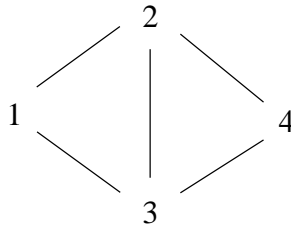


Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2013. január 8. 12:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy pohárban hat szabályos dobókockát összerázunk, majd az egészet az asztalra borítjuk. Igen ám, de minden kocka – a többitől függetlenül – $\frac{1}{3}$ valószínűséggel leesik a földre, és csak $\frac{2}{3}$ valószínűséggel marad az asztalon. Jelöljük X -szel az asztalon maradt kockákon kijött számok összegét. Mennyi X várható értéke és mi a generátorfüggvénye?
2. Egy bolha az ábrán látható gráf csúcsain bolyong úgy, hogy minden egész másodpercben átugrik egy, az aktuális helyével szomszédos csúcsra, ez előzményektől függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választva.



Modellezzük a bolyongást Markov láncsal.

- a.) Keressük meg a stacionárius eloszlást!
 - b.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a bolha a 2-es és 3-as pontok valamelyikén?
3. Egy lépcsőházban Poisson folyamat szerinti véletlen időpontokban, havonta átlagosan egyszer megjelenik a gondnok, és ellenőrzi az egyetlen villanykörtét: ha kiégett, kicseréli. A villanykörte pedig exponenciális eloszlású véletlen idő elteltével kiég – a várható élettartama 1 év. Modellezzük a körte állapotát folytonos idejű Markov láncsal. Az időt mérjük években.
 - a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát!
 - b.) Ma reggel nyolckor a körte ki volt égve. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy holnap reggel nyolckor a lámpa működni fog?
 - c.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a pont 20 év elteltével a lámpa működni fog?
 - d.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a lámpa 2023 januárjában végig működni fog?
 4. A Tisztességes Vállalat által forgalmazott 1 kg-os kiszerelésű liszt tömege g -ban mérve normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke pontosan 1000. Néhány zacskó lisztet véletlenül kiválasztva a következő tömegeket mértük: 982, 1022, 1009, 998, 1014, 1018, 1000, 1009.

Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására!

5. A Gyanús Vállalat által forgalmazott 1 literes kiszerelésű színezett víz térfogata ml -ben mérve normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értékét és szórását sem ismerjük, de persze a Gyanús Vállalat azt állítja, hogy a várható érték legalább 1000. Néhány flakon vizet véletlenül kiválasztva a következő térfogatokat mértük: 997, 999, 1044, 995, 993, 1029, 1020. Döntsünk 90%-os szinten arról, hogy igazat állít-e a Gyanús Vállalat.

(Megjegyzés: a fenti számok összege 7077, négyzetösszege 7157261.)