{-\vartheta_2}^{-\vartheta_1} f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\right.$$

$$\left.+C\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta-\varepsilon} f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda+\int_{\vartheta+\varepsilon}^{\vartheta_2} f(\lambda-\vartheta)\mathrm{d}\lambda\right]\right\},$$

ahol $f(\beta)=1/\mathrm{tg}(\beta/2)$. Végeredményben

$$K(\vartheta)=K(0)\left[\frac{\sin\frac{|\vartheta_1+\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_2+\vartheta|}{2}}\frac{\sin\frac{|\vartheta_1-\vartheta|}{2}}{\sin\frac{|\vartheta_2-\vartheta|}{2}}\right]^C.$$

A $\vartheta_1=0$, illetve a $\vartheta_2=\pi$ értékek megengedettek. Ekkor az amplitúdó-karakterisztika kifejezése kissé egyszerűsödik.

4.3. Hálózatanalízis a komplex frekvenciatartományban

Mint a 2.4. és a 3.3. fejezetben már láttuk: egy rendszer reprezentálható hálózattal is. Ebben a fejezetben a lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatokat vizsgáljuk és ezeket röviden hálózatnak nevezzük. Elsődleges célunk a hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényének előállítása. Alapvetően két utat követhetünk. Előállíthatjuk a rendszer valamelyik időtartománybeli leírását, majd képezzük annak DI vagy FI Laplace-transzformáltját, ezekből kifejezzük a gerjesztés és a válasz kapcsolatát. Ezt az eljárást a 4.2-1. szakaszban már tárgyaltuk. Előállíthatjuk azonban az egyenleteket közvetlenül a komplex frekvenciatartományban is. Ezzel a gondolattal a 3.3. fejezetben ugyancsak találkoztunk már. Mindkét módszer alkalmazható abban az általánosabb esetben is, amikor nem bekapcsolási folyamatot vizsgálunk, ezért az átviteli függvény nem elegendő a válasz számításához.

Az igen tömör és hatékony komplex frekvenciatartománybeli rendszerleírást és hálózatleírást a 4.4. szakaszban még fel fogjuk használni.

A 4.3-1. szakaszban tárgyaljuk a hálózati egyenletek közvetlen felírását a komplex frekvenciatartományban, azután röviden megismételjük az időtartománybeli egyenletek felírásának és transzformálásának módszerét.

A 4.3-2. szakaszban néhány módszert mutatunk arra, hogy miként lehet előállítani azt a hálózatot, amelynek adott a racionális átviteli függvénye (a hálózatszintézis realizációs lépése). Ezzel a feladattal már foglakoztunk a 2.4-3. szakaszban az időtartománybeli leírásra támaszkodva. Most valamivel többet tudunk erről mondani, kihasználva a komplex frekvenciatartománybeli leírás jól kezelhető formalizmusát, ezért a direkt realizációk mellett a kaszkád realizációt is bemutatjuk.

4.3-1. Az átviteli függvény számítása

4.3-1.1. Elemi komponensek

A lineáris. invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok elemi komponenseit a 2.4-1.1. pontban már értelmeztük. Itt összefoglaljuk az elemi komponensek nevét és diszkrét idejű, illetve folytonos idejű karakterisztikáját. Az elemi komponensek rajzjelét alább az 1. ábrán megadjuk, annak feliratával egyelőre ne törődjünk.

Jelölje p a komponens bemeneti, q a komponens kimeneti változóját, akkor az elemi komponensek időtartománybeli karakterisztikái (2.4-1) értelmében

komponens neve:	DI karakterisztika	FI karakterisztika	(4.3-1)
forrás	$q[k]=u[k]$	$q(t)=u(t)$	
nyelő	$p[k]=y[k]$	$p(t)=y(t)$	
erősítő	$q[k]=K\,p[k]$	$q(t)=K\,p(t)$	

DI késeltető	$\begin{cases} q[k]=p[k-1] \\ q[k+1]=p[k] \end{cases}$	—
FI integrátor	—	$\begin{cases} q(t)=q(-0)+\int_{-0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ q'(t)=p(t) \end{cases}$

Képezzük az egyenletek DI illetve FI Laplace-transzformáltját, vagyis térjünk át a komplex frekvenciatartományba:

komponens neve:	DI karakterisztika	FI karakterisztika
forrás	$Q(z)=U(z)$	$Q(s)=U(s)$
nyelő	$P(z)=Y(z)$	$P(s)=Y(s)$
erősítő	$Q(z)=K\,P(z)$	$Q(s)=K\,P(s)$
DI késeltető	$\begin{cases} Q(z)=z^{-1}\,P(z)+p[-1] \\ z\,Q(z)-z\,q[0]=P(z) \end{cases}$	—
FI integrátor	—	$\begin{cases} Q(s)=\frac{1}{s}P(s)+\frac{q(-0)}{s} \\ s\,Q(s)-q(-0)=P(s) \end{cases}$

(4.3-2)

Az i-edik forrás $U_i(z)=\mathscr{Z}\{u_i[k]\}$ illetve $U_i(s)=\mathscr{L}\{u_i(t)\}$ kimeneti változója a rendszer adott vagy adottként kezelt *gerjesztése* (bemeneti változója).

Az i-edik nyelő $Y_i(z)=\mathscr{Z}\{y_i[k]\}$ illetve $Y_i(s)=\mathscr{L}\{y_i(t)\}$ bemeneti változója a rendszer keresett *válasza* (kimeneti változója).

Az i-edik *erősítő* komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája

$$\text{DI: } Q_i(z)=K_i\,P_i(z) \qquad \text{FI: } Q_i(s)=K_i\,P_i(s), \tag{4.3-3}$$

ahol K_i az időtől független erősítés. A Q_i és a P_i a z illetve az s változó ismeretlen függvénye.

A dinamikus komponensre a karakterisztikát mind az időtartományban, mind a komplex frekvenciatartományban két alakban is megadtuk. Ha azt akarjuk, hogy az egyenletekben csak z illetve s pozitív hatványai forduljanak elő, akkor a második alakot célszerű használni.

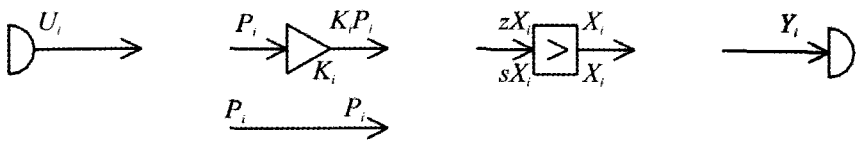
A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikájának meghatározása során tekintsük először a *belépő gerjesztések* esetét. Ezek a kauzális komponensekből álló hálózatban belépő változókat hoznak létre, ezért a késleltetőre $q[0]=p[-1]=0$, illetve az integrátorra $q(-0)=0$. A karakterisztika ekkor egyszerűsödik.

A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *belépő* gerjesztések esetén

az i-edik DI késleltető kimeneti változója $X_i(z)$, bemeneti változója $z\,X_i(z)$;

az i-edik FI integrátor kimeneti változója $X_i(s)$, bemeneti változója $s\,X_i(s)$. (4.3-4)

Ezeket az összefüggéseket szemlélteti az 1. ábra (vö. 3.1-1. ábra)



4.3-1. ábra Az elemi komponensek és változóik a komplex frekvenciatartományban belépő jelek esetén

Abban az általánosabb esetben, amikor a jelek nem belépőek, először meg kell határoznunk minden késleltető kimeneti változójának $x_i[0]$ kezdeti értékét illetve minden integrátor kimeneti változójának $x_i(-0)$ kiindulási értékét a hálózat múltjának ismeretében. Lehet, hogy $k = 0$ illetve $t = 0$ előtt a hálózatban egy vagy több erősítés vagy akár a hálózat struktúrája más volt, mint $k = 0$ illetve $t = 0$ után.

A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *nem belépő* gerjesztések esetén:

– az i-edik DI késleltető kimeneti változója $X_i(z)$, bemeneti változója ekkor

$$V_i(z) = z\,X_i(z) - x_i[0]z\,;$$

(4.3-5)

– az i-edik FI integrátor kimeneti változója $X_i(s)$, bemeneti változója ekkor

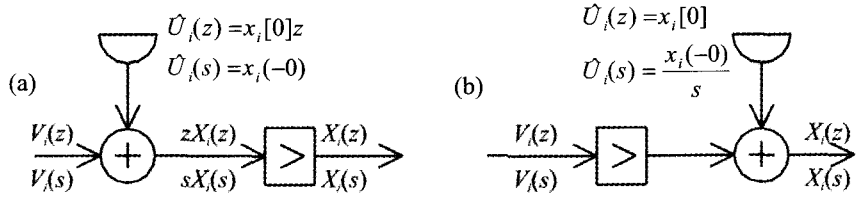
$$V_i(s) = s\,X_i(s) - x_i(-0);$$

A DI késleltető illetve a FI integrátor karakterisztikájának egy másik alakja ugyanezekkel a jelölésekkel (ekkor az egyenletek a z^{-1} illetve az s^{-1} változókat tartalmazzák)

$$\begin{aligned} X_i(z) &= z^{-1}V_i(z) + x_i[0], \\ X_i(s) &= s^{-1}V_i(s) + s^{-1}x_i(-0). \end{aligned} \tag{4.3-6}$$

A (4) nyilván ezek speciális esete $x_i[0] = 0$ illetve $x_i(-0) = 0$ esetén.

A késleltető illetve az integrátor az (5) értelmében helyettesíthető egy nulla kiindulási állapotú késleltető vagy integrátor és egy olyan fiktív forrás összekapcsolásával, amelynek forrásváltozója a komplex frekvenciatartományban $\hat{U}_i(z) = x_i[0]z$ illetve $\hat{U}_i(s) = x_i(-0)$, amint azt a 2a ábra mutatja. A (6) hálózati megfelelője a 2b ábrán látható. A helyettesítő források felhasználásával a nem bekapcsolási folyamat is bekapcsolási folyamatként tárgyalható a kapcsolás utáni időkre szorítkozva.



4.3-2. ábra A DI késleltető illetve a FI integrátor kiindulási állapota kétféle módon is figyelembe vehető egy járulékos fiktív forrással

Mint már említettük (3.3-1.3. pont) az elemi komponensek mellett használhatunk általánosabb komponenseket is. Az egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponens komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *belépő gerjesztés* esetén

$$Q_i(z)=G_i(z)P_i(z); \qquad Q_i(s)=G_i(s)P_i(s), \tag{4.3-7}$$

ahol G_i az i-edik lineáris komponens átviteli függvénye. A gyakorlati esetekben a $G_i(z)$ DI átviteli függvény racionális. A $G_i(s)$ FI átviteli függvény többnyire ugyancsak racionális, de ugyancsak gyakran előfordul a $G_i(s)=\mathrm{e}^{-sT_i}R_i(s)$ alak, ahol $R_i(s)$ racionális függvény; speciálisan a $G_i(s)=\mathrm{e}^{-sT_i}$ átviteli függvény folytonos idejű késleltetőt ír le.

Egy másik általánosítási lehetőség sok bemenetű és sok kimenetű lineáris komponens értelmezése. Erre az általánosításra nincsen feltétlenül szükség, mert a sokváltozós lineáris komponens helyettesíthető egy-bemenetű és egy-kimenetű lineáris komponensek alkalmas összekapcsolásával (2.4-1.3. pont).

Mindkét általánosítási lehetőség jóval bonyolultabbá válik, ha nem belépő gerjesztés esetét vizsgáljuk. Ilyenkor vissza kell nyúlnunk valamilyen kevésbé formális leírásmódhoz, például az általános komponensnek elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózati reprezentációjára vagy állapotváltozós leírására.

4.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

A jelfolyam hálózatokra vonatkozó összekapcsolási szabályokat (az összegező és a szétágazó csomópont fogalmát) és a változókra vonatkozó kényszereket a 2.4-1.2. pontban tárgyaltuk. Ezek komplex frekvenciatartománybeli alakja lényegében változatlan, éspedig

– *összegező csomópont:* az egyetlen Y_i, P_i, zX_i illetve sX_i bemeneti változó, amely kilép az összegező csomópontból egyenlő azon U_r, K_rP_r, X_r kimeneti változók összegével, amelyek belépnek a csomópontba;

– *szétágazó csomópont:* valamennyi Y_i, P_i, zX_i illetve sX_i bemeneti változó, amely kilép a szétágazó csomópontból egyenlő azon egyetlen $U_r, K_r P_r, X_r$ kimeneti változóval, amelyik belép a csomópontba.

A DI illetve a FI esetben $Y_i(z)=\mathscr{Z}\{y_i[k]\}$ illetve $Y_i(s)=\mathscr{L}\{y_i(t)\}$ a válasz Laplace-transzformáltját jelöli. Értelem szerinti a többi jelölés is.

Belépő gerjesztés esetén U_i a gerjesztés Laplace-transzformáltját jelenti. Értelem szerinti a többi jelölés is.

Ha nem minden gerjesztés belépő, akkor U_i jelentheti a kiindulási állapotot figyelembe vevő fiktív gerjesztést is, amelyet az előző pontban és a 2. ábrán $\hat{U}_i$ jelölt. Ezek a fiktív források csak akkor játszanak szerepet, ha az egyenleteket közvetlenül a komplex frekvenciatartományban írjuk fel (l. a következő pontot), míg ha az időtartománybeli egyenletekből indulunk ki (ezt a 4.3-1.4. pontban tárgyaljuk), akkor csak a valódi forrásokat kell figyelembe venni, az esetleg nem nulla kiindulási értékek figyelembe vétele más módon történik.

4.3-1.3. Az egyenletek közvetlen felírása

Egyszerű hálózatokra a frekvenciatartománybeli egyenletek a kapcsolási rajz alapján többnyire nehézség nélkül felírhatók. Gyakran elegendő az U transzformált gerjesztés és az Y transzformált válasz kapcsolatára egyetlen egyenletet felírni. Szükség esetén bevezetünk további transzformált változókat (például egy vagy több dinamikus komponens X_i kimeneti vagy V_i bemeneti változóját), majd megoldjuk az így előálló lineáris algebrai egyenletrendszert, amelyben z vagy s paraméterként kezelendő.

Az egyenlet vagy az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja egy gerjesztésű, egy válaszú rendszer és belépő gerjesztés esetén a $H(z)=Y(z)/U(z)$ illetve a $H(s)=Y(s)/U(s)$ átviteli függvényt.

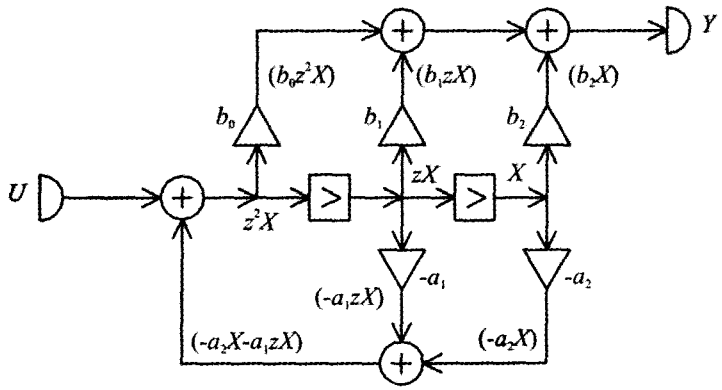
Nem belépő gerjesztés esetén a kiindulási értékeket fiktív forrásokkal vesszük figyelembe. Ekkor a válasz Laplace-transzformáltjának kifejezését tudjuk előállítani. Ez úgy is felfogható, mint ha a rendszer sok gerjesztésű lenne és a kiindulási értékekhez is tartozik egy-egy $H_i = Y/U_i$ átviteli függvény. Ezeknek az átviteli függvényeknek közös a nevezője, ezért a pólusok meghatározására csak egyszer van szükség.

Érdekes eset áll elő, amikor egyes átviteli függvények redukálhatók, vagyis e kapcsolat vonatkozásában nem minden pólus játszik szerepet. Ha a valódi gerjesztésre vonatkozó átviteli függvény redukálható, akkor a redukált alakban nem szereplő pólus mégis megjelenhet a válasz időfüggvényében, ha valamilyen módon létrejött egy nullától különböző kiindulási állapot és az erre vonatkozó átviteli függvény nem redukálható.

Az átviteli függvény ismeretében előállíthatjuk a rendszert leíró rendszeregyenletet vagy állapotváltozós leírást (4.2-1.2. és 3. pont), gerjesztés-válasz stabilis rendszer esetén változócserével előállíthatjuk az átviteli karakterisztikát (4.2-1.4. pont).

Mivel a DI késleltetőre és a FI integrátorra ugyanazt a rajzjelet alkalmaztuk, ezért az átviteli függvény azonos kapcsolási rajz esetén is azonos, de a változó a DI esetben z, a FI esetben s. Nem belépő gerjesztés esetén a fiktív forrásváltozó értelmezése a 2a ábra szerinti helyettesítéssel a DI esetben $\hat{U}_i(z)=x_i[0]z$, a FI esetben $\hat{U}_i(s)=x_i(-0)$.

1. példa Határozzuk meg annak a DI illetve FI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek egy hálózati reprezentációja a 3. ábrán látható.



4.3-3. ábra Az átviteli függvény meghatározása a komplex frekvenciatartományban

Az U és Y változók mellett bevezettünk egyetlen X segédváltozót. A többi változó ezekkel „fejben" kifejezhető. Az ábrán zárójelek között ezeknek a fejben elvégzett műveleteknek az eredménye látható a DI esetre.

A diszkrét idejű esetet vizsgálva felírható a következő két egyenlet:

$$z^2 X = U - [a_1 z + a_2] X,$$

$$Y = b_2 X + b_1 z X + b_0 z^2 X.$$

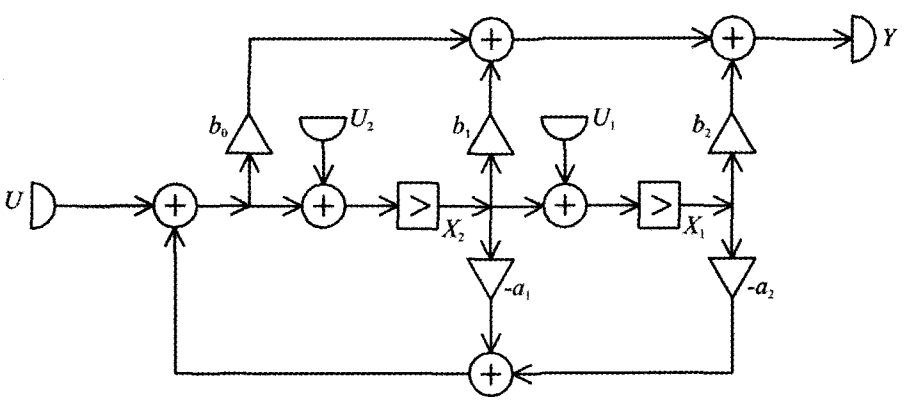
Az X változó kiküszöbölése után kapjuk a $H = Y/U$ átviteli függvényt:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Ennek alapján a rendszeregyenletre, az állapotváltozós leírásra vagy az átviteli karakterisztikára (ha értelmezett, vagyis ha a rendszer GV stabilis, ami az átviteli függvény pólusainak vizsgálatával ellenőrizhető) ugyanazokat az összefüggéseket kapjuk, mint korábban más módszerekkel.

A FI esetben az átviteli függvény kifejezését az előzőből ismeretesen úgy kapjuk, hogy a z változó helyére az s változót írjuk. #

2. példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek hálózati reprezentációja a 4. ábrán látható. Az U_1 és U_2 jelű gerjesztések lehetnek „valódiak", de reprezentálhatják a kiindulási állapotokat is, vagyis a DI esetben $U_1(z) = x_1[0]z, U_2(z) = x_2[0]z$, a FI esetben $U_1(s) = x_1(-0), U_2(s) = x_2(-0)$. A kiindulási értékek meghatározásával itt nem foglalkozunk.



4.3-4. ábra Három gerjesztésű rendszert reprezentáló hálózat vizsgálata

Most két segédváltozót vezettünk be. A három hálózati egyenlet:

$$z X_1 = X_2 + U_1, \qquad Y = b_2 X_1 + b_1 X_2 + b_0 [U - a_2 X_1 - a_1 X_2],$$

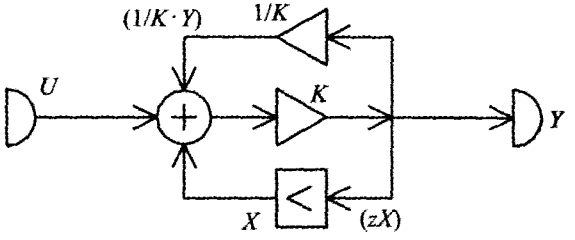
$$z X_2 = -a_2 X_1 - a_1 X_2 + U + U_2.$$

A transzformált válasz kifejezése elemi számítás után

$$Y(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} U(z) + \frac{(b_2 - a_2 b_0) z + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{z^2 + a_1 z + a_2} U_1(z) + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z + (b_2 - a_2 b_0)}{z^2 + a_1 z + a_2} U_2(z).$$

Amint látjuk, mindegyik átviteli függvény nevezője valóban ugyanaz. A számlálók azonban különböznek, ezért lehet, hogy valamelyik átviteli függvény redukálható. #

3. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az átviteli függvényét, amelynek egy hálózati reprezentációja az 5. ábrán látható.



4.3-5. ábra Egy nem reguláris hálózat vizsgálata a komplex frekvenciatartományban

A komplex frekvenciatartománybeli hálózati egyenletek a DI esetben

$$z\,X = K\left\{U + \frac{1}{K}Y + X\right\}, \quad Y = z\,X.$$

Elemi számítás után kapjuk, hogy a DI esetben $H(z) = -z$, a FI esetben $H(s) = -s$. Ezek azonban abszurd eredmények, mert a racionális átviteli függvény számlálója nem lehet nagyobb fokszámú nevezőjénél. A vizsgált hálózat ezért nem reguláris, nem reprezentál rendszert. Hasonló következtetésre jutottunk más megfontolással a 2.4-2.2. pontban (2.4-8. ábra).

Megjegyzendő azonban, hogy mostani megfontolásunk kevésbé általános, mint az állapotváltozós leírásra támaszkodó. Ha ugyanis a rendszer válasza $Y = X$ lenne, akkor $H(z) = -1$, illetve $H(s) = -1$ adódott volna az átviteli függvényre, ami nem abszurd eredmény. Gondolhatjuk ugyanis azt, hogy az elsőfokú átviteli függvény zérusa és pólusa megegyezik, ezért redukálódott. A hálózat állapotváltozós leírása ezzel szemben nem állítható elő, amiből egyértelműen következik, hogy a hálózat nem reguláris.

A példa ezért többek között azt is illusztrálja, hogy a rendszerek és a hálózatok állapotváltozós leírása adja a legmélyebb betekintést tulajdonságaikba és viselkedésükbe. Más kérdés, hogy az állapotváltozós leírás előállítására nincs mindig elegendő információnk. #

4.3-1.4. Az időtartománybeli egyenletek transzformációja

A hálózati egyenletek komplex frekvenciatartománybeli alakja úgy is előállítható, hogy először előállítjuk az időtartománybeli egyenleteket, majd képezzük ezek DI illetve FI Laplace-transzformáltját. A transzformáció során figyelembe vesszük a kiindulási értékeket is, rendszerint a DI Laplace-transzformáció eltolási tételének vagy a FI Laplace-transzformáció differenciálási tételének alkalmazásakor. A komplex frekvenciatartománybeli egyenletek megoldásával előállítható Y kifejezése vagy belépő gerjesztés esetén a H átviteli függvény.

Ezt a módszert korábban már tárgyaltuk arra az esetre, amikor a rendszert leíró egyenletek a rendszeregyenletnek vagy az állapotváltozós leírásnak megfelelő alakúak (4.2-1.2. és 4.2-2.2 pont illetve 4.2-1.3. és 4.2-2.3. pont). A hálózati egyenleteket azonban nem szükséges valamilyen előírt alakra hozni. Ez azt jelenti, hogy az időtartománybeli hálózati egyenletek nem csak az u_i, y_i, x_i és x_i' típusú változókat tartalmazhatják, hanem más változókat is, például egyes erősítők p_i bemeneti változóját.

Belépő gerjesztés esetén ez a módszer nem jelent gyakorlati előnyt az előzőleg tárgyalt „közvetlen" módszerhez képest. Az előző pont utolsó példája azonban rámutat arra, hogy elfajuló esetekben az állítás esetleg nem helytálló. Szigorúan véve ezért először elő kell állítani a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását, és ha ez nem lehetséges, akkor természetesen nem határozzuk meg az átviteli függvényt.

Olyan áthidaló megoldás is elképzelhető, hogy először csak azt ellenőrizzük, hogy reguláris-e a hálózat és csak igenlő válasz esetén végezzük el a transzformációt. Ehhez megkeressük valamennyi memóriamentes hurkot, majd ellenőrizzük, hogy a hurokban lévő erősítések szorzata különbözik-e az 1 értéktől.

Nem belépő gerjesztés esetén az időtartománybeli egyenletek felírásával és transzformálásával megtakaríthatjuk a kiindulási értékeket figyelembe vevő fiktív források bevezetését. Magukat a kiindulási értékeket mindenképpen ki kell előzőleg számítani.

Példa Vizsgáljuk a 3. ábrán (l. előbb) vázolt DI hálózatot. Tekintsük már meghatározottnak az $x_1[0], x_2[0]$ értékeket.

Az időtartománybeli egyenletek (vö. 2.4-2.1. pont 2. példa és 2.4-2. ábra)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 , \\ x_2' &= -a_2 x_1 - a_1 x_2 + u , \\ y &= (b_2 - b_0 a_2) x_1 + (b_1 - b_0 a_1) x_2 + b_0 u . \end{aligned}$$

Ez egyúttal az állapotváltozós leírás is. Képezzük az időtartománybeli egyenletek DI Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} z X_1(z) - x_1[0] z &= X_2(z), \\ z X_2(z) - x_2[0] z &= -a_2 X_1(z) - a_1 X_2(z) + U(z), \\ Y(z) &= \{b_2 - b_0 a_2\} X_1(z) + \{b_1 - b_0 a_1\} X_2(z) + b_0 U(z). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy az előző pont 2. példájában a kiindulási értékeket a fiktív források $U_1(z) = x_1[0] z$ és $U_2(z) = x_2[0] z$ transzformált forrásmennyiségeivel vettük figyelembe, látható, hogy a kétféle módon előállított egyenletrendszer megegyezik, így természetesen a megoldásuk is megegyezik. Az $Y(z)$ kifejezését ezért nem is adjuk meg újra.

Ugyanez vonatkozik a folytonos idejű esetre is, amint arról az Olvasó könnyen meggyőződhet. #

4.3-1.F. Feladatok

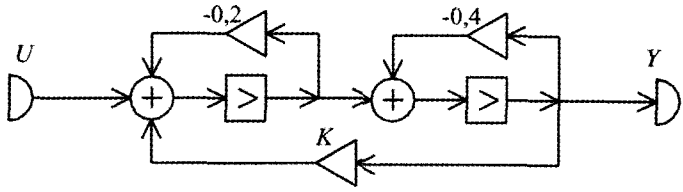
F-1. Határozza meg a 2.4-2.F-1., 2. és 4. feladatban tárgyalt hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényét

(*a*) a komplex frekvenciatartománybeli egyenletek közvetlen felírásával és megoldásával!

(*b*) a DI illetve FI állapotváltozós leírás előállításával majd Laplace-transzformáltjának képzésével!

F-2. Állítsa elő az előző feladatban szereplő hálózatok által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!

F-3. A 6. ábrán látható hálózatban a K erősítés értéke K= –0,32, ha k illetve t negatív és K = –0,02, ha k illetve t nem-negatív (vö. 2.4-2.F-6. feladat). A gerjesztés k illetve t negatív értékeire ismert állandó u^- érték.



4.3-6. ábra Időfüggő erősítőt tartalmazó hálózat, amely variáns (de intervallumonként invariáns) rendszert reprezentál

Határozza meg a rendszert k illetve t nem-negatív értékeire reprezentáló invariáns hálózatot! Fejezze ki az Y transzformált választ az U transzformált gerjesztés és a kiindulási állapot függvényeként!

***F-4.** A 4. ábrán látható, korábban már vizsgált hálózat erősítései olyanok, hogy a $H = Y/U$ *átviteli függvény egyik zérusa megegyezik az egyik pólussal.*

Igazolja, hogy ekkor a $H_1 = Y/U_1$ és a $H_2 = Y/U_2$ átviteli függvények egyikének sincs e helyen pólusa és zérusa!

4.3-1.M. Megoldások

M-1. Mindkét módszerrel a következő átviteli függvények adódnak a DI esetben

2.4-13. ábra: $H(z) = \dfrac{4z^2 + 3z + 0{,}25}{z^2 + 0{,}25z + 0{,}125}$.

2.4-14. ábra: $H(z) = \dfrac{1}{z^2 + 0{,}6z + 0{,}08 - K}$.

2.4-15. ábra: $H(z) = K_0 \dfrac{0{,}5z^2 - 0{,}4z}{z^2 + (0{,}1 + 0{,}4K)K_0 z - 0{,}08K_0}$, $K_0 \equiv \dfrac{1}{1 - 0{,}5K}$; $K \neq 2$.

A FI esetben z helyére s írandó.

M-2. Például a 2.4-13. ábra szerinti hálózatra, az előző feladat megoldását felhasználva közvetlenül felírható, hogy

$$\text{DI:} \quad y + 0{,}25y^{(1)} + 0{,}125y^{(2)} = 4u + 3u^{(1)} + 0{,}25u^{(2)}.$$

$$\text{FI:} \quad y^{(2)} + 0{,}25y^{(1)} + 0{,}125y = 4u^{(2)} + 3u^{(1)} + 0{,}25u.$$

Értelem szerinti a rendszeregyenlet alakja a másik két esetben is.

Ez egy kényelmes módszer a hálózattal reprezentált rendszer rendszeregyenletének előállítására azokban az esetekben, amikor az időtartományban ez egyszrűen nem sikerül.

M-3. A $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve a $t \in \mathbf{R}_-$ intervallumban a hálózat stabilis (az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis). Ebből következően az x_1^-, x_2^- kiindulási értékek értelmezettek. Ezek egyszerűen számíthatók állandó gerjesztés esetén $x_i'[k] = x_i^-$ illetve

$x_i'(t)=0$ felhasználásával. A $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve a $t \in \mathbf{R}_-$ intervallumra vonatkozó állapotváltozós leírás megoldásával (esetleg ennél is egyszerűbb megfontolás alapján) kapjuk, hogy $x_1^-[k]=0{,}7\,u^-$, $x_2^-[k]=0{,}5\,u^-$, illetve $x_1^-(-0)=-10\,u^-, x_2^-(-0)=-25\,u^-$. A válasz kifejezése a komplex frekvenciatartományban

$$Y(z)=\frac{U(z)+\{-0{,}5\,z^2+0{,}6\,z\}\,u^-}{z^2+0{,}6\,z+0{,}1}; \quad U(z)=\mathscr{Z}\{u[k]\}.$$

$$Y(s)=\frac{U(s)+\{25\,s-5\}\,u^-}{s^2+0{,}6\,s+0{,}1}; \qquad U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}.$$

Ebből $u^-=0$ helyettesítéssel kiadódik az átviteli függvény is.

Ha a hálózat negatív időkre nem stabilis, akkor a feladat értelmetlen, a nem azonosan zérus gerjesztéshez nem tartoznak értelmes kiindulási értékek.

***M-4.** Fejezzük ki a nevezőt és a számlálót gyöktényezős alakban. A diszkrét idejű esetet tekintve

$$z^2+a_1\,z+a_2=(z-c)(z-q_1), \qquad b_0\,z^2+b_1\,z+b_2=b_0\,(z-c)(z-s_1).$$

Itt c jelöli a nevező és a számláló közös nullahelyét. Ebből következik, hogy $a_1=-q_1-c$, $a_2=q_1\,c$ és $b_1=-b_0\,(s_1+c), b_2=b_0\,s_1\,c$. Ezek után könnyű már belátni, hogy az $U_1(z)$ és az $U_2(z)$ együtthatójának nem csak a nevezője, hanem a

$$G_1(z)=(b_2-a_2\,b_0)z+(a_1b_2-a_2\,b_1),$$
$$G_2(z)=(b_1-a_1b_0)z+(b_2-a_2b_0)$$

számlálója is tartalmaz $(z-c)$ gyöktényezőt, tehát ezzel egyszerűsíthetünk. Ebből következik, hogy a $q_2=c$ pólus nem fogja befolyásolni a válasz kifejezését - éspedig sem a gerjesztés vonatkozásában, sem a kiindulási értékek vonatkozásában.

Folytonos idejű esetben a z változó helyére s változó írandó, egyébként az állítások nem változnak.

A 4. feladattal kapcsolatban érdemes néhány kiegészítő megjegyzést tenni.

A vizsgált hálózatra vonatkozó állítás érvényes tetszőleges struktúrájú hálózatra is: ha az eredeti átviteli függvény redukálható, akkor a korábbi gerjesztés hatását figyelembe vevő forrásokra vonatkozó átviteli függvények is redukálhatók. Utóbbiak esetleg akkor is redukálhatók, ha az eredeti átviteli függvény nem redukálható. Ebből következik, hogy ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor ez nem csak belépő gerjesztések esetén igaz, noha a megállapítást a redukált átviteli függvény pólusainak vizsgálata alapján tettük.

Mindez szemléletesen úgy értelmezhető, hogy minden folyamat egyszer elkezdődött, vagyis a gerjesztés valamilyen időpontban belépő volt. Mivel az átviteli függvénynek a c helyen nincs pólusa, annak hatása nem jelentkezhet a későbbi (általunk önkényesen pozitív idejűnek választott) folyamatban. Mindez azonban csak akkor igaz, ha a rendszer és a rendszert reprezentáló hálózat invariáns, tehát például negatív és pozitív időkre is megegyező tulajdonságú.

A feladat által megfogalmazott állítás nem általános érvényű, határozottan a kiindulási értékeket figyelembe vevő források hatásáról van szó.

Ha sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer átviteli függvény mátrixának egyes elemei redukálhatók, az nem jelenti azt, hogy más elemei ugyanúgy (vagy egyáltalában) redukálhatók. A sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer viszont csak akkor GV stabilis, ha

átviteli függvény mátrixának (vagyis a mátrix minden rendezőjének) valamennyi pólusára $|q_i|<1$ illetve $\mathcal{R}e\{p_i\}<0$ teljesül.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a rendszer és a rendszert reprezentáló hálózat nem invariáns. Szorítkozzunk a következő speciális eset vizsgálatára.

A hálózat mind negatív, mind pozitív időkre invariáns, de a $k=0$ illetve a $t=0$ időpontban struktúrája vagy az erősítései ugrásszerűen megváltoznak (l. a 3. feladatot). Ilyenkor az állapotváltozók kiindulási értéke között általában nincs olyan kapcsolat, amely az átviteli függvényben egyes gyöktényezők egyszerűsítését lehetővé tenné. Ekkor az átviteli függvény pólusai alapján gerjesztés-válasz stabilis rendszer nem feltétlenül aszimptotikusan stabilis. Ez abban nyilvánulhat meg, hogy korlátos gerjesztés hatására nem feltétlenül korlátos válasz adódik, mert a negatív időkben fellépő gerjesztés által létrehozott gerjesztés hatására a kiindulási értékek nem nulla értékűek, és az ezekre vonatkozó „átviteli függvény" pólusai nem feltétlenül elégítik ki a stabilitási követelményt.

Nincs szó ellentmondásról, hiszen tulajdonképpen egy variáns rendszert reprezentáló hálózatot vizsgáltunk, amire a Laplace-transzformáció módszere általában nem is alkalmas. Inkább az a meglepő, hogy a rendszerre mégis tudunk ennek a módszernek az alkalmazásával hasznos megállapításokat tenni.

Mint már korábban is hangsúlyoztuk, a gerjesztés-válasz stabilitás és az aszimptotikus stabilitás csak kivételesen tér el egymástól, az átviteli függvény vagy a kiindulási értékekre vonatkozó átviteli függvény csak kivételesen redukálható. Ha ilyen eset mégis előfordul, akkor alapos további vizsgálatra van szükség annak eldöntésére, hogy mindez mit jelent a modellezett objektumra nézve.

4.3-2. Az átviteli függvény realizálása

4.3-2.1. A realizációs feladat

Az előző szakaszban az ismert hálózati reprezentációval bíró rendszer átviteli függvényének számítását tárgyaltuk. Ebben a szakaszban az inverz feladat megoldásának néhány módszerét ismertetjük.

Az átviteli függvény egy hálózati *realizációja* egy olyan hálózat, amely olyan rendszer reprezentál, amelynek átviteli függvénye a megadott.

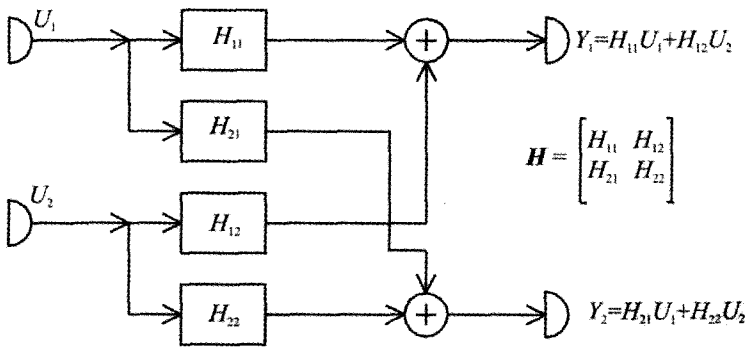
A realizációs feladat megoldása kivételesen egyszerű esetektől eltekintve nem egyértelmű. Az előállított realizációk halmazából kiválaszthatjuk azt, amelyet valamilyen szempontból optimálisnak ítélünk. A továbbiakban olyan realizációk előállítására szorítkozunk, amelyek minimális számú késleltetőt illetve integrátort tartalmaznak. Ezeket *kanonikus* realizációknak nevezzük. Noha ez a tulajdonság nyilván előnyös, nem állítható, hogy minden szempontból optimális hálózatot jelent. Mint később látni fogjuk, sok olyan hálózat van, amelyik ebben az értelemben kanonikus realizáció. Az optimalizálás további szempontjaival (például az átviteli függvény bizonyos paraméterek szerinti érzékenysége) nem foglalkozunk.

További megszorításként csak *racionális* átviteli függvények realizációjával foglalkozunk. Ezek általános alakja (a számláló fokszáma nem lehet nagyobb a nevező fokszámánál, ezért az általánosság megszorítása nélkül a két fokszám egyezőnek választható)

$$H(z)=\frac{b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+b_2 z^{n-2}+\ldots+b_{n-1} z+b_n}{z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_{n-1} z+a_n};$$
$$H(s)=\frac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\ldots+b_{n-1} s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ldots+a_{n-1} s+a_n}. \tag{4.3-8}$$

A következő pontokban két realizációs módszert tárgyalunk a direkt realizációt és a kaszkád realizációt.

Az *átviteli függvény mátrix* realizációja visszavezethető $N_Y \times N_U$ számú átviteli függvény realizációjára. Ennek elvét a 7. ábra szemlélteti $N_Y = N_U = 2$ esetére. Az általánosítás több gerjesztésre és több válaszra kézenfekvő. Ez a fajta realizáció azonban általában nem minimális számú dinamikus komponenst tartalmaz (l. az 1. feladatot!).



4.3-7. ábra Az átviteli függvény mátrix realizálásának egy módja két gerjesztés és két válasz esetén

4.3-2.2. A direkt realizációk

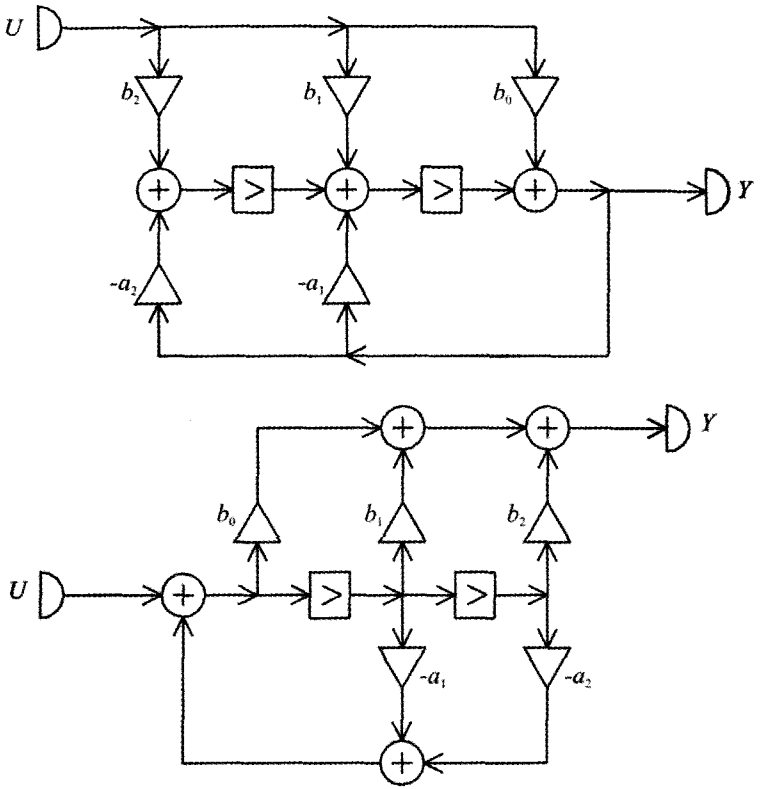
Az átviteli függvény realizálása egyenértékű a rendszeregyenlet realizálásával, amivel a 2.4-3.3. pontban már foglalkoztunk. Az ott vizsgált két kapcsolást $n = 2$ esetére kényelmi okokból a 8. ábrán újra megadtuk. Az általánosítás n nagyobb értékeire nem okoz nehézséget: a felső ábrát logikusan balra, az alsót pedig jobbra egy-egy további dinamikus komponenssel és két-két erősítővel bővítjük.

Az ábrán látható ún. *direkt realizációk* két alapvető tulajdonsága:
(1) a késleltetők illetve az integrátorok száma n (a nevező fokszáma);
(2) mindegyik erősítés az átviteli függvény egy együtthatójával egyezik meg.

Ebből következik, hogy az erősítők száma megegyezik a nem nulla együtthatók számával, a +1 és többnyire a −1 értékű erősítések megvalósításához a gyakorlatban többnyire nincs szükség erősítőre.

Úgy tűnhet, hogy a kitűzött feladatot ezzel meg is oldottuk, legfeljebb a két direkt realizáció között kell választani.

Itt nem részletezett gyakorlati szempontokat is figyelembe véve azonban a direkt realizációk nem optimálisak, ha az n fokszám nagy. Ilyenkor például kaszkád realizációt célszerű használni (l. a következő pontot). Léteznek más realizációs eljárások is, de ezeket nem tárgyaljuk.



4.3-8. ábra Az átviteli függvény két direkt realizációja $n = 2$ esetén

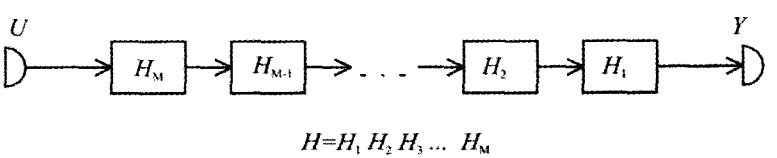
4.3-2.3. Kaszkád realizáció

Nagy fokszámú átviteli függvény realizációját különféle, itt nem részletezett okokból gyakran kisebb fokszámú átviteli függvényeket realizáció egyszerűbb hálózatok összekapcsolásával célszerű megoldani. A legfontosabb ilyen módszert, a kaszkád realizációs eljárást mutatjuk be ebben a pontban.

Bontsuk fel az adott $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényt M számú tényező szorzatára:

$$H = H_1 H_2 \cdots H_M . \tag{4.3-8}$$

Ha minden H_i átviteli függvényt realizáltunk egy hálózattal, akkor H realizálható az egyes hálózatok *kaszkád kapcsolásával,* amint azt a 9. ábra mutatja.



4.3-9. ábra Az átviteli függvény kaszkád kapcsolású hálózati realizálása

A racionális átviteli függvény tényezőkre bontott alakja egyszerűen előállítható, ha ismerjük az átviteli függvény $z=q_i$ illetve $s=p_i$ pólusait és $z=s_i$ illetve $s=z_i$ zérusait. Ha q_λ vagy p_λ egy komplex pólus, akkor jelölje konjugáltját $q_{\lambda+1}$ illetve $p_{\lambda+1}$. Ha q_λ vagy p_λ egy valós pólus, akkor $q_{\lambda+1}$ vagy $p_{\lambda+1}$ bármelyik további valós pólust jelentheti. Értelem szerinti a jelölés az s_μ illetve z_μ zérusokra is. Értelmezzük a következő másodfokú átviteli függvényeket:

$$H_i(z)=\frac{b_{0,\mu}\,z^2+b_{1,\mu}\,z+b_{2,\mu}}{z^2+a_{1,\lambda}\,z+a_{2,\lambda}};$$
$$H_i(s)=\frac{b_{0,\mu}\,s^2+b_{1,\mu}\,s+b_{2,\mu}}{s^2+a_{1,\lambda}\,s+a_{2,\lambda}}. \tag{4.3-9}$$

A nevező a $(z-q_\lambda)(z-q_{\lambda+1})$ illetve $(s-p_\lambda)(s-p_{\lambda+1})$ gyöktényező szorzata. A számláló lehet két gyöktényező szorzata, egyetlen gyöktényező vagy 1, mindegyik szorozva egy állandóval. Az átviteli függvény felbontása ilyen tényezőkre akkor lehetséges, ha $z = 0$ illetve $s = 0$ nem pólus és ha n páros. Egyébként még a következő tényezőkre is szükségünk van:

$$H_0(z)=z^{-r};\quad H_1(z)=\frac{b_{0,1}\,z+b_1}{z+a_1};$$
$$H_0(s)=s^{-r};\quad H_1(s)=\frac{b_{0,1}\,s+b_1}{s+a_1}. \tag{4.3-10}$$

Minél nagyobb n, annál többféle szorzatra bontott alak állítható elő. A valós pólusok és zérusok tetszőlegesen csoportosíthatók (vagy kezelhetők külön páratlan n esetén). A másodfokú számlálók és nevezők ugyancsak tetszőlegesen párosíthatók. Elméleti szempontból ezek a felbontások egyenértékűek, gyakorlati szempontokat is figyelembe véve ez nincs feltétlenül így.

A (9) vagy a (10) által megadott minden tényező realizálható a 8. ábrán megadott két kapcsolás egyikével. Itt tehát ismét két lehetőségünk van. A H_0 átviteli függvény r számú késleltető illetve integrátor kaszkád kapcsolásával realizálható. Nem kell másodfokú tényezőkhöz ragaszkodni, de elméleti megfontolások és gyakorlati tapasztalatok egyaránt azt mutatják, hogy ez a legkedvezőbb választás.

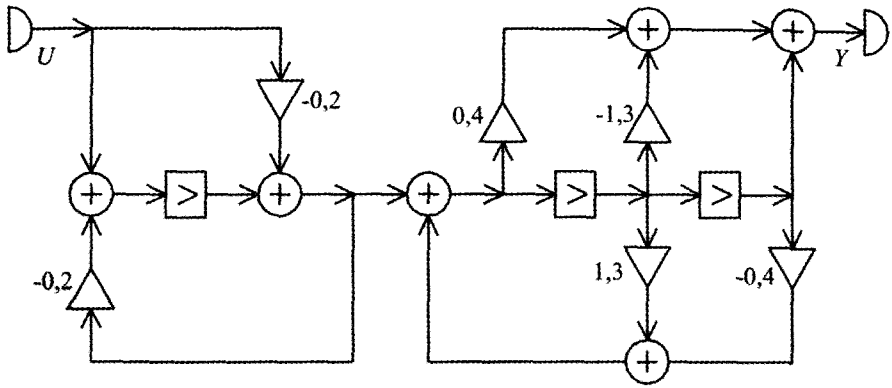
Példa Határozzuk meg annak a DI mindenáteresztő rendszernek egy hálózati realizációját, amelynek átviteli függvénye

$$H(z)=-0{,}08\frac{(z-5)(z-2)(z-1{,}25)}{(z-0{,}2)(z-0{,}5)(z-0{,}8)}.$$

Válasszuk az elsőfokú és a másodfokú tényezőt a következőképpen:

$$H_1(z)=-0{,}2\,\frac{z-5}{z-0{,}2}=\frac{-0{,}2\,z+1}{z-0{,}2},$$
$$H_2(z)=0{,}4\,\frac{(z-2)(z-1{,}25)}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)}=\frac{0{,}4\,z^2-1{,}3\,z+1}{z^2-1{,}3\,z+0{,}4}.$$

Mindkettő mindenáteresztőt ír le, de a tényezőkre bontás másként is elvégezhető. A kiemelt együtthatókat úgy választottuk, hogy a végső alakban két együttható is 1 értékű legyen, mert ez egyszerűsíti a realizációt. Egy lehetséges realizáló hálózat látható a 10. ábrán. Ez a hálózat 3 késleltetőt és 6 erősítőt tartalmaz.



4.3-10. ábra Mindenáteresztő DI rendszer egy kaszkád kapcsolású hálózati realizációja

Az Olvasóra bízzuk egyrészt egy másféle szorzatra bontáshoz tartozó, másrészt egy direkt realizáció számítását és a kapcsolás megrajzolását. #

4.3-2.F. Feladatok

A terjedelem csökkentése érdekében nem adunk olyan triviális feladatokat, amikor az adott átviteli függvénynek meg kell határozni különféle felbontását és ennek alapján megrajzolni a hálózati realizációt vagy realizációkat. Ilyeneket az Olvasó magának is kitalálhat.

Az viszont kívül esik a kereteinken, hogy a realizációk közül kiválasszunk optimálist vagy optimálisakat, pedig ez jelentené az igazi feladatot. Még azt sem könnyű általánosan megfogalmazni, hogy milyen kritériumok alapján nevezhetünk egy realizációt előnyösebbnek egy másiknál.

F-1. A kaszkád realizációban minden tényező több komplex pólust és zérust realizálhat, de ezeknek konjugált párt kell alkotnia. Ugyanez vonatkozik a párhuzamos realizáció pólusaira. Adja meg ennek a megkötésnek az okát!

***F-2.** Adjon direkt realizációt olyan sok gerjesztésű, sok válaszú rendszerre, amelyre az átviteli függvény mátrix minden elemének ugyanaz a nevezője, amelynek fokszáma n, de eltérő a számlálója! Vizsgálja azt az esetet, amikor a rendszernek

(*a*) csak egyetlen válasza, de sok gerjesztése van.

(*b*) csak egyetlen gerjesztése, de sok válasza van.

(*c*) egynél több gerjesztése és egynél több válasza van.

(Útmutatás. Az első két esetben n számú, az utolsó esetben ennél több késleltetőre vagy integrátorra van szükség.)

4.3-2.M. Megoldások

M-1. Egy konjugált pár nélküli komplex pólus vagy zérus realizálása komplex erősítést igényelne, párokba rendezve viszont a realizáció valós erősítéssel megoldható.

***M-2.** (*a*) Tekintsük a 8. ábra felső hálózatát. Mindegyik U_i gerjesztést kapcsoljuk olyan erősítők bemenetére, amelyek erősítése $b_{i,n}, b_{i,n-1}, \ldots, b_{i,0}$. Az azonos második indexű erősítők kimenetét összegezzük abban a csomópontban, amelyhez a 8. ábra szerinti megfelelő indexű erősítő kimenete kapcsolva van, vagyis ott a $b_r U$ helyett a $b_{i,r} U_i$ változók összege jelenik meg.

(*b*) Tekintsük a 8. ábra alsó hálózatát. Minden késleltető vagy integrátor bemeneti változóját kapcsoljuk olyan erősítők bemenetére, amelyek erősítése $b_{i,0}, b_{i,1}, \ldots, b_{i,m}$. Az azonos r második indexű erősítők kimenetét összegezzük egy csomópontban, ennek a kimeneti változója lesz az indexnek megfelelő Y_r.

(*c*) Kiindulhatunk az (*a*) feladat megoldásából. Minden választ egy másik, egyetlen kimeneti változós hálózat realizál. Annyi ilyen hálózatra van szükség, amennyi a válaszok száma. Kiindulhatunk a (*b*) feladat megoldásából is. Ekkor minden gerjesztés létrehozza valamennyi válasz hozzá tartozó összetevőjét, és ezeket a részválaszokat kell összegezni. Annyi ilyen hálózatra van szükség, amennyi a gerjesztések száma. Az első esetben minden forrást egy elágazó csomóponthoz kell kapcsolni, a második esetben minden válasz egy összegező csomópontból származik. Ha a gerjesztések száma a nagyobb, akkor az első megoldás, ha a válaszok száma a nagyobb, akkor a második megoldás igényel kevesebb késleltetőt vagy integrátort. Ez a realizáció nem kanonikus, mert több dinamikus komponenst tartalmaz, mint az átviteli függvények legnagyobb fokszáma.

4.4. Kapcsolatok folytonos idejű és diszkrét idejű jelek és rendszerek között

A diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek vagy rendszerek között fennálló sokféle kapcsolat közül tárgyalunk kettőt ebben a fejezetben. Ennek során fel fogjuk használni a jelek és rendszerek idő-, frekvencia-és a komplex frekvenciatartománybeli leírását. (Logikusan nem is a 4. rész egy fejezetének, hanem külön résznek kellene tekinteni.)

Ez a fejezet nem csak az utolsó résznek, hanem az általunk feldolgozni kívánt teljes témakörnek is a lezárása.

Az 4.4-1. szakaszban néhány módszert mutatunk arra, hogy miként közelíthető egy folytonos idejű jel, rendszer vagy hálózat diszkrét idejű megfelelőjével. Ennek gyakorlati haszna az, hogy a digitális technika alkalmazásával a diszkrét idejű jelek feldolgozása és a diszkrét idejű hálózatok megvalósítása többnyire hatékonyabb, olcsóbb és megbízhatóbb, mint folytonos idejű megfelelőjük.

Az 4.4-2. szakaszban a mintavételezett jelek leírásmódjait tárgyaljuk az időtartományban, a frekvenciatartományban és a komplex frekvenciatartományban. A mintavételezett jelek olyan folytonos idejű jelek, amelyek a diszkrét idejű jelekre vonatkozó módszerekkel leírhatók. A mintavételezett jelek a gyakorlatban rendszerint digitálisak, de a kvantálás hatását tárgyalásunk során nem vesszük figyelembe.

4.4-1. Szimuláció

4.4-1.1. A feladat megfogalmazása

Ebben a szakaszban a sokjelentésű „szimuláció" szót a következő értelemben használjuk.

> Adott egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer.
> Célunk egy olyan diszkrét idejű rendszer meghatározása, amelynek viselkedése „hasonló" folytonos idejű megfelelőjéhez, vagyis *szimulálja* annak viselkedését.

A szimuláció egyik célja annak felhasználása, hogy egy DI rendszer számítása többnyire egyszerűbb, mint az azonos bonyolultságú FI rendszer számítása. Ebben az értelemben a szimuláció egy speciális közelítési módszer. A FI rendszerek más közelítő megoldási módszerei általában nem vagy csak nagyon körülményesen értelmezhetők szimulációként.

A szimuláció másik célja egy adott rendszert realizáló objektum megvalósítása, ami gyakran egyszerűbb vagy olcsóbb DI kivitelben mint FI kivitelben. A DI rendszer sokszor számok feldolgozását jelenti. A kvantálás természetesen további hibát okoz, ezért a szimuláció hibáját sem érdemes túlságosan csökkenteni. Ennek részletei azonban meghaladják keretünket.

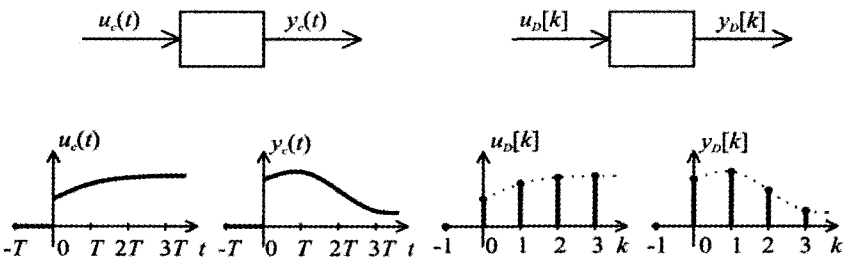
Jelölje az adott FI („continuous") rendszer gerjesztését $u_C(t)$, válaszát $y_C(t)$. Válasszunk egy *T mintavételi periódusidőt*. Ennek szempontjairól még lesz szó. A keresett DI rendszer gerjesztése legyen $u_D[k]=u_C(kT+0)$, vagyis az $u_C(t)$ FI jel mintái a $t=kT$ időpontokban (szakadásos jel esetén a jobb oldali határérték). Megjegyezzük, hogy szakadásos jel esetén más értelmezés is használatos (például a számtani középérték). Az egyelőre ismeretlen szimuláló DI rendszer válaszát jelölje $y_D[k]$.

A szimuláció *ideális*, ha a szimuláló DI rendszer válasza megegyezik a szimulálandó FI rendszer válaszának mintáival, vagyis ha *bármilyen* $u_C(t)$ gerjesztés esetén teljesül, hogy

$$y_D[k]=y_C(kT+0). \tag{4.4-1}$$

Ideális szimuláció csak szélsőségesen egyszerű FI rendszerek (például $y_C(t)=K\,u_C(t)$) esetén valósítható meg. Célunk ezért olyan szimulátor meghatározása, amely bizonyos értelemben optimális és ugyanakkor minél egyszerűbb. A szimuláció alapgondolatát az 1. ábra érzékelteti.

Nyilvánvaló, hogy a szimuláció - egyébként azonos feltételek mellett - annál pontosabb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választunk, vagyis minél nagyobb az $f_s=1/T$ *mintavételi frekvencia*, így az $\omega_s=2\pi/T$ *mintavételi körfrekvencia*. A legnagyobb még elfogadható T értéket (a legkisebb még elfogadható f_s vagy ω_s értéket) egyrészt a FI jelek valamilyen jellegzetes tulajdonsága (például sávszélessége), másrészt a szimulálandó FI rendszer valamilyen jellegzetes tulajdonsága (például sajátértékei, sávszélessége, pólusai) alapján becsülhetjük.



4.4-1. ábra A FI rendszer és a szimuláló DI rendszer gerjesztése és válasza

Megköveteljük, hogy a szimuláció őrizze meg a rendszer *kauzalitását* és *stabilitását*: a szimuláló DI rendszer akkor és csakis akkor legyen kauzális és stabilis, amikor a szimulálandó FI rendszer is ilyen tulajdonságú.

A szimuláció alapvető problémája - mint minden közelítésé - az, hogy mit válasszunk a szimuláció jóságának mértékéül.

A következőkben különféle módszereket ismertetünk, amelyek a lineáris, invariáns, kauzális, folytonos idejű rendszer impulzusválaszán, átviteli karakterisztikáján és átviteli függvényén, állapotváltozós leírásán vagy hálózati reprezentációján alapulnak. Mindegyik szimulációs eljárás optimális a választott leírást és annak választott közelítési elvét tekintve, de többnyire eltérő szimuláló rendszereket eredményezhetnek. Az összehasonlítás érdekében mindegyik eljárást ugyanarra a három egyszerű rendszerre fogjuk alkalmazni.

4.4-1.2. Az impulzusválasz szimulációja

A $h_C(t)$ impulzusválaszú lineáris, invariáns, kauzális, folytonos idejű rendszernek az $u_C(t)$ belépő gerjesztéshez tartozó $y_C(t)$ válaszának kifejezése

$$y_C(t) = \int_{-0}^{t} h_C(\tau) u_C(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Az impulzusválaszt tekintsük a következő alakban adottnak:

$$h_C(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t) f(t),$$

ahol $f(t)$ egy folytonos függvény. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a folytonos idejű $u_C(t)$ gerjesztés függvénnyel leírható, tehát nem tartalmaz Dirac-impulzusos összetevőt. A válasz kifejezése a $t = kT$ $(k \in \mathbf{N})$ időpontban

$$y_C(kT+0) = \int_{-0}^{kT+0} D\,\delta(\tau) u_C(kT+0-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{kT} f(\tau) u_C(kT+0-\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Az első integrál értéke $D\,u_C(kT+0)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$y_C(kT+0) = D\,u_C(kT+0) + \sum_{i=1}^{k} \int_{iT-T}^{iT} f(\tau) u_C(kT+0-\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Közelítsük az integrálokat olymódon, hogy az eredmény összevethető legyen a diszkrét idejű válasz konvolúciós kifejezésével:

$$y_D[k] = \sum_{i=0}^{k} h_D[i] u_D[k-i].$$

A téglalap-szabály alkalmazásával, a $\tau = iT - 0$ pontokra támaszkodva kapjuk, hogy

$$y_C(kT+0) \approx \begin{cases} D\,u_C(+0), & k = 0; \\ D\,u_C(kT+0) + T\sum_{i=1}^{k} f(iT) u_C(kT-iT+0), & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

Az összehasonlítás alapján a következő szimulációs szabályt kapjuk:

$$\boxed{h_C(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t) f(t) \;\Rightarrow\; h_{D1}[k] = D\,\delta[k] + T\varepsilon[k-1] f(kT).} \qquad (4.4\text{-}2)$$

Az 1 index az első közelítési eljárásra utal.

A szimuláló DI impulzusválasz a szimulálandó FI impulzusválasz $kT+0$ időpontbeli mintáit jelenti, kivéve ($D \neq 0$ esetén) a $k = 0$ diszkrét időpontot.

A szimuláló DI rendszer kauzális. Ha a FI rendszer GV stabilis, akkor a szimuláló DI rendszer is GV stabilis. Az utóbbi állítás megfordítása elvileg nem feltétlenül igaz.

Illusztrációként tekintsük a következő FI impulzusválaszt és a (2) szerint hozzá rendelt DI impulzusválaszt:

$$h_C(t) = M\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t \;\Rightarrow\; h_D[k] = M\,\varepsilon[k-1]\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^k \sin(\omega T)k\,. \qquad (4.4\text{-}3)$$

Kielégítő szimuláció biztosításához T úgy választandó, hogy $|\alpha|T \ll 1$ és $\omega T \ll 1$ egyaránt ki legyen elégítve, vagyis $T \ll \alpha^{-1}$ és $T \ll 1/\omega \equiv 1/(2\pi f)$ teljesüljön. Ha azonban $T = \pi/\omega$ értéket választunk (ekkor $T \ll 1/\omega$ T nem teljesül!), akkor $h_D[k] = 0$ adódik. Ekkor a szimuláló rendszer akkor is GV stabilis, ha a szimulálandó rendszer $\alpha \le 0$ esetén nem az. A konkrét esetben természetesen hibás T választása és abszurd az eredmény. A hiba azonban nem annyira nyilvánvaló, ha a megadott függvény csak egy összetevője az impulzusválasznak, amelynek többi összetevője abszolút integrálható. A T mintavételi periódusidőt ezért is gondosan kell megválasztani.

1. példa Legyen a szimulálandó rendszer egy FI *erősítő,* amelynek gerjesztés-válasz relációja $y_C(t) = Ku_C(t)$.

A FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye közvetlenül felírható:

$$h_C(t) = K\,\delta(t),\quad H_C(s) = K.$$

Az impulzusválasz alapján előállított DI szimulátor impulzusválasza és átviteli függvénye a (2) értelmében

$$h_{D1}[k] = K\,\delta[k],\quad H_{D1}(z) = K\,.$$

A szimulátor független T választott értékétől. A szimuláció hibamentes.

Ezek az eredmények várhatóak voltak. #

2. példa Legyen a szimulálandó rendszer egy FI *integrátor,* amelynek gerjesztés-válasz relációja $y_C(t) = \int_{-\infty}^{t} u_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

A FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye közvetlenül felírható:

$$h_C(t) = \varepsilon(t),\quad H_C(s) = \frac{1}{s}\,.$$

A DI szimulátor impulzusválasza (2) értelmében és az ebből számított átviteli függvénye

$$h_{D1}[k] = T\,\varepsilon[k-1],\qquad H_{D1}(z) = T\,z^{-1}\frac{z}{z-1} \equiv T\,\frac{1}{z-1}\,.$$

A szemlélet alapján a $h_{D1}[0] = 0$ érték nem egyértelműen optimális közelítés.

Mind a FI integrátor, mind annak DI szimulátora kauzális rendszer.

A FI integrátor nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van (átviteli függvényének egyetlen pólusa a képzetes tengelyre esik). Ugyanez igaz DI szimulátorára is (átviteli függvényének egyetlen pólusa az egységsugarú körön van). #

3. példa Legyen a vizsgált FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye

$$h_C(t) = \alpha\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t},\qquad H_C(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}\,.$$

A DI szimulátor (2) szerinti impulzusválasza és ebből számított átviteli **függvénye**

$$h_{DI}[k]=\alpha T\,\varepsilon[k-1]\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^k,\quad H_{DI}(z)=\frac{\alpha T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}.$$

Mind a FI rendszer, mind a DI szimulátora kauzális.

A FI rendszer GV stabilis, ha $\alpha>0$. Ekkor és csakis ekkor a szimuláló DI rendszer is stabilis (átviteli függvényének egyetlen $z_1=\exp(-\alpha T)$ pólusa éppen ekkor az egységsugarú körön belüli). Ha a rendszerek GV stabilisak, akkor értelmezett átviteli karakterisztikájuk és amplitúdó-karakterisztikájuk:

$$H_C(\mathrm{j}\omega)=\frac{\alpha}{a+\mathrm{j}\omega},\qquad K_C(\omega)=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}};$$

$$H_D\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)=\frac{\alpha T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}-\mathrm{e}^{-\alpha T}},\qquad K_D(\vartheta)=\frac{\alpha T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2\alpha T}-2\,\mathrm{e}^{-\alpha T}\cos\vartheta}}.$$

Az amplitúdó-karakterisztika grafikonját később adjuk meg (3. ábra) a más úton kapott szimuláló amplitúdó-karakterisztikákkal együtt.

E példa eredménye alapján részlettörtekre bontással elő tudjuk állítani bármely olyan FI rendszer DI szimulátorát, amelyre a $H_C(s)$ átviteli függvény racionális és pólusai egyszeresek. #

4.4-1.3. Az átviteli függvény szimulációja

Tekintsük adottnak egy kauzális FI rendszer $H_C(s)$ átviteli függvényét. Célunk a DI szimuláló rendszer olyan $H_D(z)$ átviteli függvényének előállítása, hogy *bármilyen frekvenciájú* szinuszos gerjesztésre a szimuláció hibamentes legyen, vagyis a szimulátor gerjesztett válasza egyezzék meg a FI rendszer gerjesztett válaszának mintáival.

A FI gerjesztés és a mintái által meghatározott DI gerjesztés komplex alakja

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Rightarrow u_D[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega kT},\ \text{vagyis}\ u_D[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta k}\Big|_{\vartheta=\omega T}.$$

A válasz gerjesztett összetevőjének kifejezése komplex alakban

$$y_C(t)=H_C(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\quad y_D[k]=H_D\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega Tk}.$$

Ezek (pontosabban ezek valós része) csak akkor jelentik az állandósult választ, ha a rendszer GV stabilis. Ez azonban nem befolyásolja további megfontolásainkat.

A szimuláció ideális, ha $y_D[k]=y_C(kT)$ teljesül. Ennek feltétele

$$H_D\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)=H_C(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=\vartheta/T}\ \Rightarrow\ H_D(z)=H_C(s)\Big|_{s=T^{-1}\ln z}. \tag{4.4-4}$$

A második alak a $\mathrm{j}\omega=s$, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}=z$ helyettesítéssel adódott.

Ez az eredmény ellentétes azon korábbi kijelentésünkkel, hogy ideális szimuláció csak kivételesen lehetséges. Az ellentmondás oka az, hogy nem tettünk megszorítást az átviteli függvények matematikai alakját illetően. Az integrátor szimulátorának átviteli függvényére például $H_C(s)=1/s$ felhasználásával $H_D(z)=T/\ln z$ adódik, vagyis a DI átviteli függvény nem racionális, a $z=0$ helyen lévő szingularitása nem pólus.

Szorítkozzunk a továbbiakban *racionális* $H_C(s)$ átviteli függvényre és követeljük meg, hogy ekkor a szimulátor $H_D(z)$ átviteli függvénye is *racionális* legyen. Ez azt jelenti, hogy az előzőleg kapott $s = T^{-1} \ln z$, $z = e^{sT}$ változó-transzformációnak egy olyan racionális közelítését keressük, amely a $\mathcal{R}e\{s\} < 0$ bal félsíkot a stabilitási tulajdonság megőrzése érdekében átviszi a $|z| < 1$ egységsugarú kör belsejébe. Meg fogjuk mutatni, hogy az ún. *bilineáris transzformáció*

$$s = \frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+(sT/p)}{1-(sT/p)}; \quad 0 < p \le 2 \tag{4.4-5}$$

rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ha ugyanis $s = j\omega$, akkor $z = e^{j\vartheta}$, tehát

$$j\omega = \frac{p}{T}\frac{e^{j\vartheta}-1}{e^{j\vartheta}+1} = \frac{p}{T}\frac{e^{j\vartheta/2}-e^{-j\vartheta/2}}{e^{j\vartheta/2}+e^{-j\vartheta/2}} = \frac{p}{T}\, j\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

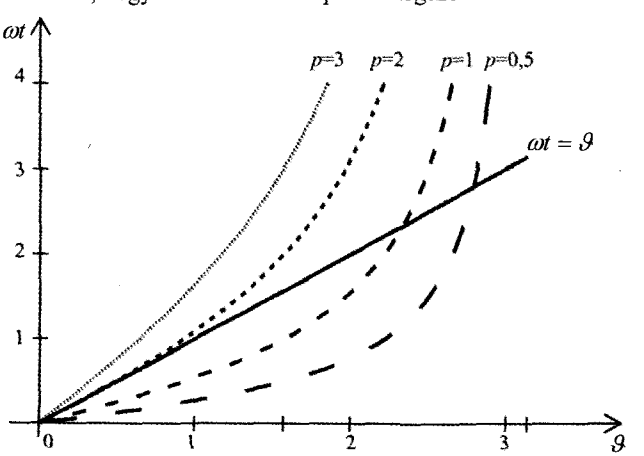
Az s-sík képzetes tengelyét a transzformáció átviszi a z-sík egységsugarú körébe és

$$\omega = \frac{p}{T}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega T}{p}; \quad 0 < p \le 2. \tag{4.4-6}$$

A körfrekvenciák kapcsolatát szemlélteti a 2. ábra a p néhány értékére. Az ideális szimulációt jelentő $\omega = \vartheta / T$ kapcsolat bármilyen előírt ω_p, ϑ_p párra biztosítható

$$p = \frac{\omega_p T}{\mathrm{tg}(\vartheta_p/2)}, \quad 0 \le \vartheta_p < \pi \tag{4.4-7}$$

választással. Ha például egy sávszűrő vagy egy sávzáró szimulációja a feladat, akkor ω_p a sáv közepe és ϑ_p egy szabadon választható érték. Ha nincs speciális ω_p körfrekvencia, akkor $\omega_p = 0$, $\vartheta_p = 0$ a szokásos választás, amihez a $p = 2$ érték tartozik. Ekkor az $\omega = 0$ helyen nem csak a függvény értéke, hanem még meredeksége is a kívánt. A 2. ábrából az is látható, hogy miért indokolt a $p \le 2$ megszorítás.



4.4-2. ábra A FI és a DI körfrekvencia kapcsolata a komplex frekvenciák bilineáris transzformációja esetén

Az igazoláshoz legyen s valós és $z = 1 + \zeta$ (ζ kis valós érték). Az (5) értelmében

$$s = \frac{p}{T}\frac{(1+\zeta)-1}{(1+\zeta)+1} \approx \frac{p}{2T}\zeta .$$

Mivel a stabilitási határegyenestől balra fekvő pontnak ($s < 0$) a stabilitási határkör $z = 1$ pontjától balra fekvő pont ($\zeta < 0$) felel meg, ezért a bal félsík az egységsugarú kör belsejébe megy át, amint állítottuk.

Foglaljuk össze eredményünket.

A racionális $H_C(s)$ folytonos idejű átviteli függvényhez bilineáris transzformációval egy szimuláló $H_{D2}(z)$ diszkrét idejű átviteli függvényt rendelünk:

$$H_{D2}(z) = H_C(s)\big|_{s=s(z)}, \quad s(z) = \frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1}, \quad 0 < p \le 2 . \tag{4.4-8}$$

A $H_{D2}(z)$ átviteli függvény racionális, a szimuláció megőrzi a stabilitási tulajdonságot és a kauzalitást. Az átviteli karakterisztikák kapcsolata

$$H_{D2}(e^{j\vartheta}) = H_C(j\omega)\big|_{\omega=\omega(\vartheta)}, \quad \omega(\vartheta) = \frac{p}{T}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \quad 0 < p \le 2 . \tag{4.4-9}$$

A szimuláció az ω_p illetve a ϑ_p körfrekvenciájú szinuszos jelre ideális ha $p = \omega_p T / \operatorname{tg}(\vartheta_p / 2)$ választással élünk. A szokásos $p = 2$ választás a kisfrekvenciás tartományban ($\omega = 0$, $\vartheta = 0$ környezetében) biztosít jó szimulációt.

A bilineáris transzformáció a FI és a DI átviteli függvények pólusainak és zérusainak kapcsolatát is megadja. Ebből következik, hogy ez a szimuláció egy FI minimálfázisú rendszert DI minimálfázisú rendszerbe visz át, továbbá (mivel $s_2 = -s_1^*$ esetén $z_2 = 1/z_1^*$) egy FI mindenáteresztőt DI mindenáteresztőbe visz át. Más szimulációs módszerek nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Az átviteli függvény fenti szimulációja kiterjeszthető s-ben nem racionális átviteli függvényre is. A FI késleltetést („holtidőt") kifejező, e^{-sT_i} tényező egyszerűen vehető figyelembe egy z^{-k_i}, $k_i = T_i / T$ tényezővel. Ekkor a T mintavételi periódusidőt úgy kell választani, hogy minden T_i késleltetési idő a T egész számú többszöröse legyen.

1. példa A $H_C(s) = K$ átviteli függvényű FI *erősítő* (8) szerinti szimulátorának átviteli függvénye $H_{D2}(z) = K$. Ez természetesen megegyezik az impulzusválasz szimulációja alapján előzőleg kapott átviteli függvénnyel. #

2. példa A $H_C(s) = 1/s$ átviteli függvényű FI *integrátor* (8) szerinti szimulátorának átviteli függvénye és ebből számított impulzusválasza

$$H_{D2}(z) = \frac{T}{p}\frac{z+1}{z-1}, \qquad h_{D2}[k] = \frac{2T}{p}\left\{\frac{1}{2}\delta[k] + \varepsilon[k-1]\right\}.$$

Ez kissé eltér az előző pont 2. példájában számított szimulátor átviteli függvényétől, illetve impulzusválaszától.

Ha a szokásos $p=2$ választással élünk, akkor $h_{D2}[k]=h_{D1}[k], k\neq 0$; míg $h_{D1}[0]=0$ és $h_{D2}[0]=T/2$. A $h_c(t)=\varepsilon(t)$ FI impulzusválasz a $t=0$ helyen 0-ról az 1 értékre ugrik. Az integrátor második szimulátorának impulzusválasza a szakadási helyen a számtani közepet veszi figyelembe. Ha nem $p=2$ értéket választunk, akkor az első és a második szimulátor impulzusválasza k minden értékére eltérő lesz. #

3. példa Egy FI rendszer átviteli függvénye $H(s)=\alpha/(s+\alpha)$.

E rendszer DI szimulátorának (8) szerinti átviteli függvénye és az ebből számított impulzusválasza $p=2$ választással

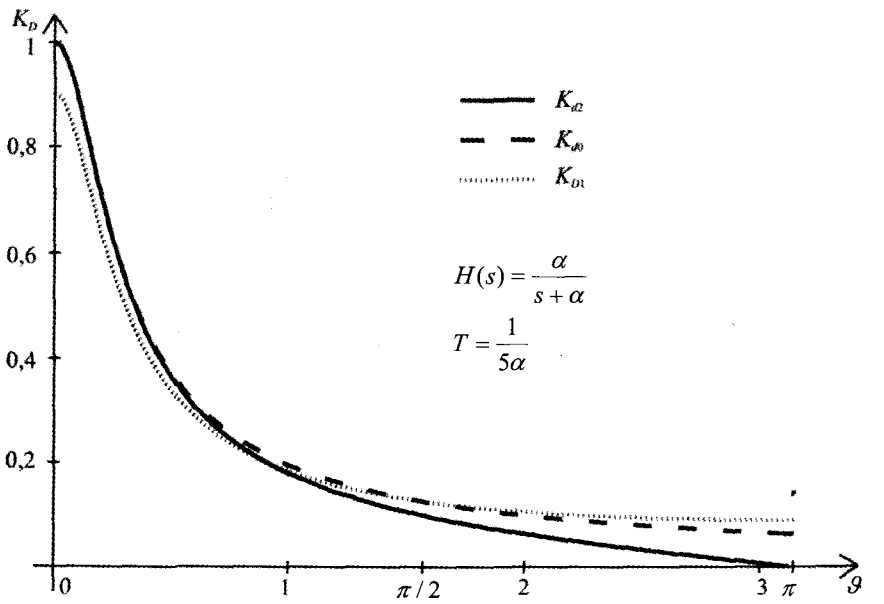
$$H_{D2}(z)=\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+\alpha}=\frac{1-q}{2}\frac{z+1}{z-q},\quad q\equiv\frac{1-(\alpha T)/2}{1+(\alpha T)/2};$$

$$h_{D2}[k]=\frac{(\alpha T)/2}{1+(\alpha T)/2}\delta[k]+\frac{1-q^2}{2}\varepsilon[k-1]q^{k-1}.$$

Ha $|a|T$ elég kicsi, akkor a most és az előzőleg kapott $h_{D1}[k]$ DI impulzusválasz csak kevéssé különbözik, mivel ekkor $e^{-\alpha T}\approx q$. A szimulátor átviteli karakterisztikája és amplitúdó-karakterisztikája $\alpha>0$ esetén

$$H_{D2}(e^{j\vartheta})=\frac{1-q}{2}\frac{e^{j\vartheta}+1}{e^{j\vartheta}-q},$$

$$K_{D2}(\vartheta)=\frac{1-q}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{1+q^2-2q\cos\vartheta}}.$$



4.4-3. ábra Egy FI rendszer három DI szimulátorának és ideális szimulátorának amplitúdó-karakterisztikája

Az összehasonlítás érdekében a 3. ábrán láthatjuk a $K_{D1}(\vartheta)$ és a $K_{D2}(\vartheta)$ amplitúdó-karakterisztika diagramját $T = 1/5\alpha$ választással (a gyakorlatban ennél kisebb T választása indokolt). Az ábrán látható a $K_{D0}(\vartheta) = \alpha T / \sqrt{(\alpha T)^2 + \vartheta^2}$ ideális amplitúdó-karakterisztika is, amely a nem racionális $H_{D0}(z) = \alpha T / (\alpha T + \ln z)$ átviteli függvényhez tartozik.

Az ábrából látható, hogy kis frekvenciákon K_{D2}, míg nagy frekvenciákon K_{D1} jelenti a jobb közelítést. Mielőtt ebből végleges következtetéseket vonnánk le, ne felejtsük el, hogy a fázis-karakterisztikákat is össze kellene az ideálissal hasonlítani a „legjobb" szimulátor kiválasztása során. #

4. példa A $H_D(z) = z^{-1}$ átviteli függvényű DI rendszer a $H_C(s) = \mathrm{e}^{-sT}$ átviteli függvényű FI rendszer, vagyis a FI késleltető ideális szimulátorának tekinthető. Itt T a késleltetési idő és egyben a mintavételi periódusidő is.

Közelítsük a FI átviteli függvényt racionális függvénnyel és adjunk meg ennek alapján kapcsolatokat a z és az s változó között.

Az exponenciális függvény három elsőfokú, az $s = 0$ helyen pontos közelítése

$$(a)\quad z^{-1} = \mathrm{e}^{-sT} \approx 1 - sT \quad \Rightarrow \quad sT = \frac{z-1}{z};$$

$$(b)\quad z = \mathrm{e}^{sT} \approx 1 + sT \quad \Rightarrow \quad sT = z - 1;$$

$$(c)\quad z = \frac{\mathrm{e}^{sT/2}}{\mathrm{e}^{-sT/2}} \approx \frac{1 + (sT)/2}{1 - (sT)/2} \quad \Rightarrow sT = 2\frac{z-1}{z+1}.$$

Az (a) és (b) szerinti transzformációk nem mindig őrzik meg a stabilitási tulajdonságot, a (c) azonban feltétlenül. Ennek ellenére az integrátor (b) szerinti szimulátora megegyezik a impulzusválasz alapján számítottal. A (c) szerinti szimulátor megegyezik a (8) szerintivel $p = 2$ választással. #

*4.4-1.4. Az átviteli karakterisztika szimulációja

Tekintsük adottnak egy GV stabilis FI rendszer $H_C(\mathrm{j}\omega)$ átviteli karakterisztikáját. Tételezzük fel továbbá, hogy a FI rendszer gerjesztése sávkorlátozott, Ω sávkorlátja ismert. A mintavételi tétel értelmében (3.2-1.5. pont) ekkor $T = \pi / \Omega$ (vagy ennél kisebb) mintavételi periódusidő választásával

$$\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = H_C(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega = \vartheta/\pi}; \qquad |\omega| < \Omega \equiv \frac{\pi}{T}, \quad |\vartheta| < \pi \tag{4.4-10}$$

átviteli karakterisztikájú tökéletes szimulátor adódna. A probléma most is az, hogy ha $H_C(\mathrm{j}\omega)$ racionális függvény, akkor $\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ nem racionális függvénye az $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ változónak.

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a szimulátor FIR típusú, tehát biztosan GV stabilis szimulátort keresünk. Ennek átviteli karakterisztikája

$$H_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = c_0 + c_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\vartheta} + \ldots + c_{L-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(L-1)\vartheta}. \tag{4.4-11}$$

Az L számú valós c_p paraméter sokféleképpen megválasztható úgy, hogy $H_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ a $\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ egy (valamilyen értelemben optimális) közelítése legyen. Egy kézenfekvő feltétel a $\left|H_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})-\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\right|^2$ hibafüggvény integráljának minimalizálása. A hibamérték ekkor

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{p=0}^{L}c_p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\vartheta}-\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\right]\left[\sum_{p=0}^{L}c_p\mathrm{e}^{+\mathrm{j}p\vartheta}-\hat{H}_D^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\right]\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=2\pi\sum_{p=0}^{L}c_p^2-\sum_{p=0}^{L}c_p\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta+\int_{-\pi}^{\pi}\hat{H}_D^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right\}+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\right|^2\mathrm{d}\vartheta.$$

Figyelembe véve $\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})$ értelmezését, az első integrálra kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta=T\int_{-\Omega}^{\Omega}H_C(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}pT\omega}\mathrm{d}\omega=2\pi T\,h_C(pT),$$

ahol $h_C(t)$ a FI rendszer impulzusválaszának egy Ω sávkorlátú sávkorlátozott közelítése. A másik integrál ennek konjugáltja, vagyis az előzővel megegyező. A hibamérték kifejezése egyszerű rendezéssel

$$E=2\pi\sum_{p=0}^{L}\left[c_p-T\,h_C(pT)\right]^2-2\pi T\sum_{p=0}^{L}h_C^2(pT)+T\int_{-\Omega}^{\Omega}\left|H_C(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega.$$

Végeredményben a választott hibát minimalizáló együtthatók kifejezését

$$c_p=T\,h_C(pT),\quad p=0,1,2,\ldots,L \tag{4.4-12}$$

adja. A minimális hiba kifejezése

$$E_{\min}=T\int_{-\Omega}^{\Omega}\left|H_C(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega-2\pi\sum_{p=0}^{L}h_C^2(pT). \tag{4.4-13}$$

A sávkorlátozott átviteli karakterisztikából, illetve az átviteli karakterisztika vagy az impulzusválasz sávkorlátozott közelítéséből a c_p együtthatók és a minimális hiba rendszerint csak numerikusan számítható. Elfogadhatóan kis hiba esetleg csak nagy L választásával biztosítható.

Mivel $H_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})$ valós értékű, de $\hat{H}_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})=H_C(\mathrm{j}\Omega)$ többnyire nem az (hacsak nem nulla), ezért célszerű lehet az $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}H_C(\mathrm{j}\omega)$ átviteli karakterisztikát szimulálni, ahol a $\tau>0$ időkésést úgy választjuk, hogy $\mathscr{Im}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\tau}H_C(\mathrm{j}\Omega)\right\}=0$ legyen.

Az átviteli karakterisztika szimulációja IIR rendszerrel bonyolultabb feladat, mert biztosítani kell a szimulátor stabilitását. Ezt a feladatot nem tárgyaljuk.

*4.4-1.5. Az állapotváltozós leírás szimulációja

Tekintsük adottnak egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű egy-válaszú differenciális rendszer állapotváltozós leírását:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_C &= \boldsymbol{A}_C\, \mathbf{x}_C + \mathbf{B}_C\, u_C\,, \\ y_C &= \mathbf{C}_C^{\mathrm{T}}\, \mathbf{x}_C + D_C\, u_C\,. \end{aligned} \tag{4.4-14}$$

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a gerjesztés korlátos véges időkre, tehát nem tartalmaz Dirac-impulzusos összetevőt. Ennek következtében az $\mathbf{x}_C(t)$ állapotvektor folytonos.

Célunk egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű egy-válaszú rendszer

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_D &= \boldsymbol{A}_D\, \mathbf{x}_D + \mathbf{B}_D\, u_D\,, \\ y_D &= \mathbf{C}_D^{\mathrm{T}}\, \mathbf{x}_D + D_D\, u_D\,. \end{aligned} \tag{4.4-15}$$

állapotváltozós előállításában szereplő mátrixok előállítása úgy, hogy ha $u_D[k] = u_C(kT+0)$, akkor $\mathbf{x}_D[k]$, illetve $y_D[k]$ legyenek jó közelítései az $\mathbf{x}_C(kT)$, illetve az $\mathbf{y}_C(kT+0)$ mintáknak. Megköveteljük, hogy a szimuláció őrizze meg a rendszer aszimptotikus stabilitási tulajdonságát.

A FI állapotegyenlet megoldásából következik (2.3-2.9. pont), hogy az állapotvektor egymást követő mintáinak kapcsolata

$$\mathbf{x}_C(kT+T) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_C T}\, \mathbf{x}_C(kT) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_C (kT+T)} \int_{kT}^{kT+T} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}_C \tau}\, \mathbf{B}_C\, u_C(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Közelítsük az integrált a téglalap szabály alapján a $\tau = kT$ pontra támaszkodva:

$$\mathbf{x}_C(kT+T) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_C T}\, \mathbf{x}_C(kT) + T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_C T}\, \mathbf{B}_C\, u_C(kT)\,.$$

A (14) szerinti DI állapotegyenlettel összevetve ebből a DI szimulátor mátrixaira kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}_D = \mathrm{e}^{T\boldsymbol{A}_C}\,, \quad \mathbf{B}_D = T\,\mathrm{e}^{T\boldsymbol{A}_C}\, \mathbf{B}_C\,, \quad \mathbf{C}_D = \mathbf{C}_C\,, \quad D_D = D_C\,. \tag{4.4-16}$$

Az $\boldsymbol{A}_D$ mátrix $\lambda_{D,i}$ sajátértékeinek és az $\boldsymbol{A}_C$ mátrix $\lambda_{C,i}$ sajátértékeinek kapcsolata

$$\lambda_{D,i} = \mathrm{e}^{T\lambda_{C,i}}; \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.4-17}$$

Ebből következik, hogy ez a DI szimulátor megőrzi az FI rendszer aszimptotikus stabilitási tulajdonságát.

Mivel a jó szimuláció biztosításához a mintavételi periódusidőt úgy kell megválasztanunk, hogy $T \ll |\lambda_{C,i}|_{\max}$ teljesüljön, ezért megelégedhetünk az exponenciális mátrixfüggvény sorának első néhány tagjával: $\exp(\boldsymbol{A}T) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T + \boldsymbol{A}^2 T^2/2 + \ldots$.

Igazolni fogjuk, hogy ez a szimulációs eljárás ugyanarra a gerjesztés-válasz kapcsolatra vezet, mint az impulzusválasz szimulálásán alapuló (4.4-1.2. pont). A FI illetve a DI rendszer impulzusválaszának kifejezése az állapotváltozós leírás ismeretében (2.3-2.3. pont)

$$h_C(t) = D_C\,\delta(t) + \varepsilon(t)\mathbf{C}_C^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_C t}\,\mathbf{B}_C\,,$$
$$h_D[k] = D_D\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\mathbf{C}_D^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_D^{k-1}\,\mathbf{B}_D\,.$$

A (2) illetve a (16) értelmében a következő $h_{D1}[k]$, illetve $h_{D3}[k]$ impulzusválasz adódik:

$$h_{D1}[k] = D_C\,\delta[k] + T\varepsilon[k-1]\mathbf{C}_C^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_C kT}\mathbf{B}_C\,,$$
$$h_{D3}[k] = D_C\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\mathbf{C}_C^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}_C (k-1)T}\,T\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_C T}\mathbf{B}_C\,.$$

Látható, hogy a kétféle impulzusválasz valóban megegyezik. Ez nem meglepő, hiszen ugyanazt az integrál-közelítési eljárást alkalmaztuk.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása $(\gamma \neq 0)$

$$x_C' = -\alpha\, x_C + \gamma\, u_C\,, \quad y_C = \frac{\alpha}{\gamma}\, x_C\,.$$

Könnyen belátható, hogy a rendszer átviteli függvénye és impulzusválasza

$$H_C(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}\,, \qquad h_C(t) = \alpha\,\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Az állapotváltozó leírás által meghatározott rendszer (16) szerinti DI szimulátorának állapotváltozós leírása

$$x_D' = \mathrm{e}^{-\alpha T} x_D + \gamma\, T\mathrm{e}^{-\alpha T} u_D\,, \qquad y_D = \frac{\alpha}{\gamma}\, x_D\,.$$

Rövid számolással belátható, hogy ennek a szimuláló DI rendszernek az átviteli függvénye és az impulzusválasza

$$H_D(z) = \frac{\alpha\, T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}}{z - \mathrm{e}^{-\alpha T}}\,, \qquad h_D[k] = \alpha\, T\,\varepsilon[k-1]\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^k.$$

Általános megállapításunkkal összhangban láthatjuk, hogy ez valóban megegyezik a korábban meghatározott $H_{D1}(z)$ átviteli függvénnyel és $h_{D1}[k]$ impulzusválasszal. #

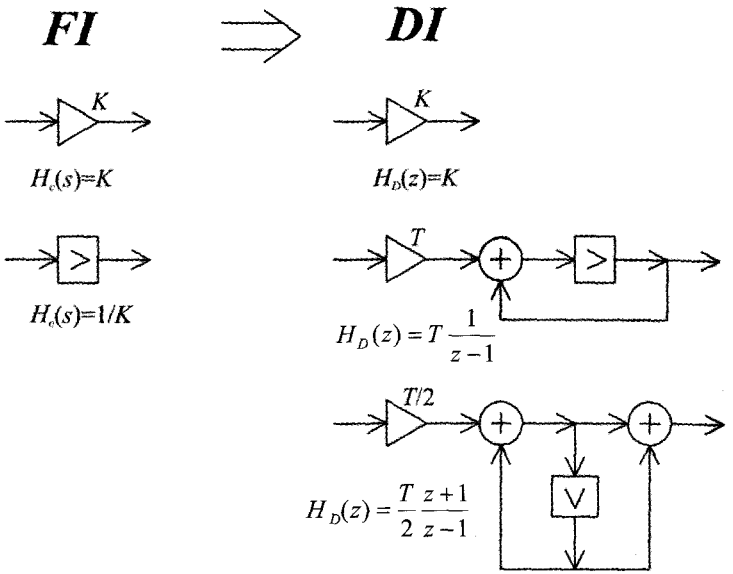
*4.4-1.6. A jelfolyam hálózat szimulációja

Tekintsük adottnak a folytonos idejű rendszert reprezentáló jelfolyam hálózatot. Helyettesítsük ennek minden komponensét DI szimulátorával (ennek módját alább tárgyaljuk). Az így előálló DI hálózat egy olyan DI rendszert reprezentál, amely az eredeti FI rendszer egy szimulátora. A szimuláló hálózat ismeretében meghatározhatjuk a szimulátor impulzusválaszát, átviteli függvényét, állapotváltozós leírását. Ezek általában nem egyeznek meg a más módon előállított szimulátorok megfelelő leírásával.

Tekintsünk először olyan FI hálózatot, amely elemi komponensek összekapcsolásából áll. A FI *erősítő* szimulátora nyilván egy DI *erősítő*, az erősítések megegyeznek. A FI *integrátorra* az előző két pont példáján már meghatároztunk két szimulátort is. Ezek átviteli függvénye és egy-egy hálózati realizációja látható a 4. ábrán. A mintavételi periódusidőtől függő erősítésű erősítő a szimulátor kimeneti oldalára is

kapcsolható. Ez az erősítő összevonható azzal az erősítővel, amely a FI integrátor elé vagy után volt kapcsolva az eredeti hálózatban.

A szimuláló hálózat ugyanannyi dinamikus komponenst és rendszerint ugyanannyi erősítőt tartalmaz, mint az eredeti hálózat.



4.4-4. ábra Az erősítő szimulátora és az integrátor két szimulátora

Az eljárás általánosítható olyan FI jelfolyam hálózatok szimulációjára is, amelyek nem elemi komponensek összekapcsolásából állnak. A FI komponenseket rendszerint $G_C(s)$ átviteli függvényük jellemzi. A szimuláló $G_D(z)$ átviteli függvény az eddig megismert szimulációs módszerek bármelyikével meghatározható. A legkézenfekvőbb a bilineáris transzformáció alkalmazása.

A hálózati reprezentáció szimulációja nem biztosítja a stabilitás megőrzését.

Nem feltétlenül igaz, hogy ha az eredeti hálózat nem tartalmaz memóriamentes hurkot, akkor a szimulátor sem tartalmaz ilyet, ezért előfordulhat, hogy a szimulátor nem reguláris hálózat. Noha ezek a problémák ritkán jelentkeznek, az említett sajátosságok hátrányosak.

Példa Egy FI idejű rendszert az 5. ábra felső részén látható hálózat reprezentál.

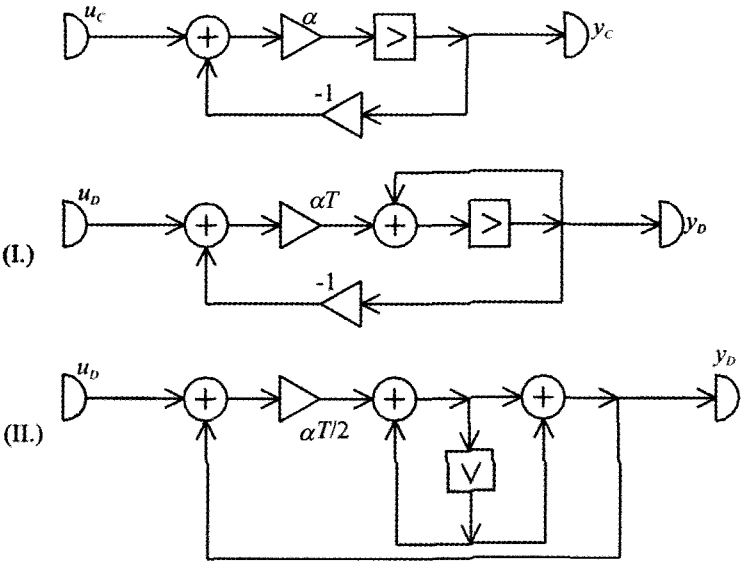
Határozzuk meg a hálózat diszkrét idejű szimulátorát, hasonlítsuk össze az eredeti és a szimuláló hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényét és impulzusválaszát!

A folytonos idejű hálózat azt a $H_C(s)=\alpha/(s+\alpha)$ átviteli függvényű rendszert reprezentálja, amelynek szimulátorait az 4.4-1.2. és 3. pont 3. példájában már meghatároztuk.

Helyettesítsük az integrátort a 4. ábra szerinti egyik vagy másik szimulátorával. Így kapjuk az 5. ábrán látható (I) és a (II) jelű DI hálózatot. Az általuk reprezentált rendszer átviteli függvényére és impulzusválaszára egyszerű számítás után kapjuk, hogy

$$\text{(I)}\ H_D(z)=\frac{\alpha T}{z-(1-\alpha T)},\quad h_D[k]=\alpha T\,\varepsilon[k-1](1-\alpha T)^{k-1}.$$

$$(\mathrm{II})H_D(z)=\frac{a}{1+a}\frac{z+1}{z-q},\qquad h_D[k]=\frac{2a}{1+a}\delta[k]+\frac{a}{(1+a)^2}\varepsilon[k-1]q^{k-1};\ a=\frac{\alpha T}{2},\ q=\frac{1-a}{1+a}.$$



4.4-5. ábra Egy folytonos idejű hálózat és két diszkrét idejű szimuláló hálózata

Az (I) jelű szimulátor hasonló rendszer, mint amelyet az impulzusválasz szimulációjával számítottunk, ha $|\alpha T|$ olyan kicsi, hogy a DI átviteli függvény számlálójában jogos az $e^{-\alpha T}\approx 1$, nevezőjében az $e^{-\alpha T}\approx 1-\alpha T$ közelítés. Az utóbbi állítás vonatkozik az impulzusválaszra is. Ez a szimulátor csak addig őrzi meg a GV stabilitási tulajdonságot, amíg $\alpha T<2$. Valójában $1<\alpha T<2$ esetén sem kapunk elfogadható eredményt, mert ekkor a DI impulzusválasz oszcillál, ami nem tükrözi a FI impulzusválasz viselkedését.

A (II) jelű szimulátor pontosan azt a rendszert jelenti, amelyet az átviteli függvényből bilineáris transzformációval állítottunk elő. Ez a szimulátor ezért megőrzi a GV stabilitási tulajdonságot. Ha $\alpha T<-1$ vagy ha $\alpha T>2$, akkor az impulzusválasz oszcilláló. A DI hálózat egy memóriamentes hurkot tartalmaz, ami hátrányos.

Mivel elfogadható közelítés biztosításához $T \ll 1/|\alpha|$ mintavételi periódusidőt kell választanunk, ezért ebben az egyszerű esetben az említett problémák ténylegesen egyik szimulátornál sem jelentkeznek. #

4.4-1.F. Feladatok

F-1. Az elsőrendű, FI mindenáteresztő rendszer átviteli függvénye és impulzusválasza

$$H_C(s)=\frac{s-\alpha}{s+\alpha},\qquad h_C(t)=\delta(t)-2\alpha\,\varepsilon(t)e^{-\alpha t};\ \alpha>0.$$

Határozza meg e rendszer DI szimulátorának átviteli függvényét és impulzusválaszát

(1) az impulzusválasz szimulációjával!

(2) az átviteli függvény szimulációjával a bilineáris transzformáció felhasználásával!

Megőrzik a DI rendszerek mindenáteresztő tulajdonságot?

F-2. Egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye

$$H_C(s)=\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)(s+\beta)};\quad \alpha>\beta>0.$$

Határozza meg e minimálfázisú rendszer DI szimulátorának átviteli függvényét és impulzusválaszát

(1) az impulzusválasz szimulációjával!

(2) az átviteli függvény szimulációjával a bilineáris transzformáció felhasználásával!

Ha $\gamma>0$, akkor minimálfázisú-e a FI rendszer? Megőrzik a szimuláló DI rendszerek a FI rendszer minimálfázisú tulajdonságát?

F-3. Jelölje egy folytonos idejű rendszer ugrásválaszát, azaz az $u_C(t)=\varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó válaszát $g_C=g_C(t)$, egy diszkrét idejű rendszer ugrásválaszát, azaz az $u_D[k]=\varepsilon[k]$ gerjesztéshez tartozó válaszát $g_D=g_D[k]$.

Valamely FI rendszer egységugrás-ekvivalens szimulátora egy olyan DI rendszer, amelyre $g_D[k]=g_C(kT+0)$, vagyis ugrásválasza a szimulált rendszer ugrásválaszának mintái. Határozza meg az

$$(a)\ H_C(s)=\frac{1}{s}\ \text{(integrátor)}\qquad (b)\ H_C(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

átviteli függvényű FI rendszer egységugrás-ekvivalens DI szimulátorának $H_D(z)$ átviteli függvényét. Hasonlítsa ezt össze az 5.1-1.2. és 3. pontban meghatározott $H_{D1}(z)$ és $H_{D2}(z)$ átviteli függvénnyel!

F-4. Oldja meg az előző feladatot a sebességugrás-ekvivalens szimulátorra, amelynek értelmezése: a szimulátor $u_D[k]=\varepsilon[k]\,T\,k$ belépő, majd lineárisan növekvő gerjesztéshez tartozó válasza megegyezik az $u_C(t)=\varepsilon(t)t$ gerjesztéshez tartozó válasz mintáival.

***F-5.** A szimuláció egy módszere egy célszerű $s=f(z)$ változó-transzformáció alkalmazása az átviteli függvényre. Néhány lineáris törtfüggvény alakú transzformációt tárgyaltuk az 4.4-1.3. pontban, ahol azt állapítottuk meg, hogy az ún. bilineáris transzformáció a legelőnyösebb.

Vizsgálja meg a másodfokú törtfüggvény által létrehozott szimuláció lehetőségét. Biztosítható-e ezzel a lineáris törtfüggvénynél jobb szimuláció?

(Útmutatás. Fogalmazza meg először a transzformáló függvénnyel szemben támasztott követelményeket!)

F-6. Egy folytonos idejű rendszer gerjesztése Ω sávkorlátú. Az átviteli karakterisztikát a sávkorláton belül a következő függvénnyel közelítjük:

$$H_C(\mathrm{j}\omega)=\left[1+\cos 2\pi\frac{\omega}{\Omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau},\quad |\omega|<\Omega,\ \tau>0.$$

(a) Milyen jellegű rendszert ír le az átviteli karakterisztika?

(b) Adja meg a fenti FI rendszer egy (pontos vagy közelítő) szimulátorát!

4.4-1.M. Megoldások

M-1. Egyszerű számítással a következőket kapjuk.

$$(1)\quad h_{D1}[k]=\delta[k]-2\,\alpha\,T\,\varepsilon[k-1]\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^{k};\quad 0<\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha T}<1;$$

$$H_{D1}(z)=1-2\,\alpha\,T\,z^{-1}\,\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\equiv\frac{z-\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}+2\,\alpha\,T\right)}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}.$$

A DI rendszer GV stabilis, de nem mindenáteresztő, mert egyetlen zérusa ugyan az egységsugarú körön kívül helyezkedik el, de nem a pólus reciproka.

$$(2)\quad H_{D2}(z)=q\,\frac{z-q^{-1}}{z-q};\quad q=\frac{1-a}{1+a},\ a=\frac{\alpha\,T}{p},\quad 0<p\le 2;$$

$$h_{D2}[k]=q\,\delta[k]+\left(1-q^{2}\right)\varepsilon[k-1]q^{k-1}.$$

Ez természetesen egy DI mindenáteresztő átviteli függvénye.

M-2. Vezessük be a következő jelöléseket: $a=\mathrm{e}^{-\alpha T}$, $b=\mathrm{e}^{-\beta T}$. Ezekkel

$$(1)\ h_{D1}[k]=T\,\varepsilon[k-1]\left\{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\,a^{k-1}+\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\,b^{k-1}\right\},$$

$$H_{D1}(z)=T\frac{z-c}{(z-a)(z-b)},\ c=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\,b+\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\,a.$$

Ha $\alpha T,\beta T$ és γT elég kicsi, akkor $c\approx 1-\gamma T$, ezért ekkor a DI rendszer is minimálfázisú.

$$(2)\,H_{D2}(z)=\frac{T\,(p+\gamma\,T)}{(p+\alpha T)(p+\beta T)}\,\frac{(z+1)(z-s)}{(z-q_1)(z-q_2)},$$

$$q_1=\frac{1-(\alpha T)/p}{1+(\alpha T)/p},\ q_2=\frac{1-(\beta T)/p}{1+(\beta T)/p},\ c=\frac{1-(\gamma T)/2}{1+(\gamma T)/2};\quad 0<p\le 2.$$

Ez minimálfázisú (de nem szigorúan minimálfázisú) DI rendszert ír le.

M-3. Az ugrásválasz kifejezése az átviteli függvénnyel $g_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\{s^{-1}H_C(s)\}$.

$$(a)\quad g_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2}}\right\}=\varepsilon(t)t;\qquad g_D[k]=\varepsilon[k]T\,k.$$

$$(b)\quad g_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s\,(s+\alpha)}\right\}=\varepsilon(t)\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right];\quad g_D[k]=\varepsilon[k]\left\{1-\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^{k}\right\}.$$

A $H_D(z)$ DI átviteli függvény a

$$\mathscr{Z}\{g_D[k]\}=H_D(z)\frac{z}{z-1}$$

összefüggésből számítható.

$$(a)\ H_D(z)=\frac{z-1}{z}T\frac{z}{(z-1)^2}=T\frac{1}{z-1}\equiv H_{D1}(z).$$

$$(b)\ H_D(z)=\frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\right\}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{\alpha T\,\mathrm{e}^{-\alpha T}}H_{D1}(z).$$

Ha αT elég kicsi, akkor a (b) esetben is közel 1 az arányossági tényező. A $H_{D2}(z)$ átviteli függvénnyel a kapcsolat nem arányosság.

M-4. Az $f_C(t)$ FI sebességugrás-válasz kifejezése az átviteli függvénnyel $f_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\{s^{-2}H_C(s)\}$. Ennek alapján

$$(a)\ f_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{1}{2}\varepsilon(t)t^2.$$

$$(b)\ f_C(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2(s+\alpha)}\right\}=\varepsilon(t)\left[t-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right].$$

Ebből $f_D[k]=f_C(kT)$ már egyszerűen adódik. Ennek ismeretében a DI átviteli függvény a

$$\mathscr{Z}\{f_D[k]\}=H_D(z)\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

összefüggésből számítható.

$$(a)\ H_D(z)=\frac{(z-1)^2}{Tz}\frac{1}{2}T^2\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{Tz+1}{2z-1};$$

$$H_D(z)=H_{D2}(z),\ \text{ha}\ p=2.$$

$$(b)\ H_D(z)=\frac{(z-1)^2}{Tz}\left\{T\frac{z}{(z-1)^3}-\frac{1}{\alpha}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{\alpha}\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}}\right\}=K\frac{z-c}{z-\mathrm{e}^{-\alpha T}},$$

$$K=\frac{-1+\mathrm{e}^{-\alpha T}+\alpha T}{\alpha T}\approx\frac{\alpha T}{2},\quad c=-1+\frac{2}{3}\alpha T.$$

Ez az átviteli függvény közelítőleg egyezik a $H_{D2}(z)$ átviteli függvénnyel.

A 3. és a 4. feladat azt a nyilvánvaló tényt illusztrálja, hogy a szimuláció ideálissá tehető egy konkrét gerjesztés-típusra, de valamely rendszer így adódó szimulátorai csak kivételesen egyeznek meg. Nem lehet általános értelemben optimális szimulátort definiálni.

***M-5.** Az $s=f(z)$ függvénnyel szemben támasztott alapvető követelmények:

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=\mathrm{j}\omega;$$

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})=0;\ f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})=\infty;$$

$$\mathscr{Re}\{f(z),|z|<1\}<0.$$

Szavakban: a z-sík egységsugarú körét képezze le az s-sík képzetes tengelyére úgy, hogy a $z=1$ pont az $s=0$ pontba, a $z=-1$ pont az $s=\infty$ pontba menjen át, a z-sík egységsugarú körének belsejét képezze le az s-sík bal felébe. Meg kell még követelni ω és ϑ szigorúan monoton kapcsolatát is.

Meglepő módon az derül ki, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő másodfokú transzformáció a bilineáris elsőfokú transzformáció. A részletes számításokat az Olvasóra bízzuk.

Ennél bonyolultabb (például harmadfokú) transzformációt már valószínűleg nem is érdemes alkalmazni, mert a szimuláció jóságát valószínűleg nem javítja, de a szimulátor fokszámát nagyon megnöveli.

M-6. *(a)* A rendszer lineáris fázisú aluláteresztő. Tekinthető egy τ idejű késleltető egy közelítésének is. A FI rendszer átviteli karakterisztikájának

$$H_C(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\tau-2\pi/\Omega)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\tau+2\pi/\Omega)}$$

alakjából következik, hogy a rendszer $\tau \geq 2\pi/\Omega$ esetén kauzális.

(b) Mintavételi periódusidőnek $T=\pi/\Omega$ (vagy ennél kisebb érték) választandó. Ekkor $\omega=\vartheta/T=\vartheta\Omega/\pi$ helyettesítéssel

$$H_D\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta(\Omega\tau/\pi)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta(\Omega\tau/\pi-2)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta(\Omega\tau/\pi+2)}.$$

Ez csak akkor vezet racionális átviteli függvényre, ha $\Omega\tau/\pi=m\in\mathbf{Z}_+$ és $m\geq 2$. Erről $H_C(\mathrm{j}\omega)$ értelmezése során kell gondoskodni. Ekkor

$$H_D(z)=\frac{1}{2}z^{-(m-2)}+z^{-m}+\frac{1}{2}z^{-(m+2)}$$

átviteli függvényű szimulátor adódik, amely sávkorlátozott gerjesztés esetén hibamentes szimulációt biztosít.

4.4-2. Mintavételezett jelek

4.4-2.1. A mintavételezett jel fogalma

A folytonos idejű jelek feldolgozásának és továbbításának fontos módszerei alapulnak a jel mintavételezésén. Az információt ekkor a folytonos idejű jelnek a t_k időpontokban felvett értékei, a jel *mintái* hordozzák. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a mintavétel azonos T időközönként történik, tehát $t_k=kT$, ahol T a *mintavételi periódusidő* és k egész szám. A mintavételi időpontok azonban követhetik egymást más szabályosság szerint, sőt véletlenszerűen is, de ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

A gyakorlatban a mintákat rendszerint digitalizálják (kvantálják, diszkrét értékű jellé alakítják át), ezeket dolgozzák fel, továbbítják, majd újabb feldolgozás után rendszerint visszaalakítják folytonos idejű és folytonos értékű jellé. A továbbiakban azonban csak folytonos értékű *mintavételezett jelek* vizsgálatával foglakozunk.

Legyen $x=x(t)$ olyan folytonos idejű jel, amely korlátos véges időkre (ezzel kizárjuk a Dirac-impulzus jelenlétét). Az ehhez rendelt $x_T=x_T(t)$ folytonos idejű jel definíciója (6. ábra)

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & kT\leq t<kT+T_0;\ T_0<T;\ k\in\mathbf{Z};\\ 0, & kT+T_0\leq t<kT+T.\end{cases} \tag{4.4-18}$$

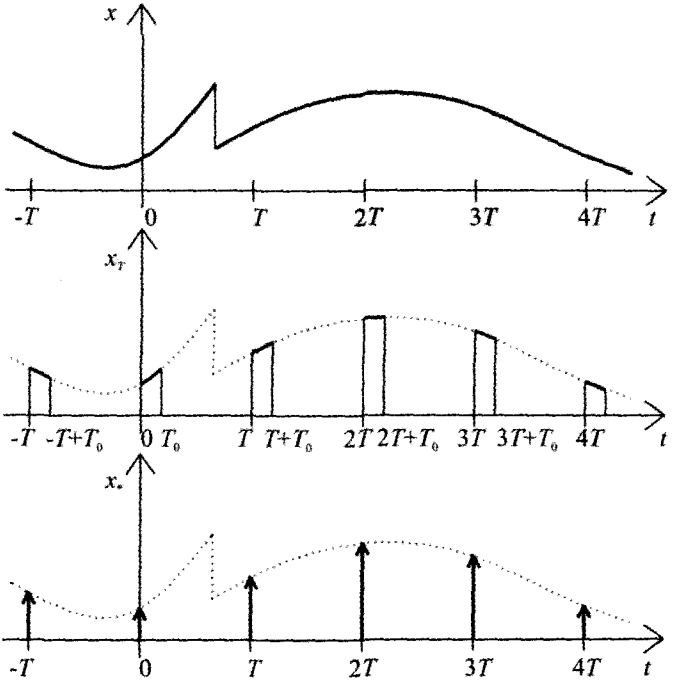
Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a mintavétel T_0 ideje olyan rövid, hogy ezen időtartam alatt $x_T(t)$ állandónak tekinthető. Ennek megfelelően

$$x_T(t) \approx \begin{cases} x(kT+0) \equiv x_D[k], & kT \le t < kT+T_0\,;\ T_0 < T\,;\ k \in \mathbf{Z}\,; \\ 0\,, & kT+T_0 \le t < kT+T\ . \end{cases}$$

A feltételezésünk nem jogos, ha a jel nem folytonos. Ez a megjegyzés azonban mindjárt tárgytalanná fog válni.

További egyszerűsítésként közelítsük a $t_k = k\,T$ helyeken kezdődő rövid és $T_0\,x(kT)$ intenzitású impulzus mindegyikét elhanyagolható hosszúságú és azonos intenzitású impulzusokkal, azaz a $T_0\,x_D[k]\,\delta(t-kT)$ Dirac-impulzussal.

Az így előálló $x_*(t)$ folytonos idejű jel Dirac-impulzusok sorozata (6. ábra), ezt nevezzük az $x(t)$ jel mintavételezett jelének. A mintavétel T_0 idejének nem csak a T mintavételi periódusidőnél kell lényegesen kisebbnek lennie, hanem az olyan időjellegű mennyiségeknél is, amelyek az x jel változási sebességét jellemzik. Ilyen jellemző lehet például a jel sávszélességének reciproka.



4.4-6. ábra Az $x(t)$ folytonos idejű jel, az ehhez rendelt rövid impulzusokból álló $x_T(t)$ jel és az ezt közelítő $x_*(t)$ mintavételezett jel

Az $x(t)$ jel T mintavételi periódusidővel *mintavételezett jele*, az $x_*(t)$ jel értelmezése

$$\boxed{x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,\delta(t-kT);\ \ x_D[k] = x(kT+0),\ \ T_0 << T\,, \qquad (4.4\text{-}19)}$$

ahol T_0 a mintavétel hossza és $x_D[k]$ az $x(t)$ folytonos idejű jel kT időpontbeli mintái által meghatározott diszkrét idejű jel. Ha az $x(t)$ jel folytonos, akkor $x_D[k]=x(kT)$.

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel, az $x_D[k]$ diszkrét idejű jel és az $x^*(t)=x_*(t)/T_0$ úgynevezett „csillagozott jel" ugyanazt a jelet írják le különböző alakban. A két utóbbi jel független a T_0 mintavételi időtől. Mivel $\delta(t)$ reciprok idő dimenziójú, ezért az $x_*(t)$ mintavételezett jel és az $x_D[k]$ diszkrét idejű jel ugyanolyan dimenziójú, mint az eredeti jel és ugyanabban a mértékegységben fejezhető ki, az $x^*(t)$ csillagozott jelre ez nem érvényes.

A mintavételezett jel egy fontos gyakorlati tulajdonsága az, hogy egyetlen csatornán több jel is átvihető. A jel hordozója gyakran elektromos feszültség, ekkor a csatorna távvezetéket vagy kábelt jelent. Legyen például az $x_i(t)$ jelhez rendelt DI jel

$$x_{D,i}[k]=x_i\left(kT+i\frac{T}{N}+0\right);\quad i=0,1,2,\ldots,N-1. \tag{4.4-20}$$

Ha $T_0<T/N$ teljesül, akkor a T intervallumbeli mintákból egyértelműen ki tudjuk választani az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ jelhez tartozót. A továbbiakban csak egyetlen ilyen mintavételezett jellel foglakozunk és nem tárgyaljuk az időosztásos jelátvitel további problémáit. Nem foglakozunk azzal a kérdéssel sem, hogy miként lehet figyelembe venni a mintavételi idő hosszát.

Példa Tekintsük a következő folytonos idejű jelet:

$$x(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Ennek mintavételezett jele a T mintavételi periódusidő és a T_0 mintavételi idő megválasztása után

$$x_*(t)=T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varepsilon(kT+0)\mathrm{e}^{-aTk}\delta(t-kT)=$$
$$=T_0\left\{\delta(t)+\mathrm{e}^{-aT}\delta(t-T)+\mathrm{e}^{-2\alpha T}\delta(t-2T)+\mathrm{e}^{-3\alpha T}\delta(t-3T)+\ldots\right\}.$$

Ha $T=0{,}1/\alpha$ választással élünk, akkor $\mathrm{e}^{-\alpha T}=0{,}9048$. Legyen $T_0=0{,}1T=0{,}01/\alpha$, akkor a jel relatív megváltozása a mintavétel tartama alatt $1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}=0{,}0095\approx 0{,}01$, tehát a választott T_0 idő elég rövidnek tekinthető. #

4.4-2.2. A mintavételezett jel spektruma

Szorítkozzunk olyan $x(t)$ jelre, amelyik abszolút integrálható. Ennek következtében a hozzá rendelt $x_D[k]=x(kT+0)$ diszkrét idejű jel abszolút összegezhető. A jelhez rendelt mintavételezett jel spektruma integrálással számítható:

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}T_0\,x_D\,\delta(t-kT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=$$
$$=T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_D[k]\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_D[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega kT}.$$

A feltételezett konvergencia-tulajdonság miatt a műveletek felcserélése jogos.

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\{x_*(t)\}$ *spektruma* kifejezhető a jelhez rendelt $x_D[k]=x(kT+0)$ diszkrét idejű jel ismeretében:

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_D[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T};\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_D[k]|<\infty. \tag{4.4-21}$$

Az $x_D[k]$ jel $X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=\mathscr{F}\{x_D[k]\}$ spektrumának kifejezése (3.2-1.1. pont)

$$X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_D[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta k};\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_D[k]|<\infty.$$

Ebből következik a folytonos idejű jelhez rendelt mintavételezett jel és diszkrét idejű jel spektrumának kapcsolata :

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=T_0\,X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\big|_{\vartheta=\omega T}. \tag{4.4-22}$$

Ebből következik, hogy az $X_*(\mathrm{j}\omega)$ spektrum periodikus:

$$X_*(\mathrm{j}(\omega+\omega_s))=X_*(\mathrm{j}\omega);\quad \omega_s\equiv\frac{2\pi}{T}. \tag{4.4-23}$$

Az ω_s a mintavételi körfrekvencia. (Ezekre az ω_c jel illetve az órajel körfrekvencia elnevezés is használatos.) Valós értékű $x(t)$ esetén elegendő $X_*(\mathrm{j}\omega)$ ismerete a $0\le\omega<\omega_s/2\equiv\pi/T$ körfrekvenciákra.

Ha $X_*(\mathrm{j}\omega)$ ismert, akkor $x_*(t)=\mathscr{F}^{-1}\{X_*(\mathrm{j}\omega)\}$ inverz Fourier-transzformációval számítható. Ez azonban olyan integrálra vezet, amely nem konvergens a szokásos értelemben. Ez nem is meglepő, hiszen a mintavételezett jel Dirac-impulzusok sorozata. Sokkal kényelmesebb ezért, ha a diszkrét idejű jelet állítjuk elő a DI inverz Fourier-transzformáció segítségével:

$$x_D[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta k}\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega Tk}\,\mathrm{d}\omega.$$

A (22) értelmében a diszkrét idejű jel kifejezhető a mintavételezett jel spektrumával is:

$$x_D[k]=\frac{T}{2\pi T_0}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}X_*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T}\mathrm{d}\omega;\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{4.4-24}$$

Az $x_D[k]$ ismeretében az $x_*(t)$ mintavételezett jel a (19) szerint már meghatározott.

A fentiek újra megmutatják, miként használható a diszkrét idejű leírás folytonos idejű jel jellemzésére.

1. példa Legyen a folytonos idejű jel és spektruma a következő:

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|},\ \alpha>0;\quad X(\mathrm{j}\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Mivel a jel páros, ezért spektruma valós értékű.

Határozzuk meg az x jel mintavételezett jelét és annak spektrumát!

A jelhez rendelt diszkrét idejű jel és annak spektruma $a = \mathrm{e}^{-\alpha T}$ jelöléssel

$$x_D[k] = a^{|k|}, \quad X_D(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\vartheta}; \quad 0 < a < 1.$$

A (19) illetve a (22) értelmében a T periódusidővel mintavételezett jel illetve annak spektruma

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|}\,\delta(t-kT), \quad X_*(\mathrm{j}\omega) = T_0 \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega T}.$$

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel is páros, az $X_*(\mathrm{j}\omega)$ spektruma is valós értékű. #

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(\mathrm{j}\omega)$ spektruma kifejezhető az $x(t)$ eredeti jel $X(\mathrm{j}\omega)$ spektrumának ismeretében. Alább igazolni fogjuk, hogy ha $x(t)$ mindenütt (esetleg a $t = 0$ pont kivételével) folytonos, akkor $\omega_s = 2\pi / T$ jelöléssel

$$\boxed{X_*(\mathrm{j}\omega) = \frac{T_0}{T}\left\{X(\mathrm{j}\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[X(\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)) + X(\mathrm{j}(\omega + n\omega_s))\right]\right\} + \frac{T_0}{2}\lim_{\omega\to\infty}\left[\mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)\right]. \quad (4.4\text{-}25)}$$

Igazolható továbbá, hogy a $t = 0$ hely kivételével folytonos $x(t)$ esetén

$$\lim_{\omega\to\infty}\left[\mathrm{j}\omega\, X(\mathrm{j}\omega)\right] = x(+0) - x(-0), \qquad (4.4\text{-}26)$$

vagyis $x(t)$ ugrása a $t = 0$ helyen. Ha tehát az $x(t)$ jel mindenütt folytonos, akkor a (25) utolsó tagja nem lép fel. Ha $x(t)$ belépő jel, akkor az utolsó tag értéke $x(+0)T_0/2$.

A (25) jelentése a következő. A mintavételezett jel $X_*(\mathrm{j}\omega)$ spektruma előállítható az eredeti jel $X(\mathrm{j}\omega)$ spektrumából annak ismételt eltolásával az ω_s mintavételi körfrekvenciával, és ezen összetevők összegezésével.

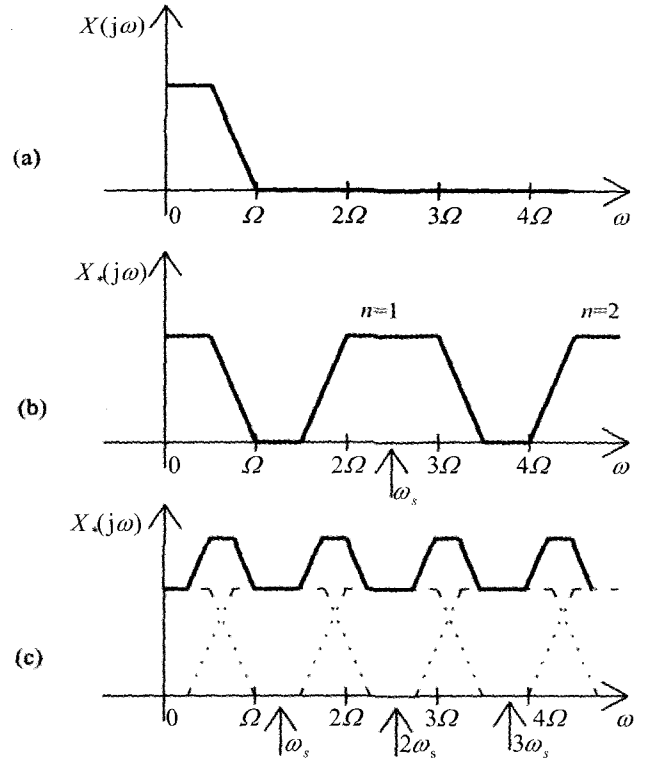
Mivel véges energiájú jel spektrumára $X(\mathrm{j}\omega) \to 0$, ha $|\omega| \to \infty$, ezért az $|\omega| < \omega_s / 2$ intervallumban az $X_*(\mathrm{j}\omega)$ közelíthető a (25) sor első néhány tagjával.

Ha az $x(t)$ *sávkorlátozott* Ω sávkorláttal, akkor $X_*(\mathrm{j}\omega)$ minden frekvencián *véges számú* $X(\mathrm{j}(\omega - n\omega_s))$ típusú tag összege. Ezt szemlélteti a 7. ábra, amelyen a jel spektrumát az áttekinthetőség érdekében valós értékűnek tekintettük.

Ha a mintavétel kellően sűrű – konkrétan $\omega_s \geq 2\Omega$, vagyis $T \leq \pi / \Omega$ esetén – akkor bármely ω körfrekvencián legfeljebb egy tag nem nulla $X_*(\mathrm{j}\omega)$ kifejezésében. Ennek következtében az $|\omega| < \omega_s$ intervallumban $X_*(\mathrm{j}\omega)$ arányos az $X(\mathrm{j}\omega)$ spektrummal. Ezt szemlélteti a 7. ábra középső sora.

A *mintavételi tétel* értelmében a Ω sávkorlátú $x(t)$ jel rekonstruálható az $x_*(t)$ mintavételezett jeléből, ha a mintavételi periódusidő kielégíti a $T \leq \pi / \Omega$, vagyis a mintavételi körfrekvencia kielégíti az $\omega_s \geq 2\Omega$ feltételt.

A mintavételi tétel képlet alakú megfogalmazása:



4.4-7. ábra A sávkorlátozott jel spektruma és mintavételezéssel előállított jel spektrumának előállítása az eredeti jel spektrumából (b) kellően sűrű, illetve (c) nem kellően sűrű mintavétel esetén

$$X(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{T}{T_0}X_*(\mathrm{j}\omega), & |\omega|<\Omega\le\dfrac{\omega_s}{2},\\ 0, & |\omega|>\Omega.\end{cases} \tag{4.4-27}$$

Ez összhangban áll a mintavételi tételnek a 3.2-1.5. pontban megfogalmazott más alakjával.

A 7. ábra alsó sora azt illusztrálja, hogy ha a mintavétel nem eléggé sűrű, akkor az összeadandó spektrumok átlapolódnak és ennek következtében idegen („alias") frekvenciák jelnek meg az *alulmintavételezés* következtében. Ekkor az $X_*(\mathrm{j}\omega_i)$ értékek nem csak a megfelelő $X(\mathrm{j}\omega_i)$ értékektől függnek, hanem az idegen $X(\mathrm{j}\omega_i \pm n\omega_s)$ értékektől is ($n = 1, 2,...$). Nyilvánvaló, hogy ekkor a mintavételezett jelből nem rekonstruálható az eredeti jel, még ha az sávkorlátozott is.

Ha az $x(t)$ jel nem sávkorlátozott, akkor nem rekonstruálható mintavételezett jeléből, a jel spektruma legfeljebb közelítőleg lehet arányos mintavételezett jelének spektrumával az $|\omega|<\omega_s$ intervallumban és erősen különbözik tőle ezen intervallumon kívül.

2. példa Az 1. példában vizsgált jel nem sávkorlátozott, de spektruma nullához tart $\omega \to \infty$ esetén. Válasszunk $T = 1/2\alpha$ vagyis $\omega_s = 4\pi\alpha$ értéket. Ez akkor lenne a mintavételi tételnek megfelelő érték, ha a jel sávkorlátja $\Omega = 2\pi\alpha$ lenne. Tudjuk, hogy

$$\frac{|X(\mathrm{j}\omega)|}{|X(\mathrm{j}\omega)|_{\max}} < \frac{1}{1+(2\pi)^2} \approx 0{,}025, \quad |\omega| > 2\pi\alpha,$$

ezért nem követünk el nagy hibát ilyen mintavételi periódusidő választásával.

A fenti választással a mintavételezett és az eredeti jel spektruma

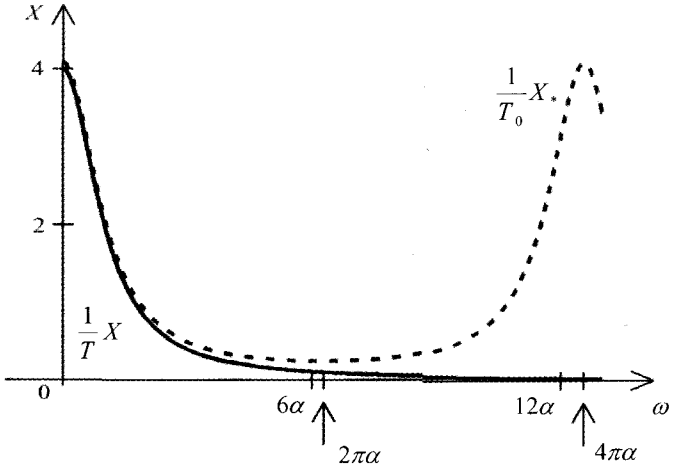
$$X_*(\mathrm{j}\omega) = T_0 \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\dfrac{\omega}{2\alpha}}; \quad a = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}607;$$

$$\frac{T_0}{T} X(\mathrm{j}\omega) = T_0 \frac{4}{1+(\omega/\alpha)^2}.$$

E két függvény grafikonja látható a 8. ábrán. Az utóbbi az $X_*(\mathrm{j}\omega)$ első tagja a (25) szerinti alakban. Láthatjuk, hogy az $|\omega| < \omega_s/2$ intervallumban ez elég jó közelítést jelent.

Ha ehhez még hozzáadjuk a következő két tagot (jobbra és balra tolva $\omega_s = 4\pi\alpha$ körfrekvenciával), akkor ezek görbéje és $X_*(\mathrm{j}\omega)$ görbéje gyakorlatilag egybeesik az $|\omega| < \omega_s/2$ intervallumban.

A példa és a 8. ábra azt illusztrálja, hogy a mintavételezett jel még egy nem sávkorlátozott jelnek is jó közelítése, ha a mintavételi periódusidőt megfelelően választjuk. #



4.4-8. ábra A mintavételezett és az eredeti jel spektruma. Az utóbbi az előbbi egytagú közelítése

Az $x(t)$ jel mintavételezése tekinthető *amplitúdó-modulációs* folyamatnak is. Legyen a $g_*(t)$ periodikus vivőjel Dirac-impulzusok sorozata:

$$g_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \tag{4.4-28}$$

Ez tekinthető a $g(t)=1$ jel mintavételezett megfelelőjének is. Láthatjuk, hogy ha $x(t)$ folytonos jel, akkor az általa modulált $x(t)\cdot g_*(t)$ Dirac-impulzus sorozat

$$x_*(t)=x(t)\,g_*(t) \tag{4.4-29}$$

az $x(t)$ jelnek a (19) szerinti mintavételezett jele.

Ezt felhasználhatjuk (25) igazolásához, vagyis $X_*(\mathrm{j}\omega)$ és $X(\mathrm{j}\omega)$ kapcsolatának előállítására. A (3.2-13) értelmében a $g_D[k]=1$ jel spektruma

$$\mathscr{F}\{1\}=2\pi\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\vartheta-p\,2\pi).$$

A (22) alapján a mintavételezett állandó jel spektruma $\omega_s=2\pi/T$ jelöléssel

$$\mathscr{F}\{g_*(t)\}=T_0\,2\pi\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega T-p\,2\pi)\equiv 2\pi\frac{T_0}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-p\,\omega_s). \tag{4.4-30}$$

A folytonos időbeli szorzásnak a (3.2-41) értelmében frekvenciatartománybeli konvolúció felel meg:

$$\mathscr{F}\{u(t)\,v(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\mathrm{j}\lambda)V(\mathrm{j}(\omega-\lambda))\,\mathrm{d}\lambda.$$

Alkalmazzuk ezt az $x_*(t)=x(t)\,g_*(t)$ jelre:

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\{x(t)\,g_*(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}(\omega-\lambda))\,2\pi\frac{T_0}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-p\,\omega_s)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ebből következik, hogy

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=\frac{T_0}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}(\omega-p\,\omega_s)),\quad \omega_s\equiv\frac{2\pi}{T}.$$

Ezzel megkaptuk a (25) igazolását folytonos $x(t)$ esetére. Az általánosabb esetet (amikor a jelnek a $t=0$ helyen ugrása van) nem tárgyaljuk.

4.4-2.3. Mintavételezett jel Laplace-transzformáltja

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(s)=\mathscr{L}\{x_*(t)\}$ Laplace-transzformáltja a definíció szerint

$$X_*(s)=\int_{-0}^{\infty}\left\{T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_D[k]\,\delta(t-kT)\right\}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=T_0\sum_{k=0}^{\infty}x_D[k]\int_{-0}^{\infty}\delta(t-kT)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=T_0\sum_{k=0}^{\infty}x_D[k]\,\mathrm{e}^{-skT}.$$

A műveletek sorrendje a gyakorlatban előforduló jelekre felcserélhető.

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(s)=\mathscr{L}\{x_*(t)\}$ Laplace-transzformáltja kifejezhető a jelet leíró $x_D[k]$ diszkrét idejű jel ismeretében:

$$\boxed{X_*(s)=T_0\sum_{k=0}^{\infty}x_D[k]\,\mathrm{e}^{-ksT};\quad x_D[k]\equiv x(kT+0).} \tag{4.4-31}$$

Az $X_*(s)$ rendszerint racionális függvénye az e^{-sT} változónak.
Az $x_D[k]$ jel DI Laplace-transzformáltja (4.1-1.1. pont)

$$X_D(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x_D[k]z^{-k}\,.$$

Ebből következik, hogy ezzel $X_*(s)$ egyszerűen kifejezhető $X_D(z)$ ismeretében:

$$X_*(s)=T_0\,X_D(z)\big|_{z=e^{sT}}\,. \tag{4.4-32}$$

Ezek szerint az $X_*(s)$ *inverz Laplace-transzformáltja* előállítható az inverz DI Laplace-transzformáció már megismert módszereivel (polinomosztás vagy részlettörtekre bontás; 4.1-2. szakasz). Ez az $x_D[k]$ DI jelet szolgáltatja, amely viszont (18) értelmében már meghatározza az $x_*(t)$ mintavételezett jelet.

A (21) és a (31) összehasonlításával megkapjuk a belépő mintavételezett jel spektrumának és Laplace-transzformáltjának kapcsolatát:

$$X_*(\mathrm{j}\omega)=X_*(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega};\qquad x_D[k]=0\,,\ k\in\mathbf{Z}_-\,;\quad \sum_{k=0}^{\infty}|x_D[k]|<\infty\,. \tag{4.4-33}$$

Az összefüggés biztosan alkalmazható, ha $X_D(z)=T_0^{-1}\,X_*(s)\big|_{e^{sT}=z}$ racionális függvény és minden pólusa egységsugarú körön belüli.

Ha ismerjük az $x(t)$ jel $X(s)$ Laplace-transzformáltját, akkor az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(s)$ Laplace-transzformáltját általános esetben a következőképpen határozhatjuk meg. Először előállítjuk az $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, képezzük az $x_*(t)$ mintavételezett jelet, majd számítjuk ennek $X_*(s)=\mathscr{L}\{x_*(t)\}$ Laplace-transzformáltját. Vezessük be erre a műveletsorozatra a következő jelölést:

$$X_*(s)=\{X(s)\}_*\,. \tag{4.4-34}$$

Az $\{X(s)\}_*$ függvényt előállíthatjuk $x(t)$ számítása nélkül is, ha $X(s)$ racionális függvény vagy ha a következő alakú:

$$X(s)=\frac{B_0(s)+B_1(s)e^{-sT}+B_2(s)e^{-s2T}+\ldots+B_r(s)e^{-srT}}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\,, \tag{4.4-35}$$

ahol minden $B_i(s)$ legfeljebb $n-1$ fokszámú polinom és T a mintavételi periódusidő. Ha a pólusok egyszeresek, akkor részlettörtekre bontással $X(s)$ előállítható

$$F(s)=\frac{1}{s-p_i}\,e^{-smT}\,,\qquad \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\varepsilon(t-mT)\,e^{p_i(t-mT)}$$

alakú tagok lineárkombinációjaként. A DI jel és Laplace-transzformáltja

$$f_D[k]=\varepsilon[k-m]\,e^{p_i(k-m)T}\,,\quad F_D(z)=\frac{z}{z-e^{p_iT}}\,z^{-m}\,.$$

Alkalmazzuk erre a (34) által értelmezett $\{\ \}_*$ műveletet, akkor kapjuk, hogy

$$\left\{\frac{1}{s-p_i}\,\mathrm{e}^{-smT}\right\}_* = T_0\,\frac{\mathrm{e}^{sT}}{\mathrm{e}^{sT}-\mathrm{e}^{p_iT}}\,\mathrm{e}^{-smT}, \quad m\in\mathbf{N}. \tag{4.4-36}$$

Látható, hogy a $\{\ \}_*$ művelet és az e^{-smT} $(m\in\mathbf{N})$ tényezővel végzett szorzás sorrendje felcserélhető. Az eljárás nehézség nélkül általánosítható arra az esetre is, amikor valamelyik pólus többszörös.

Az is könnyen belátható, hogy ha $F_*(s)$ egy mintavételezett jel Laplace-transzformáltja, akkor bármely $g(t)$ és $G(s)$ esetén

$$\{F_*(s)G(s)\}_* = F_*(s)G_*(s). \tag{4.4-37}$$

Nincs egyszerű általános módszer $\{F(s)G(s)\}_*$ meghatározására $F_*(s)$ és $G_*(s)$ ismeretében. Ilyenkor az általános eljárást kell követni (visszatérés az időtatományba, mintvételezett jel előállítása, Laplace-transzformált számítása).

1. példa Tekintsük a következő két folytonos idejű jelet:

$$g(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

$$h(t)=\frac{1}{T_0}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right].$$

A $h(t)$ kifejezésében T a mintavételi periódusidő és T_0 a mintavétel hossza.

Az ezekhez tartozó mintavételezett jelek,

$$g_*(t)=T_0\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha Tk}\,\delta(t-kT), \qquad h_*(t)=\delta(t).$$

A mintavételezett jelek Laplace-transzformáltja

$$G_*(s)=T_0\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\,\mathrm{e}^{-sT}}, \qquad H_*(s)=1.$$

Az Olvasóra bízzuk e két transzformált előállítását a

$$G(s)=\frac{1}{s+\alpha}, \qquad H(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{T_0 s}$$

Laplace-transzformáltak ismeretében.

2. példa Vezessük be az előzőkben meghatározott függvényekkel az alábbi komplex frekvenciatartománybeli függvényeket:

$$U(s)=G(s)H_*(s), \quad V(s)=G_*(s)H_*(s), \quad W(s)=G(s)H(s).$$

Határozzuk meg az ezekhez tartozó $u(t), v(t), w(t)$ jelek mintavételezett megfelelőjének Laplace-transzformáltját!

A (37) felhasználásával $\mathscr{L}\{u_*(t)\}$ és $\mathscr{L}\{v_*(t)\}$ egyszerűen kifejezhető:

$$U_*(s)=V_*(s)=G_*(s)H_*(s)=T_0\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{-sT}}.$$

A $\mathscr{L}\{w_*(t)\}$ számítása kicsit körülményesebb. Az adott $G(s)$ és $H(s)$ behelyettesítésével

$$W(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{T_0\,s\,(s+\alpha)}=\frac{1}{\alpha T_0}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right\}\left\{1-\mathrm{e}^{-sT}\right\}.$$

A (37) és a (36) felhasználásával kapjuk, hogy

$$W_*(s)=\frac{1}{\alpha\,T_0}\left\{T_0\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}-T_0\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{-sT}}\right\}\left\{1-\mathrm{e}^{-sT}\right\}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{-sT}}.$$

Ennek a függvénynek az előállítása nem reményteljes a $G_*(s)$ és $H_*(s)$ függvények ismeretében.

Az Olvasóra bízzuk az eredmények ellenőrzését úgy, hogy először meghatározza az $u(t)$, $v(t)$ és $w(t)$ függvényeket, képezi ezekből az $u_*(t), v_*(t)$ és $w_*(t)$ mintavételezett jeleket, majd ezek Laplace-transzformáltját. Ez a számítás többnyire hosszadalmasabb, viszont általánosabb.

Ha például kis módosítással a két függvény

$$g(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t},\qquad h(t)=\frac{1}{T_0}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)],\ \tau\neq T$$

lenne, akkor a Laplace-transzformáltak meghatározása megfontolást igényelne. Az eredményt lényegesen befolyásolná τ/T értéke. Ha ez kisebb 1-nél, akkor az eredmények nem változnának, de $W_*(s)$ bemutatott számítása nem érvényes. Ha τ/T nagyobb 1-nél, akkor már $h_*(t)$ kifejezése is módosul! Az Olvasóra bízzuk az utóbbi eset részletes vizsgálatát. #

4.4-2.4. A mintavételezett jel rekonstrukciója

A mintavételezett (vagy digitális) jelfeldolgozás egyik alapvető feladata a következő.

Ismerjük egy folytonos idejű és korlátos $y(t)$ „eredeti" jel $y_D[k]=y(kT+0)$ *mintáit* vagy $y_*(t)$ *mintavételezett jelét.* Feladatunk olyan $\hat{y}(t)$ folytonos idejű jel előállítása, amely lehetőleg kevéssé különbözik az eredeti $y(t)$ jeltől, ezért annak egy közelítésének vagy *rekonstrukciójának* tekinthető. Ha az eredeti jel nem sávkorlátozott, akkor a minták alapján egy hibamentes rekonstrukció még elvileg is lehetetlen.

A következőkben három közelítő rekonstrukciós eljárás alapelvét mutatjuk be. A mintavételezett jelből történő jelrekonstrukció hibája alapvetően annál kisebb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választottunk. Arra az esetre szorítkozunk, amikor az $\hat{y}(t)$ jelet az $y_*(t)$ múltbeli, azaz t előtti értékeiből állítjuk elő (on-line rekonstrukció).

Szakaszonként állandó jelrekonstrukció

Az $y(t)$ jelet $y_D[k]$ mintái alapján szakaszonként állandó $\hat{y}_0(t)$ jellel rekonstruáló jel definíciója

$$\hat{y}_0(t)=y_D[k]\equiv y(kT+0),\quad kT\le t<k\,T+T,\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{4.4-38}$$

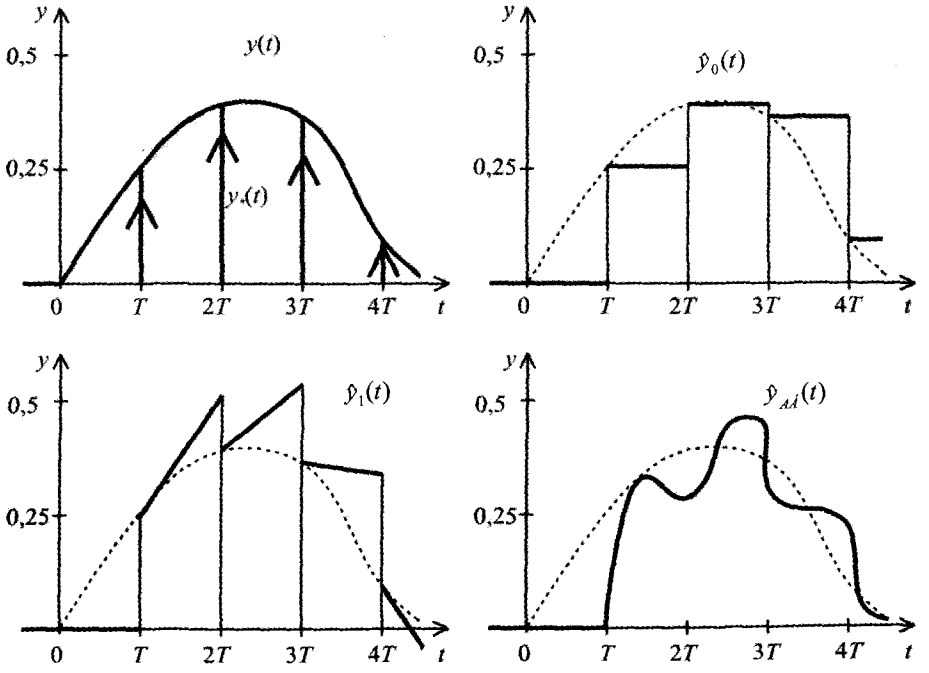
A rekonstruáló jel állandó értéke megegyezik az utolsó minta értékével. Ez egy lépcsős függvényt eredményez. Az eljárás nulladrendű extrapoláció. A rekonstrukció hibamentes a kT mintavételi időpontokban. Az eljárást a 9. ábra felső sorának jobb oldali részábrái szemléltetik. (Az ábra alsó soráról később lesz szó.) A jelrekonstrukció hibája kicsi azokban az intervallumokban, ahol az eredeti jel keveset változik, azaz maga is közel állandó.

A *nulladrendű tartó* az a *rendszer*, amelynek $u(t)=y_*(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza éppen a fent értelmezett $\hat{y}_0(t)$.

E rendszer impulzusválaszának meghatározásához legyen $y_D[k]=\delta[k]$. Ekkor $y_*(t)=T_0\,\delta(t)$ és $\hat{y}_0(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$. Ebből már következik a $h_0(t)$ impulzusválasz kifejezése, majd ebből a $H_0(s)$ átviteli függvény és a $H_0(\mathrm{j}\omega)$ átviteli karakterisztika kifejezése is. Könnyen belátható, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

A *nulladrendű tartó* rendszerjellemző függvényei

$$h_0(t)=\frac{1}{T_0}\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\}, \tag{4.4-39}$$



4.4-9. ábra Az y eredeti jel és az y_* mintavételezett jel, az $\hat{y}_0$ szakaszonként állandó, az $\hat{y}_1$ szakaszonként lineáris, az $\hat{y}_{AA}$ aluláteresztővel előállított rekonstruált jel

$$H_0(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{T_0\,s}, \tag{4.4-40}$$

$$H_0(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{T_0\,\mathrm{j}\omega}=\frac{T}{T_0}\,\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}. \tag{4.4-41}$$

Az impulzusválasz időben véges hosszúságú, az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika nem racionális.

Ilyen véges impulzusválaszú (FIR típusú), folytonos idejű rendszer nem differenciális, rendszeregyenlete és állapotváltozós leírása nem az általunk eddig tárgyalt alakú, nem realizálható erősítők és integrátorok összekapcsolásából álló jelfolyam hálózattal.

Szakaszonként lineáris jelrekonstrukció

Az $y(t)$ jelet $y_D[k]$ mintái alapján szakaszonként lineáris $\hat{y}_1(t)$ jellel rekonstruáló jel definíciója

$$\hat{y}_1(t) = y_D[k] + \frac{y_D[k] - y_D[k-1]}{T}(t - kT), \qquad kT \le t < kT + T, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4.4-42}$$

A rekonstruált jel T hosszúságú intervallumonként lineárisan változik, értéke a kT időpontban megegyezik a minta ottani értékével, meredeksége egyenlő az $y(t)$ átlagos meredekségével az előző T hosszúságú intervallumban. Az eljárás elsőrendű extrapoláció. A rekonstrukció hibamentes a $kT + 0$ mintavételi időpontokban. Az eljárást a 9. ábra alsó sorának bal oldali részábrája szemlélteti. A jelrekonstrukció hibája kicsi azokban az intervallumokban, ahol az eredeti jel folytonos és nagyjából lineárisan változik.

A lineáris extrapoláció jobb a nulladrendű extrapolációnál azokban a szakaszokban, ahol a jel monoton nő vagy csökken, de rosszabb a maximumok és a minimumok környezetében. Ebből következik, hogy ez a jelrekonstrukció nem tekinthető az előző fejlettebb változatának, viszont kivitele nyilván bonyolultabb, ezért a gyakorlatban ritkán használják.

Az *elsőrendű tartó* az a *rendszer*, amelynek $u(t) = y_*(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza a fenti $\hat{y}_1(t)$. E rendszer impulzusválasza (l. az előző megfontolásainkat)

$$h_1(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\}\frac{1 + (t/T)}{T_0} + \{\varepsilon(t-T) - \varepsilon(t-2T)\}\frac{1 - (t/T)}{T_0}. \tag{4.4-43}$$

A Laplace-transzformált számításával előállíthatjuk az átviteli függvényt és abból az átviteli karakterisztikát is:

$$H_1(s) = \frac{1 + sT}{T_0\, T\, s^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-sT}\right]^2, \tag{4.4-44}$$

$$H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{T}{T_0}\left[1 + \mathrm{j}\omega T\right]\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right]^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}. \tag{4.4-45}$$

Sem az átviteli függvény, sem az átviteli karakterisztika nem racionális, hálózati realizálása integrátorok és erősítők összekapcsolásával nem lehetséges.

Jelrekonstrukció aluláteresztő szűrővel

A jel rekonstrukcióját mintáiból közelítőleg elvégezhetjük aluláteresztő szűrővel is. Tudjuk ugyanis, hogy a sávkorlátozott jelet (alkalmas periódusidővel vett) mintáiból egyértelműen rekonstruálni tudjuk, spektrumát a mintavételezett jel spektrumából

(alkalmas sávszélességű) aluláteresztő szűrővel előállíthatjuk. Ez következik az 4.4-2.2. pontban tárgyaltakból, és jól látható a 4.4-7a és b ábrából.

Az áttekinthetőség érdekében a lineáris fázisú ideális aluláteresztővel történő jelrekonstrukciót vizsgálatára szorítkozunk. Ez a rendszer ismeretesen nem kauzális, ezért ténylegesen ennek egy kauzális és stabilis közelítő realizációját célszerű alkalmazni (például maximálisan lapos aluláteresztőt a 9. ábra második sorának jobb oldali részábrája).

A lineáris fázisú *ideális aluláteresztő* szűrő átviteli karakterisztikája

$$H_\Omega(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{T}{T_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}, & |\omega|<\Omega, \quad \tau\geq 0,\\ 0, & |\omega|>\Omega.\end{cases} \tag{4.4-46}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy $\Omega=\pi/T\equiv\omega_s/2$, ahol Ω a szűrő sávszélessége és T a mintavételi periódusidő.

E szűrőnek az $y_*(t)$ gerjesztéshez tartozó $y_\Omega(t)$ válasza inverz Fourier-transzformációval

$$y_\Omega(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_\Omega(\mathrm{j}\omega)Y_*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\frac{T}{T_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\left\{T_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kT)\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau-kT)}\mathrm{d}\omega.$$

Az utolsó integrál nehézség nélkül számítható. Némi rendezés után kapjuk az aluláteresztő válaszának kifejezését:

$$y_\Omega(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(kT)\frac{\sin\pi\left(\dfrac{t-\tau}{T}-k\right)}{\pi\left(\dfrac{t-\tau}{T}-k\right)}. \tag{4.4-47}$$

A mintavételi tételből következik (3.2-1.5. pont), hogy ha az $y(t)$ jel Ω sávkorlátú sávkorlátozott közelítését $y_\Omega(t)$ jelöli, akkor a mintavételezett jelből előállított ideális *sávkorlátozott rekonstruált jel*

$$\hat{y}_\Omega(t)=y_\Omega(t-\tau). \tag{4.4-48}$$

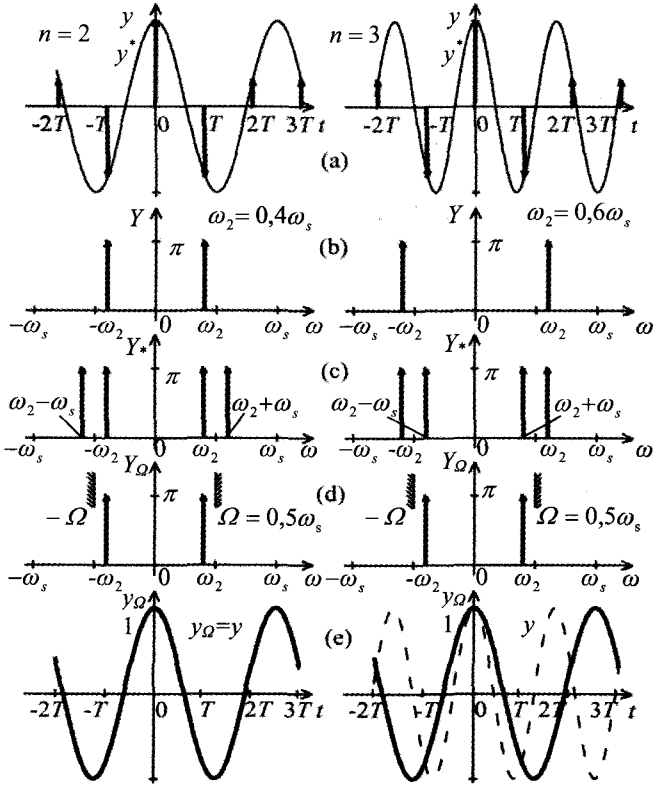
Ezek szerint $\hat{y}_\Omega(t)$ az $y(t-\tau)$ késleltetett eredeti jel sávkorlátozott közelítése. Ebből következik, hogy $\hat{y}_\Omega(kT)=y(kT-\tau)$, vagyis a jelrekonstrukció (a τ késleltetéstől eltekintve) hibamentes a mintavételi időpontokban.

Ha az eredeti $y(t)$ jel sávkorlátozott Ω_y sávkorláttal és a mintavételi periódusidőt úgy választjuk, hogy $T<\pi/\Omega_y$ (vagyis $\omega_s>2\Omega_y$) teljesüljön, akkor $\hat{y}_\Omega(t)=y(t-\tau)$, vagyis ekkor az ideális aluláteresztővel végzett jelrekonstrukció tökéletes lenne.

Vizsgáljuk meg mi történik, ha egy szinuszos jelből veszünk mintákat, majd egy aluláteresztővel szűrjük a mintavételezett jelet. Legyen $\omega_1=0{,}4\,\omega_s<\omega_s/2$ és $\omega_2=0{,}6\,\omega_s>\omega_s/2$, vagyis

$$y_1(t)=\cos 0{,}4\,\omega_s t, \quad Y_1(\mathrm{j}\omega)=\pi\left\{\delta(\omega-0{,}4\,\omega_s)+\delta(\omega+0{,}4\,\omega_s)\right\};$$
$$y_2(t)=\cos 0{,}6\,\omega_s t, \quad Y_2(\mathrm{j}\omega)=\pi\left\{\delta(\omega-0{,}6\,\omega_s)+\delta(\omega+0{,}6\,\omega_s)\right\}.$$

Mindkét jel sávkorlátozott: $\Omega_{y1} = 0{,}4\,\omega_s < \omega_s / 2$, $\Omega_{y2} = 0{,}6\,\omega_s > \omega_s / 2$. A mintavételi tétel értelmében $y_1(t)$ rekonstruálható $y_{1*}(t)$ ismeretében, de $y_2(t)$ nem rekonstruálható $y_{2*}(t)$ ismeretében. A 10a ábrán láthatóak az eredeti jelek és mintavételezett jelük. A 10b ábra az eredeti jelek, a 10c ábra a mintavételezett jelek spektrumát mutatja. Az utóbbiak az előbbiekből a (25) értelmében eltolással és összeadással állíthatók elő. E jelek párosak, spektrumuk valós értékű. A 10d ábrán feltüntettük az ideális aluláteresztő $\Omega = \omega_s / 2$ sávszélességét és kimeneti jelének spektrumát. Az egyszerűség kedvéért a $\tau = 0$ esetre szorítkoztunk, ezért a szűrt jel spektruma is valós, a jel páros. A 10d ábrából látható, hogy a szűrt jel egyetlen frekvenciakomponenst tartalmaz, éspedig mindkét jelre a körfrekvencia $0{,}4\,\omega_s$. Ennek következtében mindkét szűrt jel megegyezik, éspedig $\hat{y}_{1\Omega}(t) = \hat{y}_{2\Omega}(t) = \cos 0{,}4\,\omega_s\, t$. Ez azt jelenti, hogy $\hat{y}_{1\Omega}(t) = y_1(t)$, de $\hat{y}_{2\Omega}(t)$ teljesen más mint a rekonstruálandó $y_2(t)$ jel.



4.4-10. ábra Mintavételezett szinuszos jelek rekonstrukciója ideális aluláteresztővel: csak a kellően kis frekvenciájú jel rekonstruálható hibamentesen

A 10. ábrán követhető általános megállapításunk egy egyszerű esetre: az ideális aluláteresztő torzítatlanul átenged minden olyan szinuszos jelet, amelynek frekvenciája kisebb a mintavételi frekvencia felénél, minden ilyen frekvenciakomponens lineáris fázis-karakterisztika esetén ugyanannyi idővel késik. Ha tehát a jel csak ilyen frekvenciakomponenseket tartalmaz (tehát sávkorlátozott), akkor a lineáris fázisú ideális aluláteresztő képes a jelet a mintáiból, vagy a mintavételezett jeléből rekonstruálni. Ha a

jel az előírtnál nagyobb frekvenciakomponenseket is tartalmaz, akkor a jelrekonstrukció nem lehet hibamentes.

Mint korábban beláttuk: az ideális aluláteresztő nem kauzális rendszer, ezért nem valósítható meg. Feladatunk ezért egy olyan aluláteresztő szűrő tervezése, amelynek racionális az átviteli függvénye (4.2-3.6. és 7. pont). Egy realizált aluláteresztő még sávkorlátozott jelet sem tud mintáiból hibamentesen realizálni részben az amplitúdó-, részben a fázis-karakterisztika nem ideális volta miatt. Az alapgondolat mindazonáltal hasznos: egy megfelelő *aluláteresztő* felhasználásával a jel közelítőleg rekonstruálható a mintáiból, ha fázis-karakterisztikája az áteresztő tartományban - ahol az amplitúdó-karakterisztika nagyjából állandó - közelítőleg lineáris, vagyis futási idő karakterisztikája közelítőleg állandó. Az ω_s mintavételi körfrekvenciát legalább kétszer akkorának kell választani, mint amekkora a rekonstruálandó jel sávszélessége. Az aluláteresztő sávszélességének legalább akkorának kell lennie, mint az $\omega_s/2$ körfrekvenciának. A jelrekonstrukció pontossága a sávszélességek értelmezésén is múlik.

A $\hat{H}_\Omega(s)$ átviteli függvény vagy a $\hat{H}_\Omega(\mathrm{j}\omega)$ átviteli karakterisztika megválasztása után számíthatjuk a rendszer $\hat{h}_\Omega(t)$ impulzusválaszát is, amely belépő jellegű. A rekonstruált jel kifejezése a különböző tartományokban belépő $y(t)$ jelre szorítkozva

$$\begin{aligned}
&\hat{Y}(s)=\hat{H}_\Omega(s)Y_*(s);\\
&\hat{Y}(\mathrm{j}\omega)=\hat{H}_\Omega(\mathrm{j}\omega)Y_*(\mathrm{j}\omega);\\
&\hat{y}_\Omega(t)=T_0\left\{y[k]\hat{h}_\Omega(t)+y[k-1]\hat{h}_\Omega(t-T)+y[k-2]\hat{h}_\Omega(t-2T)+\ldots\right\}.
\end{aligned}\tag{4.4-49}$$

Szükség van még egy (T/T_0) erősítésre a közelítő egyenlőség (nem csak az arányosság) biztosítására. Természetesen más erősítés is alkalmazható.

A módszerek összehasonlítása

A mintavételezett jelet az eredeti jelből közelítőleg szűréssel rekonstruálhatjuk. Az előzőkben három szűrőt tárgyaltunk: a nullarendű tartót, az elsőrendű tartót és a lineáris fázisú ideális aluláteresztőt. A tényleges kivitelnél még approximációs és realizációs feladatokat is meg kell oldani, de ezeket nem részletezzük.

A két tartó által rekonstruált jel nem folytonos (még ha a rekonstruálandó jel folytonos is), a racionális átviteli függvényű aluláteresztő által rekonstruált jel folytonos (még ha a rekonstruálandó jel nem folytonos is, de korlátos).

A tartók által rekonstruált jel a mintavételi időpontokban pontos, a racionális átviteli függvényű aluláteresztő által rekonstruált jel nem bír ezzel a tulajdonsággal.

Az időtartományban már nehéz további összehasonlítást tenni a három módszer között. A frekvenciatartománybeli vizsgálat alapján azt mondhatjuk, hogy a szűrő annál jobb, minél jobban közelíti a lineáris fázisú ideális aluláteresztőt. A 11. ábrán láthatjuk a következő szűrők amplitúdó-karakterisztikáját:

K_Ω : ideális aluláteresztő

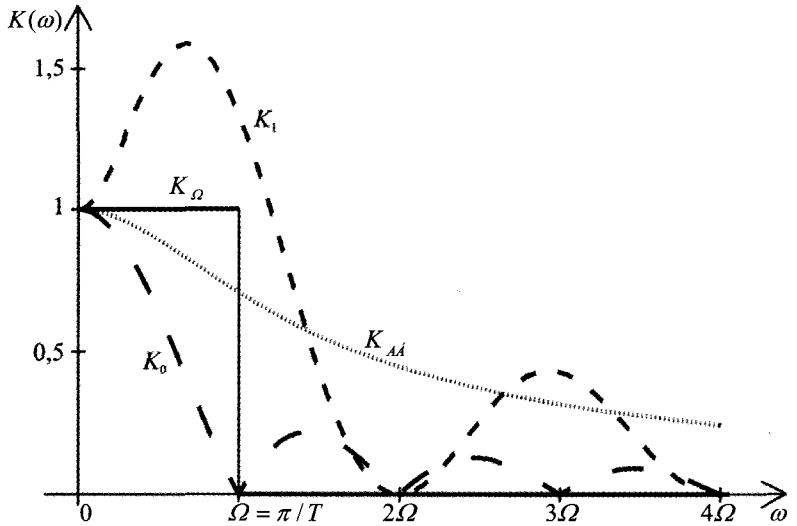
K_0: nulladrendű tartó

K_1: elsőrendű tartó

$K_{\mathrm{AÁ}}$: aluláteresztő (maximális laposságú, $n = 3$, $\omega_b = \Omega$, $\varepsilon = 0{,}5$; vö. 4.2-3.6. pont).

Az áteresztőtartományban az aluláteresztő tekinthető legjobb közelítésnek és az elsőrendű tartó a leggyengébbnek, a zárótartományban a sorrend megfordul. Nagyobb

rendszámú szűrővel a zárótartománybeli viselkedés javítható. Nem foglalkozunk a fáziskarakterisztikák (vagy a futási idő karakterisztikák) összehasonlításával.



4.4-11. ábra Különböző jelrekonstruáló szűrők amplitúdó-karakterisztikája

Példa Tekintsük a következő mintavételezendő, majd rekonstruálandó jelet:

$$y(t)=\varepsilon(t)\alpha\, t\, \mathrm{e}^{-\alpha t},\quad \alpha>0\,.$$

A T periódusidővel mintavételezett jel

$$y_*(t)=T_0\sum_{k=0}^{\infty}\alpha\, T\, k\, \mathrm{e}^{-\alpha T k}\,\delta(t-kT)=\alpha\, T\, T_0\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)^k\delta(t-kT)\,.$$

Az eredeti jel spektruma és amplitúdó-spektruma

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{\alpha}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2},\quad |Y(\mathrm{j}\omega)|=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\,.$$

Válasszunk $T=0{,}3/\alpha$ mintavételi periódusidőt $(\omega_s=20\pi\,\alpha/3\approx 20\,\alpha)$. Ez akkor tenne lehetővé ideális jelrekonstrukciót, ha a jel $\omega_s/2=10\pi\alpha/3\approx 10\,\alpha$ sávkorláttal sávkorlátozott lenne. Látható, hogy $|Y(\mathrm{j}\omega)|<0{,}01|Y(\mathrm{j}\omega)|_{\max}$, ha $|\omega|>\omega_s/2$, ezért választásunk elfogadható. A mintavétel $T_0 << T$ hosszát nem rögzítjük.

A korábban már látott 9. ábra éppen ehhez a jelhez és mintavételi periódusidőhöz tartozik. Aluláteresztőként egy maximálisan lapos harmadrendű szűrőt választottunk (a 4.2-3.7. pont példája). Ennek rendszerjellemző függvényei

$$\hat{H}_\Omega(s)=\frac{\omega_0^3}{(s+\omega_0)(s^2+\omega_0 s+\omega_0^2)}\,,$$

$$\hat{K}_\Omega(\omega)=\frac{\omega_0^3}{\sqrt{\omega_0^6+\omega^6}}\,,$$

$$\hat{h}_{\Omega}(t) = \omega_0\, \varepsilon(t) \left\{ \mathrm{e}^{-\omega_0 t} - \frac{2}{\sqrt{3}}\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, \omega_0\, t + \frac{\pi}{6} \right) \right\}.$$

Az ω_0 körfrekvencia egy szabad paraméter, amelynek hatását az amplitúdó-karakterisztika jól mutatja. Alább megadjuk ennek értékét két jellegzetes frekvencián az ω_0 három választott értékére:

$\omega_0 =$	$10\,\alpha$	$12\,\alpha$	$14\,\alpha$
$\hat{K}_{\Omega}(0{,}5\,\omega_s) =$	0,6567	0,8329	0,9225
$\hat{K}_{\Omega}(\omega_s) =$	0,1082	0,1848	0,2862

Az $\omega_0 = 10\alpha$ választás nem megfelelő áteresztőtartománybeli viselkedést eredményez, az $\omega_0 = 14\alpha$ választással pedig a zárótartománybeli viselkedés nem megfelelő, ezért az $\omega_0 = 12\alpha$ látszik $n = 3$ esetén optimálishoz közeli választásnak. Erre az esetre vonatkozik a 9. és a 11. ábra (l. előbb).

Mint azt előre is sejtettük, a harmadrendű aluláteresztő nem biztosít jó jelrekonstrukciót, azt csak az egyszerűség kedvéért választottuk. #

4.4-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg az $x(t) = \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ jelhez tartozó mintavételezett jelet és annak spektrumát!

F-2. Adja meg az előző feladatban szereplő spektrum legegyszerűbb közelítését az eredeti jel spektrumának ismeretében a (25) alapján! Hasonlítsa össze a pontos és a közelítő értéket az $\omega_0 = 0$ és az $\omega_1 = \pi / T$ körfrekvencián! Adjon az eltérésre közelítő kifejezést annak figyelembe vételével, hogy $\alpha\, T$ kis érték!

***F-3.** Igazolja általánosan a (25) érvényességét az 1. feladatban szereplő jelre!

(Útmutatás. Használja fel az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{2\,z} \frac{1}{\operatorname{th} \pi\, z} - \frac{1}{2\,z^2}$ azonosságot!)

F-4. Ismert egy belépő jel $X(s)$ Laplace-transzformáltja.

Adjon kifejezést a mintavételezett jel Laplace-transzformáltjára az időfüggvények előállítása nélkül!

F-5. Egy $y(t) = A\,\varepsilon(t)$ időfüggvényű FI jelet mintavételezünk, majd nulladrendű tartóval rekonstruálunk.

Igaz-e, illetve milyen feltételek mellett igaz, hogy a rekonstruált jel megegyezik az eredetivel?

F-6. Egy $y(t) = B\,\varepsilon(t)\,t$ időfüggvényű jelet mintavételezünk, majd elsőrendű tartóval rekonstruálunk.

Igaz-e, hogy a rekonstruált jel megegyezik az eredetivel?

***F-7.** Adjon meg egy olyan jelet, amely mintavételezés után elsőrendű tartóval hibamentesen rekonstruálható!

4.4-2.M. Megoldások

M-1. Az $a = \mathrm{e}^{-\alpha T} < 1$ jelölés bevezetésével

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, \delta(t - kT), \quad X_*(\mathrm{j}\omega) = \frac{T_0}{1 - a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}.$$

M-2. Tudjuk, hogy

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}; \quad X(\mathrm{j}0) = \frac{1}{\alpha}, \quad X\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{T}\right) = \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\pi/T}, \quad \frac{1}{2}\lim_{\omega\to\infty}\{\mathrm{j}\omega\, X(\mathrm{j}\omega)\} = \frac{1}{2}.$$

Ha csak egyetlen tagot veszünk figyelembe, akkor a közelítő alak

$$X_{*1}(\mathrm{j}\omega) = \frac{T_0}{T} X(\mathrm{j}\omega) = \frac{T_0}{\alpha T + \mathrm{j}\omega T}, \quad X_{*1}(\mathrm{j}0) = \frac{T_0}{\alpha T}, \quad X_{*1}\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{\alpha T + \mathrm{j}\pi} \approx \frac{T_0}{\alpha T}.$$

Ha még a járulékos 1/2 tagot is figyelembe vesszük, akkor a közelítő alak

$$X_{*2}(\mathrm{j}\omega) = \frac{T_0}{T} X(\mathrm{j}\omega) + \frac{T_0}{2} = \frac{T_0}{2}\,\frac{2 + \alpha T + \mathrm{j}\omega T}{\alpha T + \mathrm{j}\omega T},$$

$$X_{*2}(\mathrm{j}0) = \frac{T_0}{2}\,\frac{2 + \alpha T}{\alpha T} \approx \frac{T_0}{\alpha T}, \quad X_{*2}\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{2}\,\frac{2 + \alpha T + \mathrm{j}\pi}{\alpha T + \mathrm{j}\pi} \approx \frac{T_0}{2}.$$

A pontos értékek az előző feladat szerint

$$X_*(\mathrm{j}0) = \frac{T_0}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha T}} \approx \frac{T_0}{\alpha T}, \qquad X_*\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{1 + \mathrm{e}^{-\alpha T}} \approx \frac{T_0}{2}.$$

Kis frekvenciákon az additív tag nem játszik jelentős szerepet, az $\omega = \omega_s/2$ környezetében azonban már nem hagyható figyelmen kívül. Az $\omega_s/2 < \omega < \omega_s$ intervallumban már az első eltolt tag jelentősebb, de ennek nincs gyakorlati jelentősége, hiszen itt a valós mintavételezett jel spektrumát nem is kell előállítanunk.

***M-3.** Esetünkben $z = (\alpha T + \mathrm{j}\omega T)/2\pi$ helyettesítéssel és némi elemi átalakítással adódik a mintavételezett jel spektruma. A jel ugrásával arányos tagot figyelembe kell venni!

M-4. Ha $x(t)$ legfeljebb a $t = 0$ helyen szakadásos, akkor a (25) mintájára

$$X_*(s) = \frac{T_0}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - \mathrm{j}n\omega_s) + \frac{T_0}{2}\lim_{s\to\infty}\{s\,X(s)\}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

M-5. Igen, éspedig a mintavételi periódusidő megválasztásától függetlenül. Ez annak következménye, hogy a mintákat $y(kT + 0)$ alakban értelmeztük.

M-6. Általánosan a két jel nem egyezik meg, mert a $0 < t < T$ intervallumban a rekonstruált $y_1(t) = 0$. Ezen intervallumon kívül $y_1(t)$ és $y(t)$ megegyezik.

***M-7.** Csak az intervallumonként azonos meredekségű, vagyis az

$$y(t) = A[t - kT] + B_k, \quad kT < t < kT + T$$

nem belépő és általában nem folytonos jel rekonstruálható hibamentesen elsőrendű tartóval. Ilyen jel a gyakorlatban nem fordul elő.