Topológia

Tartalomjegyzék

- 2D bináris topológia alapjai
- Topológia megőrző képtranszformációk
- Topológia változtató képtranszformációk
- Példák

Mi a topológia lényege?

« ***A képek topológiai leírása geometriai jellegű,***
de a torzításoknak leginkább ellenálló képjellemzők megragadásán alapul. »

Stephen Barr,"Experiments in Topology",1964

Forrás: ESIEE, Bertrand

Mi a topológia lényege?

- Sokfajta, alkalmazásfüggő definíció
  - földrajzi
  - számítástechnikai
  - orvosi
  - matematikai
  - .....
- De a lényeg ugyanaz!

Mi a topológia lényege?

- ⌘ Topológia vs. morfológia

A két fogalom kapcsolódik, ezért sokszor keveredik is!

- ⌘ Egy morfológia definíció:

    1. Literally, the study of form. The study of structure.
    2. The form itself, as of an organ or part of the body.

    [www.emedicinehealth.com]

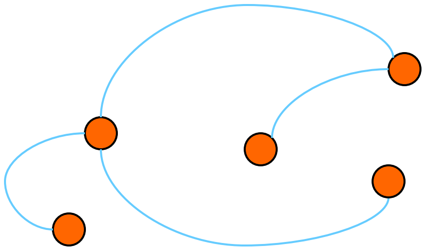
- ⌘ Topológia: inkább az összefüggő elemek leírása

Vissza a topológiai gyökerekhez

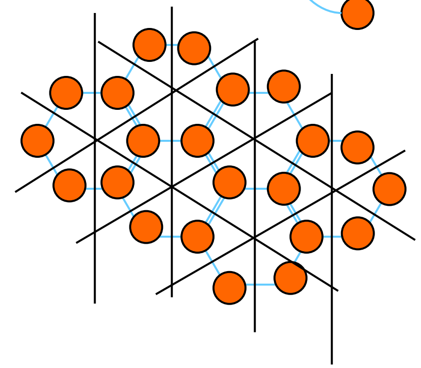
- Egy halmaz két eleme összefüggő, ha egyikből a másikba eljutunk szomszédos elemeken keresztül
- Egy halmaz összefüggő, ha bármelyik két eleme összefüggő
- Ezért az egyik első feladat: tisztázni a szomszédosság fogalmát a 2D/3D térben

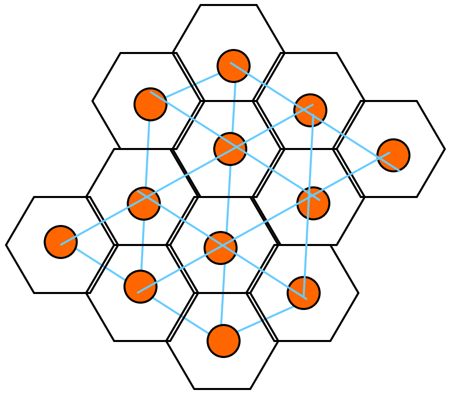
Gráf, háló, összefüggés,...

- Általános gráf

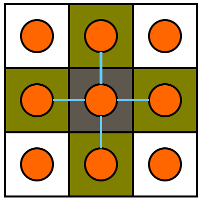


- Hexagonális gráf
  3-szomszédú
  6-szomszédú

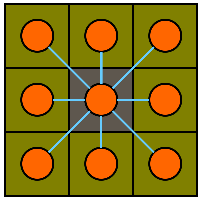




- 4-szomszédú

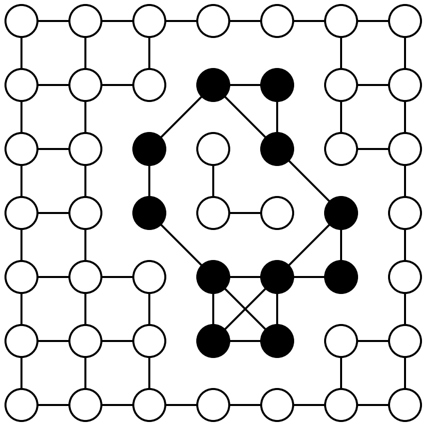


- 8-szomszédú



Digitális topológia bináris képekre

- 8-szomszédosság, 4-szomszédosság



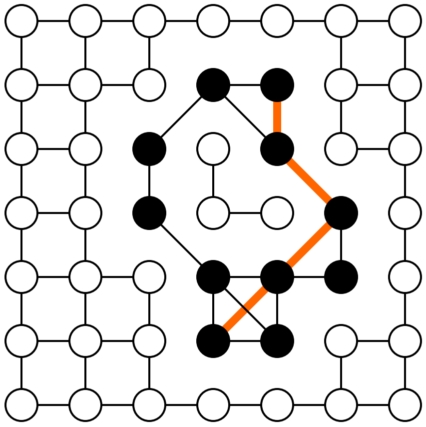
fekete: X (objektum)

fehér: $\overline{X}$ (háttér)

- útvonal, összefüggő komponensek

Digitális topológia bináris képekre

⌘8-szomszédosság, 4-szomszédosság



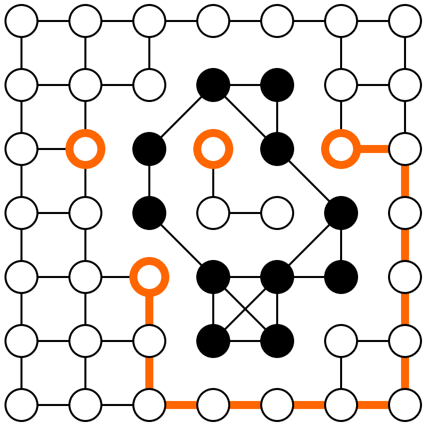
fekete: X (objektum)

fehér: $\overline{X}$ (háttér)

⌘útvonal, összefüggő komponensek

Digitális topológia bináris képekre

- ⌘8-szomszédosság, 4-szomszédosság



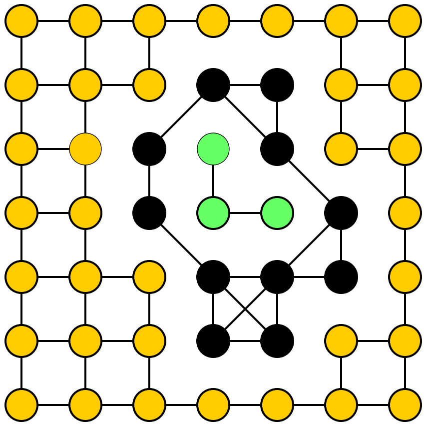
fekete: X (objektum)

fehér: $\overline{X}$ (háttér)

- ⌘Útvonal, összefüggő komponensek

Digitális topológia bináris képekre

- ⌘8-szomszédosság, 4-szomszédosság

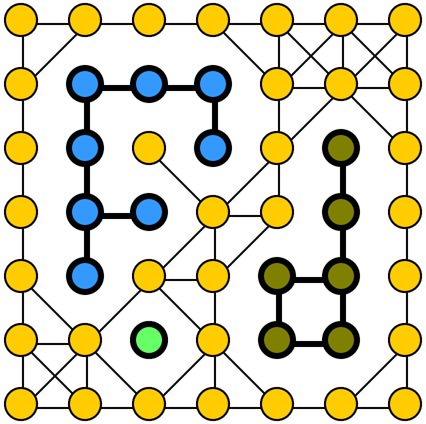


fekete: X (objektum)

fehér: $\overline{X}$ (háttér)

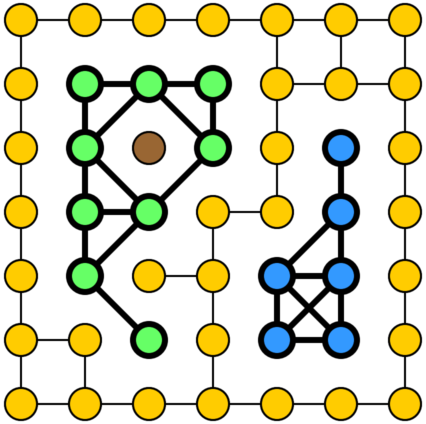
- ⌘útvonal, összefüggő komponensek

További példák



fekete:4, fehér:8

3 1

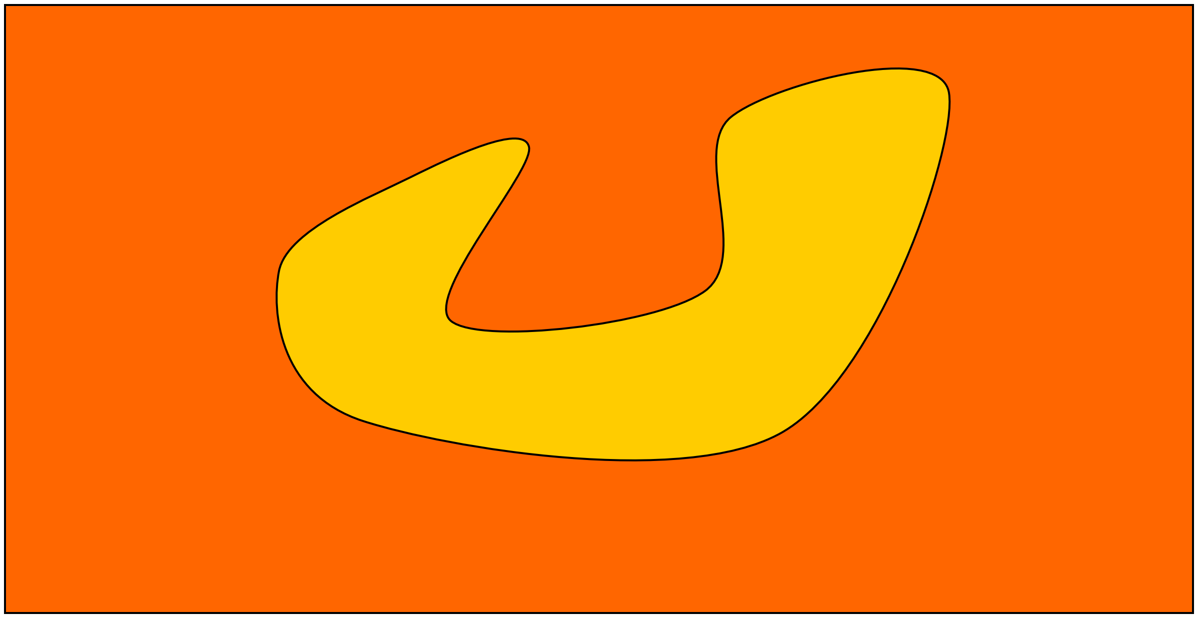


fekete:8, fehér:4

2 2

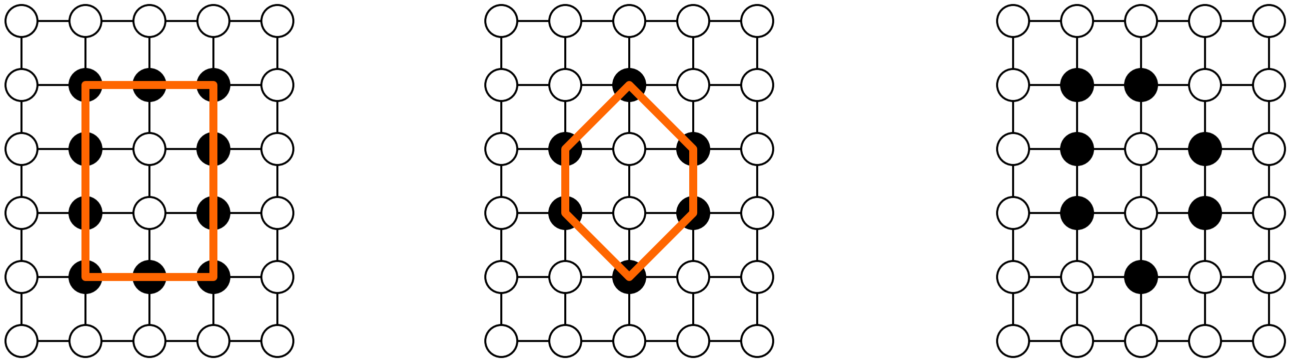
Jordan tulajdonság

- Bármely zárt görbe a síkot két összefüggő halmazra osztja



Jordan tulajdonság (folytatás)

- $\mathbf{Z}^2$ részhalmaza X egy **egyszerű zárt görbe**, ha minden x pontjának pontosan két szomszédja van X-ben

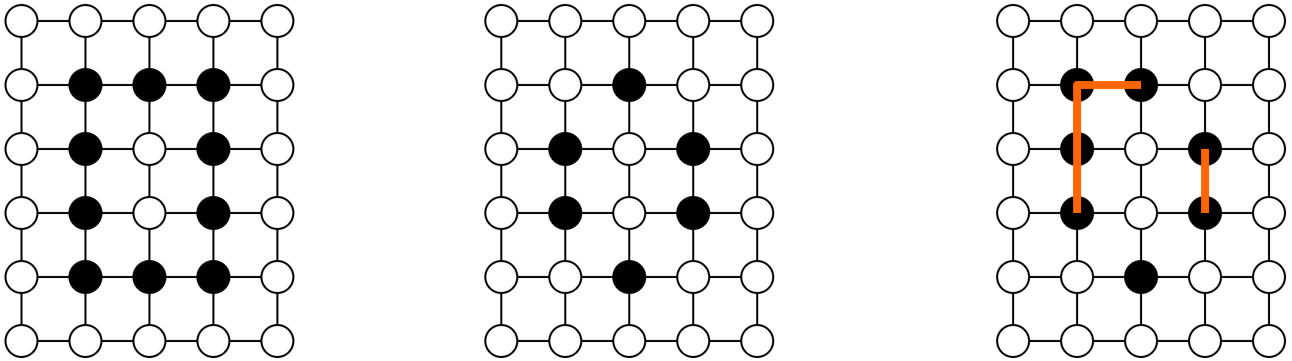


4-görbe

8-görbe

Jordan tulajdonság (folytatás)

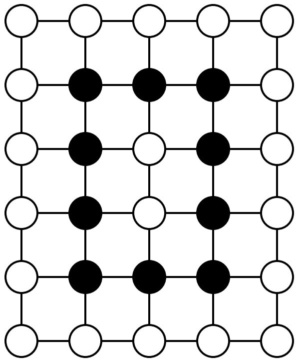
- $\mathbf{Z}^2$ részhalmaza X egy egyszerű zárt görbe, ha minden x pontjának pontosan két szomszédja van X-ben

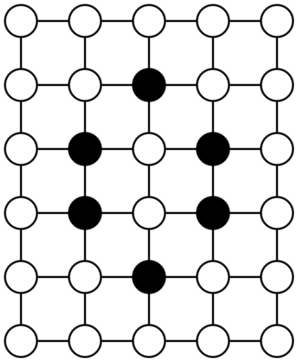


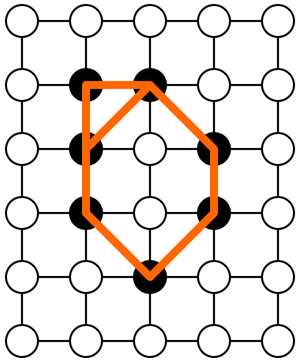
Nem 4-görbe

Jordan tulajdonság (folytatás)

- $\mathbf{Z}^2$ részhalmaza X egy egyszerű zárt görbe, ha minden x pontjának pontosan két szomszédja van X-ben



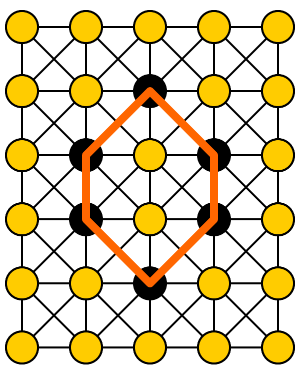




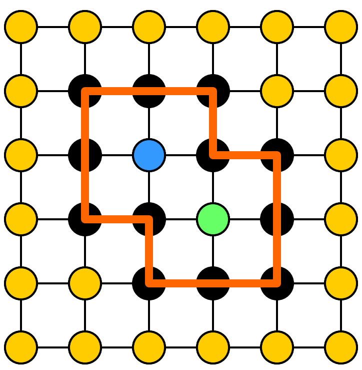
Nem 8-görbe

Jordan tulajdonság (folytatás)

- A Jordan tulajdonság nem állhat fenn, ha X és komplemense azonos szomszédosságú



8-szomszédosság

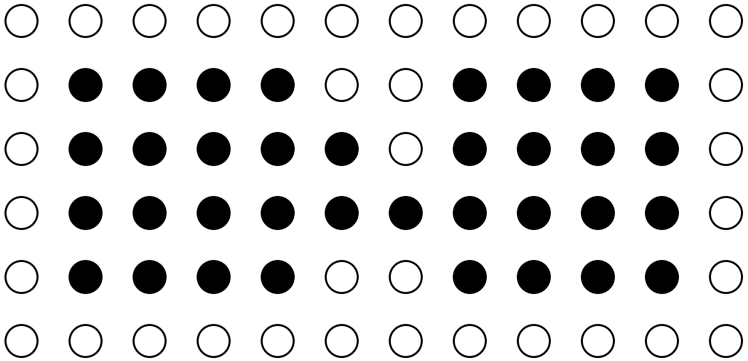


4-szomszédosság

Topológia-**megőrző transzformációk** tulajdonságai

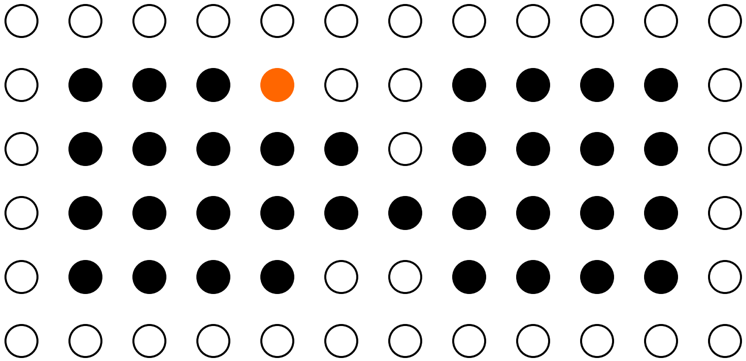
- Egy topológia- megőrző transzformáció után X és $\overline{X}$ összefüggő komponenseinek száma nem változik
- Definíció (2D-re): p **egyszerű pont** (X halmazra nézvést), ha hozzáadása vagy elvétele X-hez nem változtatja X és $\overline{X}$ összefüggő komponenseinek számát

Egyszerű pont: példa



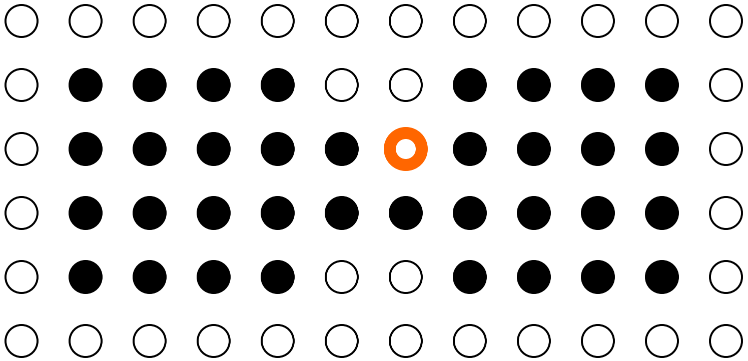
X (fekete pontok)

Egyszerű pont: példa



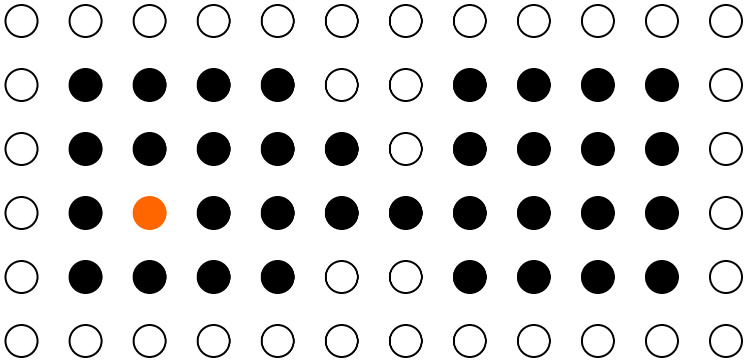
Egyszerű pont X-ben

Egyszerű pont: példa



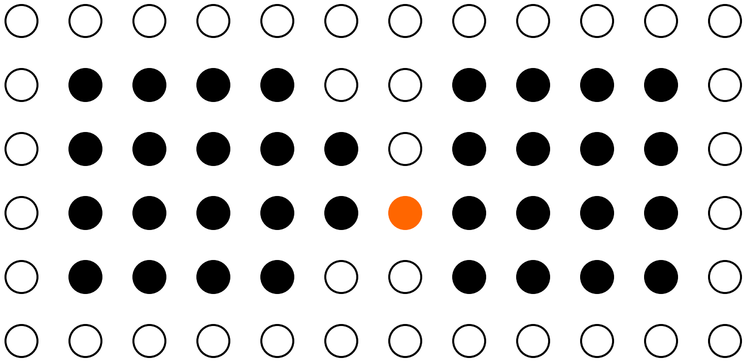
Egyszerű pont $\overline{X}$ - ben

Egyszerű pont: ellenpélda



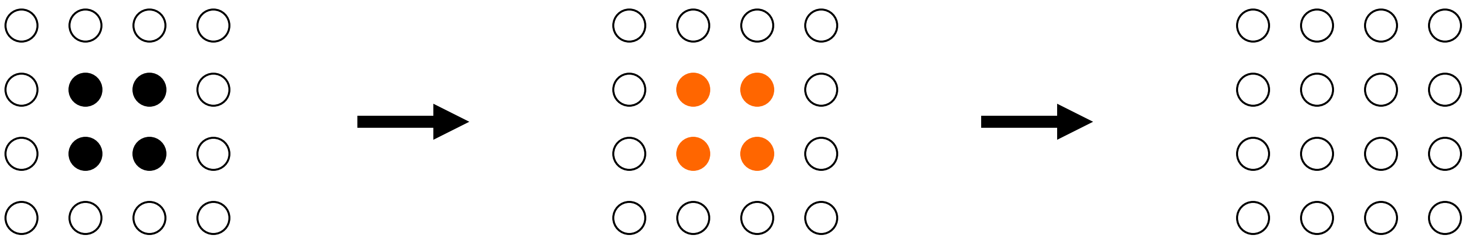
Nem egyszerű pont (törlésével egy új háttér komponenst hozunk létre)

Egyszerű pont: ellenpélda



Nem egyszerű pont (törlésével kettévágunk egy objektum komponenst)

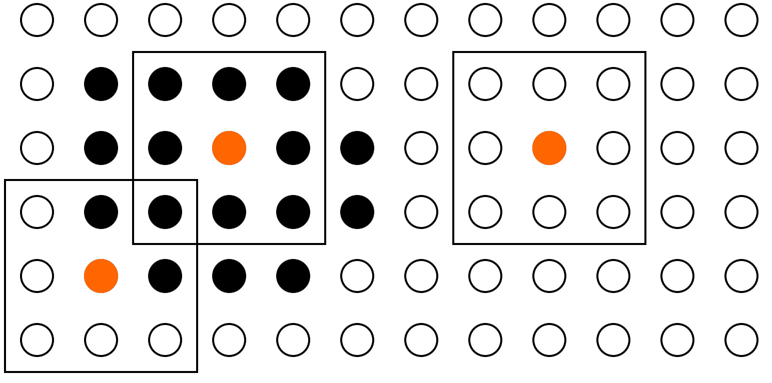
Egyszerű pontok együttes törlése?



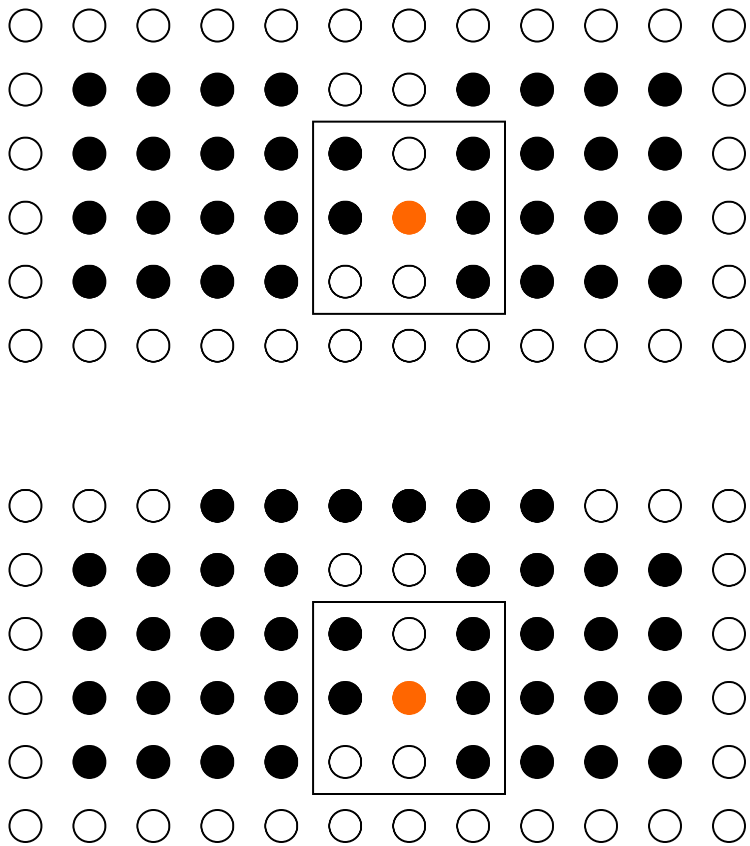
Együttes törlés megváltoztat**hat**ja a topológiát

De az egyszerű pontok ügyes címkézésével (pl. távolságmérték, intenzitásmérték,…) a művelet mégis párhuzamosítható!(ld. később)

Egyszerű pont lokális jellemzéssel?



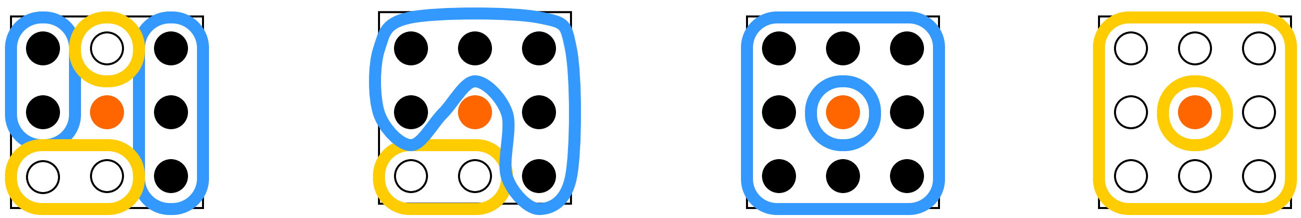
Egyszerű pont lokális jellemzéssel?



Egyszerű pont lokális jellemzéssel?

IGEN

- T(p)=összefüggő objektum komponensek száma
- $\overline{T}$(p)=összefüggő komponensek száma a háttérben



T=2, $\overline{T}$=2

T=1, $\overline{T}$=1

T=1, $\overline{T}$=0
Belső pont

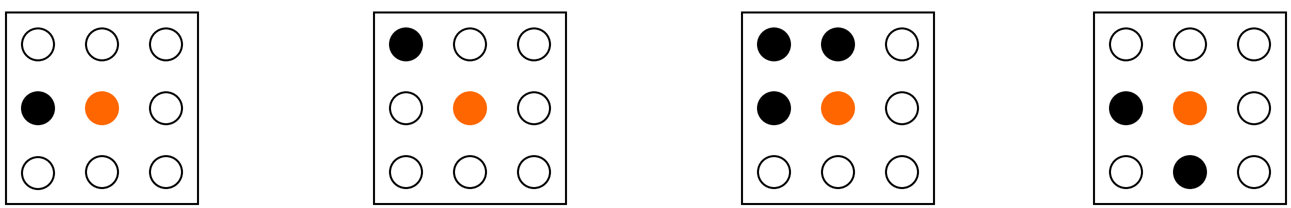
T=0, $\overline{T}$=1
Izolált pont

p egyszerű pont, ha T(p) = 1 és $\overline{T}$(p) = 1

Csontváz

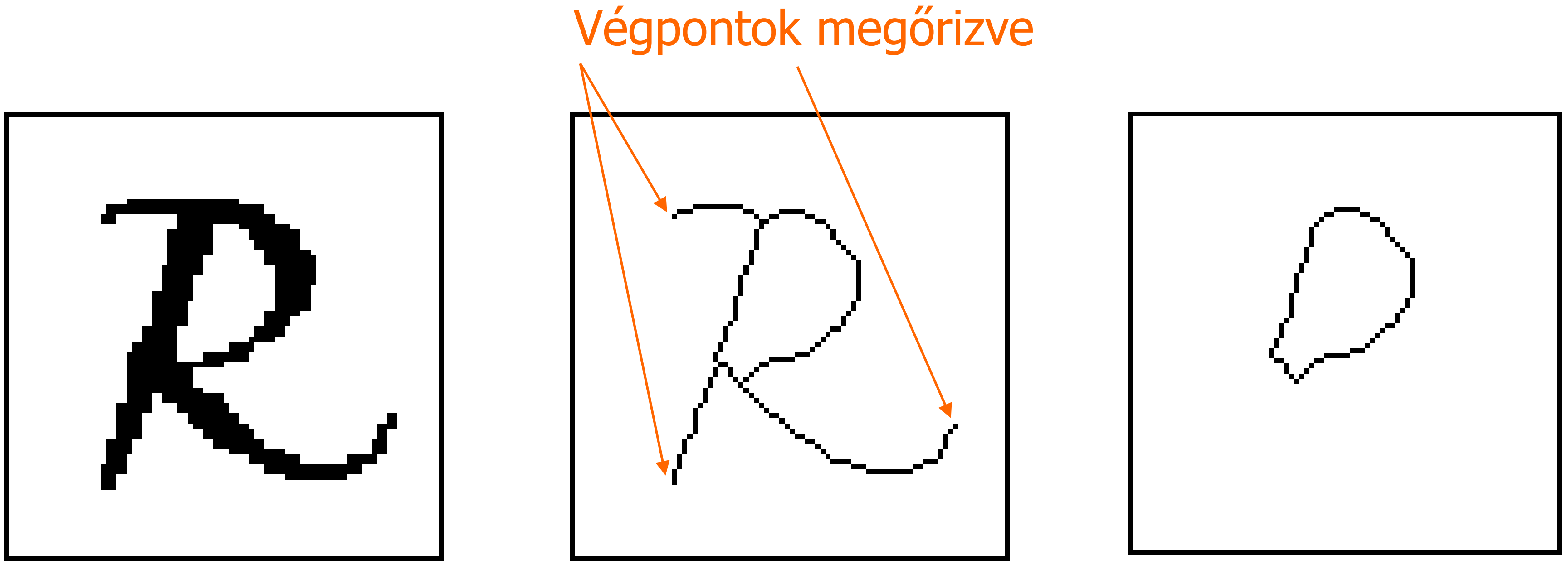
- Y egy **csontváza** X-nek, ha X „egyszerű” pontjainak szekvenciális törlésével előállítható
- Ha Y csontváza X-nek és nem tartalmaz további egyszerű pontot, akkor Y **végső csontváza** X-nek
- Ha Y csontváza X-nek és Y nem-egyszerű pontokat és végpontokat tartalmaz, akkor Y egy **görbe-csontváza** X-nek

Végpontra példák



végpont (4) végpont (8) Nem-végpont Nem-végpont

Csontváz (példák)



Eredeti kép „Görbe” csontváz „Végső” csontváz

Homotopia (azonos topológia)

- X és Y **homotopikus** (azonos topológiájú) ha Y létrehozható X-ből egyszerű pontok szekvenciális hozzáadásával vagy elvételével

Vékonyító algoritmusok

Végső vékonyítás (X)

Ismétlés stabilitásig (idempotencia) :

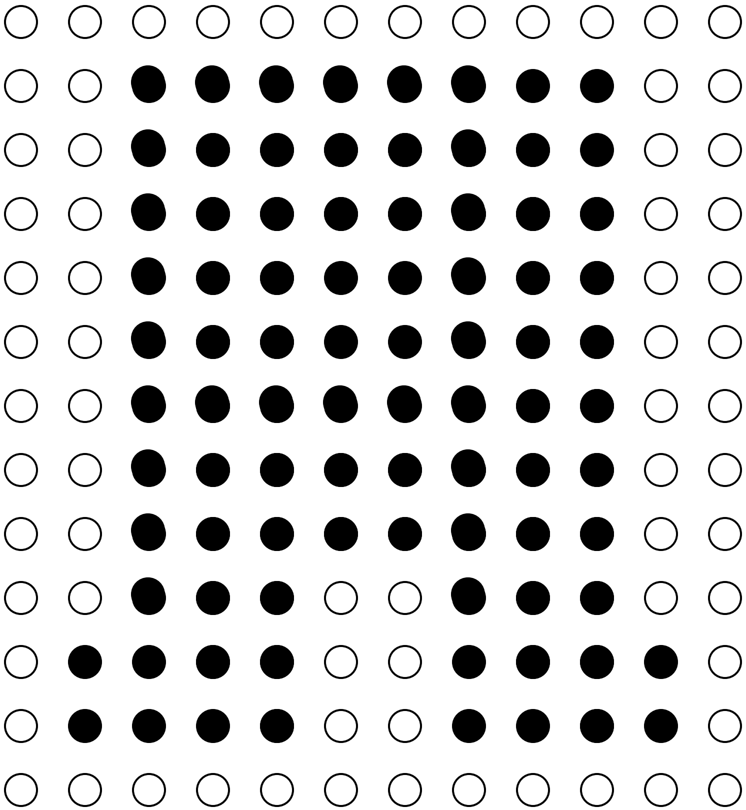
p egyszerű pont keresése X-ben
p törlése X-ből

Görbe vékonyítás (X)

Ismétlés stabilitásig (idempotencia) :

p egyszerű nem végpont keresése X-ben
p törlése X-ből

Párhuzamos vékonyítás



Párhuzamos vékonyítás

Párhuzamosíthatóság: azonos „típusú” egyszerű és nem-végpontok egy lépésben is eltávolíthatók

„Azonos típusú” = például „azonos távolságmértékű”

Az egyszerű és nem-végpontok eszerint csoportosítva, majd egyszerre eltávolítva

Vékonyítás távolságmértékkel

- Példák távolságmértékekre:
- City block
- Euklideszi
- ...

Diszkrét távolságtérképek

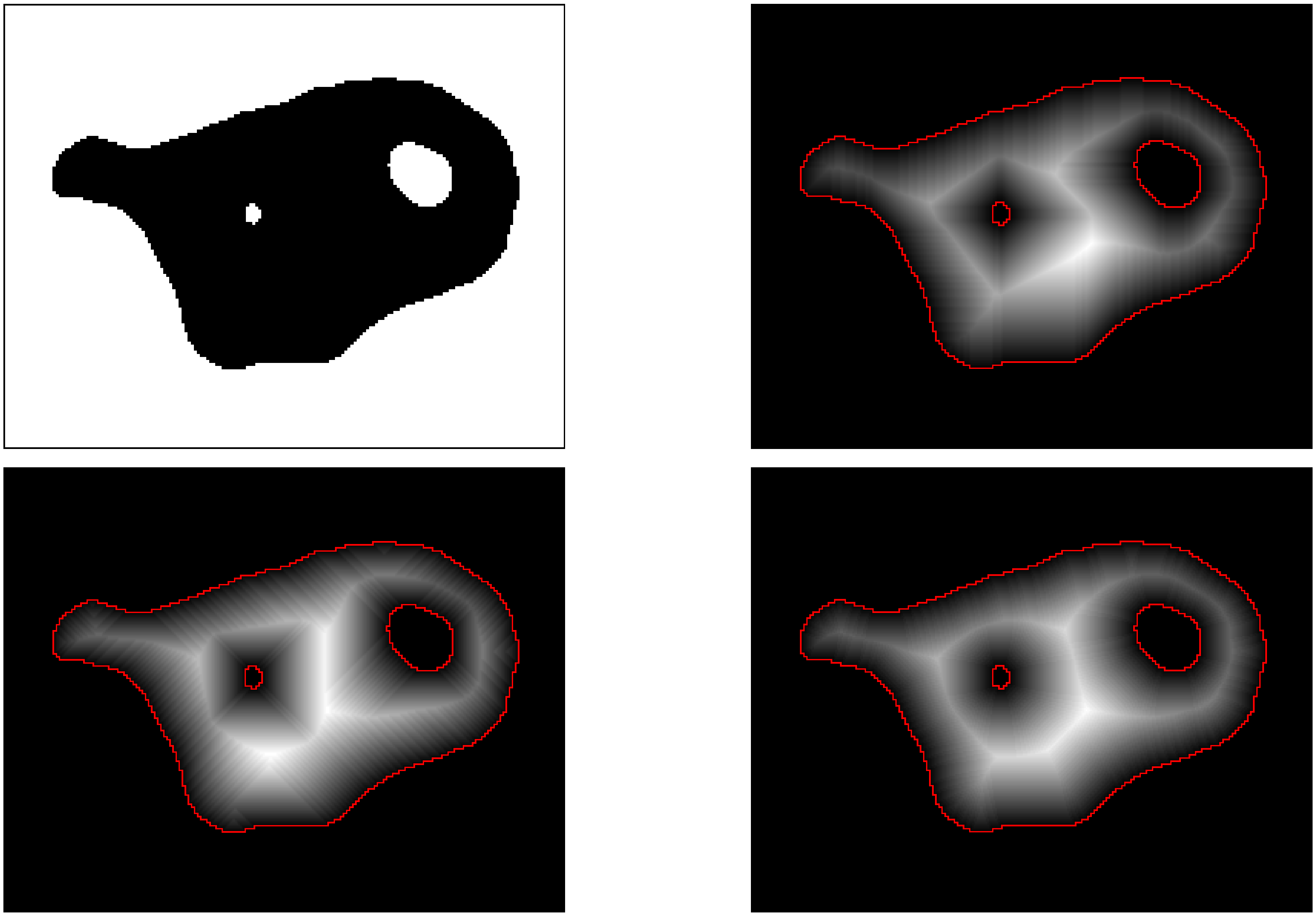
			1	1	1	1	1	1			
		1	2	2	2	2	2	2	1		
		1	2	3	3	3	3	2	1		
		1	2	3	4	4	3	2	1		
		1	2	3	4	4	3	2	1		
		1	2	3	3	3	3	2	1		
		1	2	3	2	2	3	2	1		
		1	2	2	1	1	2	2	1		
		1	2	1			1	2	1		
	1	2	2	1			1	2	2	1	
	1	1	1					1	1	1	

d_4

			1	1	1	1	1	1			
		1	1	2	2	2	2	1	1		
		1	2	2	3	3	2	2	1		
		1	2	3	3	3	3	2	1		
		1	2	3	4	4	3	2	1		
		1	2	3	3	3	3	2	1		
		1	2	2	2	2	2	2	1		
		1	2	1	1	1	1	2	1		
		1	2	1			1	2	1		
	1	1	1	1			1	1	1	1	
	1	1	1					1	1	1	

d_8

Diszkrét és Euklideszi távolság térképek



d_8

d_4

d_e

Vékonyítás távolság-mértékkel: az algoritmus

Végső vékonyítás (X)

DM_X távolság térkép kiszámítása

Ismétlés stabilitásig (idempotencia):

p egyszerű pontok keresése X-ben

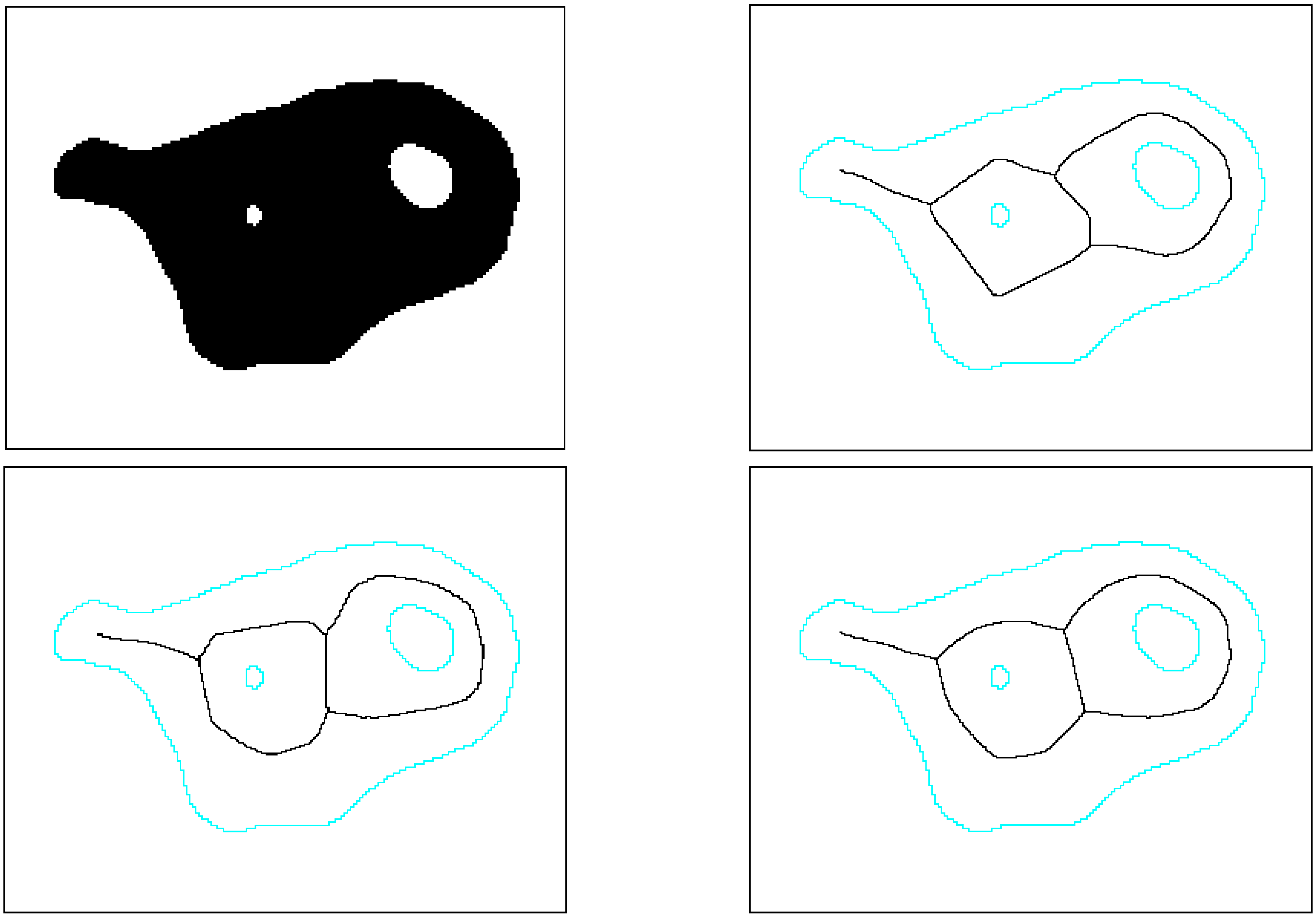
úgy, hogy $DM_X(p)$ legyen minimális

p egyszerű pontok törlése X-ből

Görbe vékonyítás (X)

Ugyanaz, csak az « egyszerű » helyettesítése « egyszerű nem-végpont » kifejezéssel

Vékonyítás távolság-mértékkel: eredmények



d_8

d_4

d_e

Konklúzió - **Emlékeztető**

Egy topológia megőrző transzformáció megőrzi az

- Összefüggő komponensek számát X-ben
- Összefüggő komponensek számát $\overline{X}$ -ben

Konklúzió - Alkalmazhatóság

- Lényegkiemelés topológia megőrzéssel
- Ellenőrzött topológia módosítás
- Párhuzamosítható topológiai operátorok – például távolságtérképpel vezérelve
- 2D/3D orvosi kép alkalmazásokra (is) jó