

## STACIONÁRIUS FOLYAMATOK

- (1.) Definálja az erős és gyenge értelemben vett stacionárius folyamat fogalmát. Mutasson példát mindkét típusra. Definálja az eltérő eltolított folyamat fogalmát.

Def (erősen stacionárius):  $(X_t, t \in T)$  erősen stacionárius, ha  $\forall t_1, t_2, \dots, t_n$  időpontra és  $\forall s$ -re  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  eloszlása  $= (X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$  eloszlása

Példa erősen stacionárius folyamatra:

Def (gyengén stacionárius folyamat):  $(X_t, t \in T)$  gyengén stacionárius folyamat, ha

- $E(X_t) = \text{konstans}$ , tehát  $t$ -től független
- másodrendben:  $\text{cov}(X_t, X_s)$  csak  $t$  és  $s$  különbségétől (tehát a  $|t-s|$  távolságtól) függ.

Példa gyengén stacionárius folyamatra:

Def (elteljesített feltevések): Az elteljesített feltevések  $(\xi_i, i \in \mathbb{Z})$

való:

- $E(\xi_i) = 0$ , vagyis 0 várható értékű,
- $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ , ha  $i \neq j$ , vagyis korrelálatlan
- azonos  $\sigma^2$  ~~szórásnégyzetű~~ szórásnégyzetű valószínűségi változók sorozata.

(2.) Definíció a trigonometrikus folyamat fogalmát, miképpen egy példát. Kérdés, hogy létezik-e nemtriviális van a trigonometrikus folyamatok?

Def (trigonometrikus folyamat): Legyen  $A_0, A_1, \dots, A_m$  és  $B_1, B_2, \dots, B_m$  korrelálatlanok, várható értéke 0, minden  $A_k$  és  $B_k$  szórásnégyzete ugyanaz a  $\sigma_k^2$ .

Létezik-e valamilyen  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  frekvenciát  $[0, \pi]$ -ből. Ekkor az  $X_n = A_0 + \sum_{k=1}^m [A_k \cdot \cos(n \cdot \omega_k) + B_k \cdot \sin(n \cdot \omega_k)]$  folyamat stacionárius folyamat  $(n \in \mathbb{Z})$ : ez a trigonometrikus folyamat.

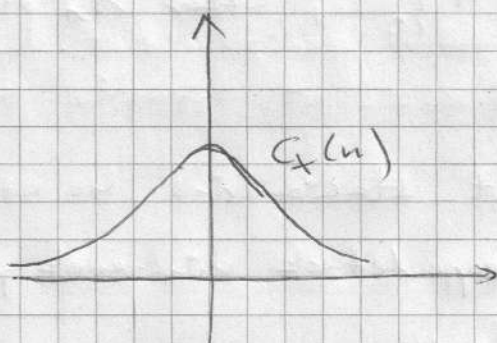
Folytatós időre a definíció hasonló:

Def (folytatós idejű trigonometrikus folyamat): Legyen  $A_0, A_1, \dots, A_m$  és  $B_1, B_2, \dots, B_m$  korrelálatlanok, várható értéke 0 és minden  $A_k$  és  $B_k$  szórásnégyzete legyen  $\sigma_k^2$ .

Létezik-e valamilyen  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  frekvenciát a  $[0, \pi]$ -ből. Ekkor az  $X(t) = A_0 + \sum_{k=1}^m [A_k \cdot \cos(t \cdot \omega_k) + B_k \cdot \sin(t \cdot \omega_k)]$  folyamat stacionárius folyamat.

Példa:  $\phi \sim \text{unif}(0, 2\pi)$  egyetemes eloszlás

A memória: a jelennel való lineáris összefüggés



$X$ -nek hosszitéri a memóriaja, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_X(n) = \infty$$

és rövidtéri, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_X(n) < \infty,$$

ahol  $G_X(n)$  az  $X$  folyamat autokorrelációs-függvénye:

$$G_X(n) = \text{COV}(X_t, X_{t+n}) = E[(X_t - E(X_t)) \cdot (X_{t+n} - E(X_{t+n}))]$$

A trigonometrikus folyamatra  $G_X(k) = \text{COV}(X_n, X_{n+k}) =$

$$= \sigma^2 \cdot \cos(\omega k), \text{ vagyis}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 \cdot \cos(\omega k) = ? \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 \cdot \left( \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2} \right)$$

↑ ettől függ, hogy mennyi

- (3.) Definíció a mozgó-átlag folyamat és az autoregressziós folyamat fogalmát. Mikor lesz egy autoregressziós folyamat stacionárius folyamat?

Def (q-adrendű mozgóátlag-folyamat): Legyen  $(\xi_n, n \in \mathbb{Z})$  eltolható fehérzaj, közös  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma^2$  szórással. Legyenek  $b_0, b_1, \dots, b_q$  valós számok. Legyen

$$X_n = b_0 \xi_n + b_1 \xi_{n-1} + \dots + b_q \xi_{n-q}.$$

Ekkor  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$   $q$ -edrendű mozgósítlag-folyamat.

Def (~~q~~<sup>p</sup>-edrendű autoregressziós folyamat)

Adott egy  $\{ \epsilon_n, n \in \mathbb{Z} \}$  fehérzaj  $\sigma^2$  varianciával és 0 várható értékkel, valamint adott  $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ . Ekkor ha  $X_n$  folyamat a következő alakba írható:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots + a_p X_{n-p} + \epsilon_n, \text{ akkor } X_n \text{ p-edrendű autoregressziós folyamat.}$$

All: Az  $X_n$  autoregressziós folyamat stacionárius, ha az  $X^p - a_1 X^{p-1} - a_2 X^{p-2} - \dots - a_p = 0$  egyenletnek minirenek gyökei a komplex egységkörön.

(4.) Mondja ki azt a tételt, amely a spektrálmérték létezéséről szól. Ha a spektrálmérték létezik, akkor milyen folyamatnak a spektrálmértéke?

Herglotz tétel (a spektrálmérték létezésére)

Ha  $C(k)$ ,  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  adott függvény, akkor a következő két állítás ekvivalens:

(A)  $C(k)$  egy valós értékű, 0 várható értékű, 1 korlátú stacionárius folyamat autokovariancia-függvénye.

(B) Létezik olyan  $F$  szimmetrikus eloszlás a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon, amelyre

$$C(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega) dF(\omega).$$

Tiszta ugrásos spektrálmérték esetén:  $\rightarrow$  Gauss-folyamat

Mivel  $F(\omega)$  szimmetrikus, ezért ha  $\omega$ -ban van ugrás, akkor  $(-\omega)$ -ban is van. Legyenek az ugrás nagyságok rendre

$p_1, p_2, \dots, p_m$  illetve  $p_0$ , ekkor a keresett Gauss-folyamat:

$A_0, A_1, \dots, A_m$  és  $B_1, B_2, \dots, B_m$  konstansok, valamint ér-  
teljesen 0, az  $A_k$  és  $B_k$  értékesége =  $\begin{cases} 2p_k, & \text{ha } k=1, 2, \dots, m \\ p_0, & \text{ha } k=0 \end{cases}$

$$X_n = A_0 + \sum_{k=1}^m \left[ A_k \cdot \cos(n \cdot \omega_k) + B_k \cdot \sin(\omega_k \cdot n) \right]$$

$$\text{cov}(X_n, X_{n+v}) = p_0 + \sum_{k=1}^m 2p_k \cdot \cos(v \cdot \omega_k)$$

$$C_X(v) = \sum_{k=1}^m \cos(v \cdot \omega_k) \cdot 2p_k$$

⑤ Definíció a lineáris stíró fogalmát. Mutassa meg, hogy  
hogyan hat a kiinduló folyamat spektrumára a stíró.

Def (lineáris stíró): Legyen  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  egy szinguláris  
stacionárius folyamat. Legyen  $a_k, k \in \mathbb{Z}$  valós számok  
egy sorozata úgy, hogy  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 < \infty$ .

Ekkor az  $Y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot X_{n-k}$  folyamat az  $X$  folyamat  $a$ -val  
stírt lineáris stírója. Jelölés:  $Y = a \star X$

\* Lineáris, mert ha  $X_n^{(1)}$  és  $X_n^{(2)}$  stacionárius folyamatok, akkor  
tetszőleges  $a$ -val való stírvésre:

$$a \star (\alpha X_n^{(1)} + \beta X_n^{(2)}) = \alpha \cdot a \star X_n^{(1)} + \beta \cdot a \star X_n^{(2)} \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad *$$

A stírvés:

A stírt folyamat kovarianciája  $v = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  esetén

$$C_Y(v) = \text{cov}(Y_n, Y_{n+v}) = \text{cov}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot X_{n-k}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cdot X_{n+v-l}\right) \\ = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r \cdot a_s \cdot \text{cov}(X_{n-r}, X_{n+v-s}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r \cdot a_s \cdot C_X(v-s+r)$$

A  $C_Y(v)$  sorozat Fourier-transzformáltja, s így  $Y = a \star X$   
spektrálstírvétele:

$$f_Y(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{i v \omega} \cdot C_Y(v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{i v \omega} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r \cdot a_s \cdot C_X(v-s+r) =$$

felhasználva, hogy  $e^{i v \omega} = e^{i(v-s+r)\omega} \cdot e^{i s \omega} \cdot e^{-i r \omega}$

$$= \underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir\omega} \cdot a_r}_{A(-\omega)} \cdot \underbrace{\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\omega} \cdot a_s}_{A(\omega)} \cdot \underbrace{\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{i(v-s+r)\omega} \cdot c_x(v-s+r)}_{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} \cdot c_x(k) = f_x(\omega)}$$

Teljesít  $\boxed{f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot |A(\omega)|^2}$ , ahol  $A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} \cdot a_k$

(6.) Példák kivételre. Hogy lehet kivélni periodusokat? Kivételre példát magas/alacsony frekvenciákat kivélni mivére.

1, Periodus kivételre

$$p1: Y_n = \frac{1}{2} X_{n+12} + X_n + \frac{1}{2} X_{n-12}$$

Fourier-transzformáltja  $A(\omega) = \frac{1}{2} \cdot e^{j12\omega} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j12\omega} = 1 + \cos(12\omega)$

Vagyis a spektrumból kivélni a  $\frac{\pi}{12}$  frekvenciát.

2, Frekvenciák kivételre

a) magas frekvenciák kivételre

Ha  $X$  egy stationárius folyamat  $f_X$  spektralsűrűséggel és ~~valamilyen~~  $Y_n = X_n - X_{n+1}$ , akkor  $Y = a * X$ :

$$f_Y = f_X \cdot |A(\omega)|^2, \text{ ahol } A(\omega) = 1 - e^{i\omega} \text{ és így}$$

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot |1 - e^{i\omega}|^2$$

Egyenlő után  $r$ -szer végrehajtva a műveletet:

$$Y = a * a * \dots * a * X, \text{ akkor}$$

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= f_X(\omega) \cdot |1 - e^{i\omega}|^{2r} = f_X(\omega) \cdot \left| \frac{e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}}{e^{i\frac{1}{2}\omega}} \right|^{2r} = \\ &= f_X(\omega) \cdot \left| \frac{e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}}{e^{i\frac{1}{2}\omega}} \right|^{2r} = f_X(\omega) \cdot 2^{2r} \cdot \left[ \sin\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right]^{2r} = \dots = \\ &= f_X \cdot 2^r \cdot (1 - \cos \omega)^r, \text{ ami a magas frekvenciákat kivélni.} \end{aligned}$$

b, alacsony frekvenciák kiemelése

$$Y_n = X_n + X_{n+1}$$

Az előző részhez hasonlóan:

$$Y = a * X \rightarrow f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot |1 + e^{i\omega}|^2$$

$$\text{így } Y = a * a * \dots * a * X \rightarrow f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot |1 + e^{i\omega}|^{2r} =$$

$$= f_X(\omega) \cdot |e^{i\frac{1}{2}\omega} + e^{i\frac{1}{2}\omega}|^{2r} = f_X(\omega) \cdot 2^{2r} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right]^{2r} = \dots =$$

$$= f_X(\omega) \cdot 2^r \cdot (1 + \cos \omega)^r$$

azaz az alacsony frekvenciákat kiemeli.