VIIIAB05 - Szabályozástechnika
Állapotteres analízis és szintézis diszkrét időben

Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. április 27.

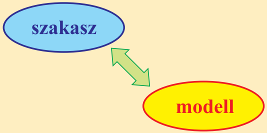
Eddigi kulcsfogalmak

Modell

modell

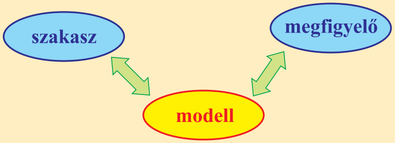
Eddigi kulcsfogalmak

Modell



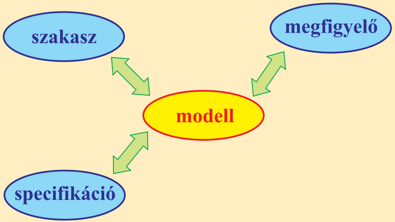
Eddigi kulcsfogalmak

Modell



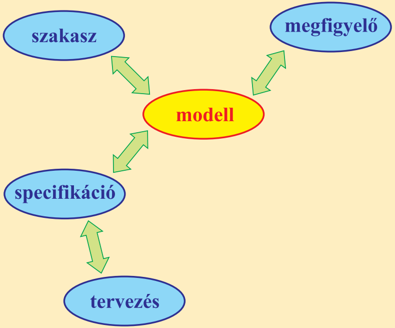
Eddigi kulcsfogalmak

Modell



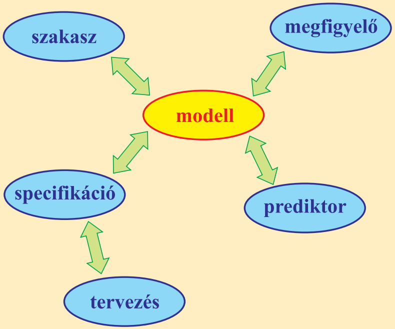
Eddigi kulcsfogalmak

Modell



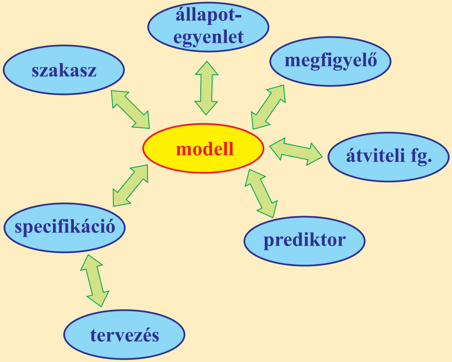
Eddigi kulcsfogalmak

Modell



Eddigi kulcsfogalmak

Modell



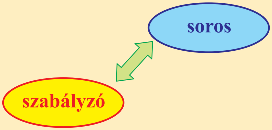
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó

szabályzó

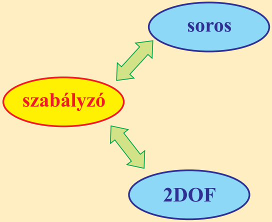
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó

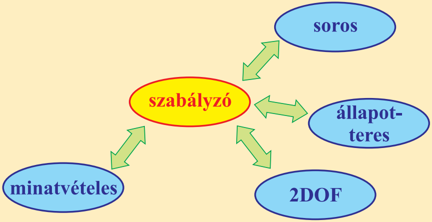


Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó

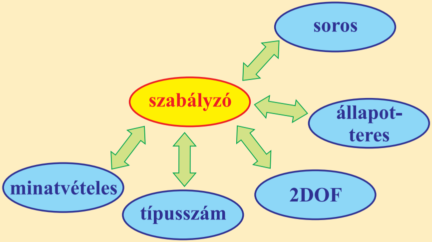
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



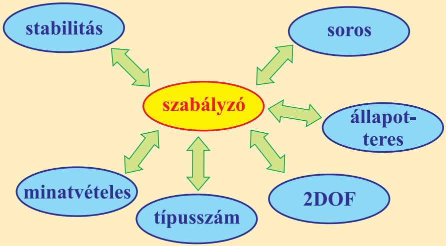
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



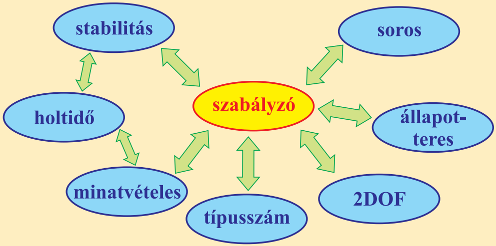
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



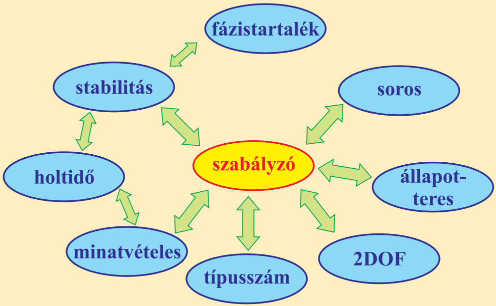
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



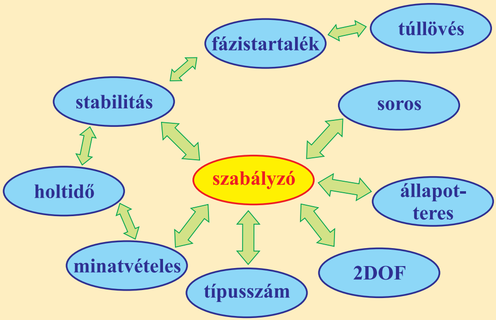
Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



Eddigi kulcsfogalmak

Szabályzó



Tudáshálót építünk.

Az előző részek tartalmából

(Lineáris) Állapotegyenlet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ az állapotvektor
- $u \in \mathbb{R}^m$ a bemenetek vektora
- $y \in \mathbb{R}^p$ a kimenetek vektora

Általában $m \leq n$ és $p \leq n$.

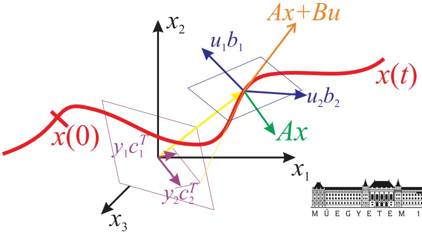
SISO rendszer

$p = m = 1$

Mátrixok méretei

Első index az sorok, második az oszlopok száma.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$C \in \mathbb{R}^{p\times n} \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$



Az előző részek tartalmából

Irányíthatóság és elérhetőség - LTI eset

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Irányíthatóság $\equiv$ elérhetőség: az (A, B) pár irányítható, ha egy véges T időintervallumhoz, továbbá x_0 és x_T állapotokhoz található egy lépcsős $\bar{u}(t)$ bemenet, hogy a hozzá tartózó $\bar{x}(t)$ megoldásra teljesül: $\bar{x}(0) = x_0$ és $\bar{x}(T) = x_T$.

Tétel (Kálmán-kritérium) irányíthatóságra

LTI rendszerek esetében az (A, B) pár irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

irányíthatósági mátrix rangja n legyen.

Az előző részek tartalmából

Megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság - LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$$

Egy x_0 állapot megfigyelhető, ha a rendszert $x(0) = x_0$ kezdeti állapotból indítva és $0 < T$ véges ideig megfigyelve az $y(t)$ kimenetet és $u(t)$ bemenetet, azokból x_0 meghatározható. A rendszer megfigyelhető, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ állapot megfigyelhető.

Tétel (Kálmán-kritérium) megfigyelhetőségre

LTI rendszerek esetében az (A, C) pár megfigyelhetőségének feltétele, hogy a

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T$$

ún. megfigyelhetőségi mátrix (observability matrix) rangja maximális, azaz n legyen.

Az előző részek tartalmából

Ackermann-képlet

Adott egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix és egy $B \in \mathbb{R}^n$ vektor. Keressük a $K \in (\mathbb{R}^n)^T$ sorvektort, hogy a $H = (A - BK) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sajátértékei egy előírt

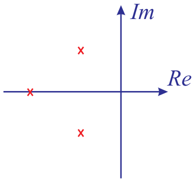
$$\det(\lambda I - H) = \lambda^n + h_1 \lambda^{n-1} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n = \varphi_c(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

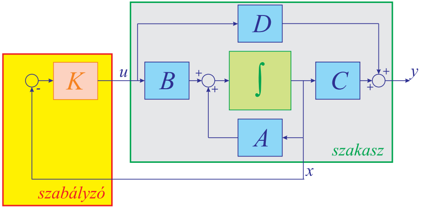
$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \varphi_c(A)$$

ami az ún. Ackermann-képlet. (Matlab támogatás: `acker`)

Az előző részek tartalmából



Pólusáthelyezés.



Hatásvázlat állapotvisszacsatoláskor.

Állapotvisszacsatolás

$u = -Kx$, azaz a beavatkozó jel az állapotok lineáris kombinációja minden időpillanatban.

K-t az Ackermann-képlettel kapjuk

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \varphi_c(A)$$

Miért van szükség mintavételezésre?

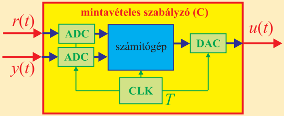
Szabályozók megvalósítása

A szabályozókat számítógépek valósítják meg. A számítógépek működése diszkrét (nem folytonos):

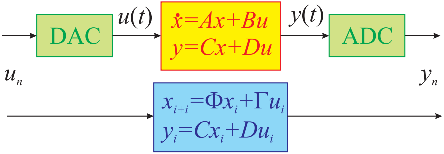
1. mind értékkészletben,
2. mind időtartományban,

Következmények

1. Jelátalakítókra van szükség.
2. A számítógép a szabályzó elemeinek mintavételes megfelelőjét futtatja (megfigyelő, állapotvisszacsatolás, alapjelhez tartozó erősítések).



Jelátalakítók és átvitelek együtt



$$\Phi = e^{AT}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\theta} d\theta \cdot B$$

(T - mintavételi periódusidő)

A jelátalakítók típusai

1. DAC: nulladrendű tartószerv
2. ADC: mintavételező

A folytonos állapotegyenlet lépcsős bemenetet kap.

Matlab támogatás

`c2d` függvény a `'zoh'` opcióval. (Mint az egységugrás-ekvivalencia.)

Mintavételes szintézis útjai

1. opció

1. Folytonos időben méretezzük a szabályzó elemeit (becslő, állapotvisszacsatolás, erősítések).
2. Megállapítjuk a T mintavételi periódusidőt (sávszélesség vagy a zárt kör domináns póluspárja alapján).
3. Kiszámítjuk a szabályzó elemeinek diszkrét idejű ekvivalensét.

2. opció

1. Megállapítjuk a T mintavételi periódusidőt (kívánt sávszélesség vagy a zárt kör domináns póluspárja alapján).
2. Kiszámítjuk a szakasz állapotegyenletének diszkrét idejű ekvivalensét.
3. Diszkrét időben méretezzük a szabályzó elemeit (becslő, állapotvisszacsatolás, erősítések).

Az előadás didaktikai célja

A hallgató

1. megismeri a diszkrét idejű állapotegyenlet megoldását,
2. megismeri az algebrai hasonlóságokat és különbségeket az irányíthatóság, elérhetőség, megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság fogalmai között diszkrét és folytonos idejű modellek esetén,
3. képes visszavezetni a pólusáthelyezést az Ackermann-képletre,
4. tisztában van az aktuális megfigyelő fogalmával és képes annak megtervezésére,
5. megismeri az alapjel figyelembe vételére szolgáló erősítések meghatározásának módját,

Tartalom

Tartalom

MŰEGYETEM 1782

Diszkrét idejű állapotegyenlet megoldása

Állapotegyenlet

Csak időben állandó rendszerekkel foglalkozunk

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \Phi x_i + \Gamma u_i \\ y_i &= C x_i + D u_i \end{aligned}$$

(D-t többnyire nullának tekintjük.)

Az állapotegyenlet megoldása

Legyen a kezdeti állapot x_0.

$$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j$$

Diszkrét idejű állapotegyenlet megoldása

Megoldás a kimenettel együtt

$$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j$$

$$y_k = C\Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C\Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j + D u_k$$

Tartalom

Elérhetőség és irányíthatóság - definíciók

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \Phi x_i + \Gamma u_i \\ y_i &= C x_i + D u_i \end{aligned}$$

Megjegyzések

1. Hasonlóság a folytonos idejű definíciókkal.
2. Csak időinvariáns eset.

Elérhetőség

Minden $x_v \in \mathbb{R}^n$ állapotba el lehet jutni az állapottér origójából n mintavétel után, azaz létezik $\{u_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, melyre $x_n = x_v$.

Irányíthatóság

Minden $x_0 \in \mathbb{R}^n$ állapotból el lehet jutni az állapottér origójába n mintavétel után, azaz létezik $\{u_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, melyre $x_n = 0$.

Tartalom

Elérhetőség kritériuma

Az állapotegyenlet megoldása, ha az origóból indulunk ($x_0 = 0$):

$$x_1 = \Gamma u_0$$

$$x_2 = \Phi x_1 + \Gamma u_1 = \Phi\Gamma u_0 + \Gamma u_1$$

$$\vdots$$

$$x_n = \Phi^{n-1}\Gamma u_0 + \Phi^{n-2}\Gamma u_1 + \cdots + \Phi\Gamma u_{n-2} + \Gamma u_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi^{n-(j+1)}\Gamma u_j$$

amit átrendezve észrevesszük a már korábban definiált irányíthatósági mátrixot

$$x_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}}_{M_c} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = M_c^{-1} x_n$$

Elérhetőség kritériuma

Elérhetőség kritériuma diszkrét idejű rendszereknél

Az $x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$ állapotegyenlettel adott rendszer akkor és csak akkor elérhető, ha $\exists M_c^{-1}$, ami egyenértékű azzal, hogy $\operatorname{rank}(M_c) = n$.

Megjegyzés

1. Megegyezik a folytonos idejű, időinvariáns rendszerekre kapott kritériummal.
2. Nagyobb hatványokra a Cayley-Hamilton tétel miatt nincs szükség.

Tartalom

Irányíthatóság kritériuma

Nullától különböző x_0 állapotból az origóba kívánunk eljutni.

$$0 = \Phi^n x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}}_{M_c} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Tehát olyan u_i bemeneti sort kell találnunk, melyre

$$\Phi^n x_0 = -M_c \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = -M_c u.$$

Kérdés

Mindig szükség van M_c invertálhatóságára u számításához?

Irányíthatóság kritériuma

Egy új definíció: reverzibilitás

Egy $x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$ rendszer reverzibilis, ha x_{i+1}-ből és u_i-ből visszaállítható x_i. (A reverzibilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $\exists \Phi^{-1}$.

Előző fóliáról

$$\Phi^n x_0 = -M_c u.$$

Irányíthatóság kritériuma

Az $x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$ akkor és csak akkor irányítható, ha az Φ^n mátrix képtere része M_c mátrix képterének. ($\text{range}(\Phi^n) \subset \text{range}(M_c)$).

Következmény

Ha az $x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$ rendszer reverzibilis (azaz $\text{range}(\Phi^n) = \mathbb{R}^n$ és $\exists \Phi^{-n}$), akkor az irányíthatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy $\exists M_c^{-1}$.

Az algebrai hasonlóság a folytonos idejű rendszerekkel nem teljes!

Tartalom

Megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság - definíciók

Továbbra is az állapotegyenlet megoldásából indulunk ki.

$$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j \qquad y_k = C\Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C\Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j + Du_k$$

$$\bar{y}_k = y_k - \sum_{j=0}^{k-1} C\Phi^{k-(j+1)} \Gamma u_j - Du_k \qquad \bar{y}_k = C\Phi^k x_0$$

Megfigyelhetőség

Tekintsük a $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ megfigyeléseket és az $\{u_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ bemeneteket a fenti rendszer esetében. Ha ezekből x_0 egyértelműen meghatározható, akkor a rendszer megfigyelhető.

Rekonstruálhatóság

Tekintsük a $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ megfigyeléseket és az $\{u_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ bemeneteket a fenti rendszer esetében. Ha ezekből x_n egyértelműen meghatározható, akkor a rendszer rekonstruálható.

Tartalom

Megfigyelhetőség kritériuma

Az állapotegyenlet megoldása, ha az origóból indulunk ($x_0 = x(0)$):

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_0 &= Cx_0 \\
\bar{y}_1 &= C\Phi x_0 \\
&\vdots \\
\bar{y}_{n-1} &= C\Phi^{n-1}x_0
\end{aligned}
$$

amit átrendezve észrevesszük a már korábban definiált megfigyelhetőségi mátrixot

$$
\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{M_o} x_0 \qquad x_0 = M_o^{-1}\bar{y}
$$

Megfigyelhetőség kritériuma

Megfigyelhetőség kritériuma diszkrétidejű rendszereknél

Az $x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i$ és $y_i = Cx_i + Du_i$ egyenletekkel adott rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető, ha $\exists M_o^{-1}$, ami egyenértékű azzal, hogy $\mathrm{rank}(M_o) = n$.

Megjegyzés

1. Megegyezik a folytonos idejű, időinvariáns rendszerekre kapott kritériummal.
2. Nagyobb hatványokra a Cayley-Hamilton tétel miatt nincsen szükség.

Tartalom

Rekonstruálhatóság kritériuma

Annyit kell tenni hogy x_n-et kifejezzük x_0-val!

$$x_n = \Phi^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi^{n-(j+1)} \Gamma u_j = \Phi^n x_0 + M_c u = \Phi^n M_o^{-1} \bar{y} + M_c u \quad (1)$$

$$\Phi^{-n} x_n = x_0 + \Phi^{-n} M_c u \quad (2)$$

Mindkét oldalt megszorozva a megfigyelhetőségi mátrixszal

$$M_o \Phi^{-n} x_n = M_o x_0 + M_o \Phi^{-n} M_c u = \bar{y} + M_o \Phi^{-n} M_c u \quad (3)$$

$\exists M_o^{-1} \Rightarrow$ rekonstruálhatóság

Ez következik (1)-ből.

Reverzibilis rendszer esete

Ha a rendszer reverzibilis ($\exists \Phi^{-1}$), akkor a rekonstruálhatóságból következik, hogy $\exists M_o^{-1}$. Ez pedig (3)-ből következik.

Az algebrai hasonlóság a folytonos idejű rendszerekkel nem teljes!

Tartalom

Eszközünk: az Ackermann-képlet

Feladat

Adott egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix és egy $B \in \mathbb{R}^n$ vektor. Keressük az a K $(\mathbb{R}^n)^T$ sorvektor, hogy a $H = (A - BK) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sajátértékei egy előírt

$$\det(\lambda I - H) = \lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n = \varphi_c(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Megjegyzés

A BK (oszlopvektor $\times$ sorvektor) egy ún. diád. Tehát egy diád segítségével kívánjuk elmozgatni A sajátértékeit az előírt helyekre.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1}\varphi_c(A)$$

ami az ún. Ackermann-képlet. (Matlab támogatás: `acker`)

Szabályzótervezés

Specifikáció

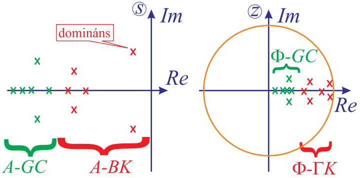
Sajátértékek előírása folytonos időben:

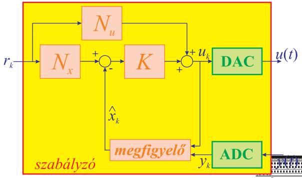
- állapotvisszacsatoláshoz
- állapotbecslőhöz

Áttérés diszkrét időre: $z = e^{sT}$ (T - mintavételi periódusidő)

Szabályzó elemei

1. állapotvisszacsatolás
2. állapotbecslő (aktuális)
3. alapjelhez tartozó erősítések
4. „Extrák”:
   1. terhelésbecslő
   2. integrátor





Állapotteres szabályzó tervezése diszkrét időben

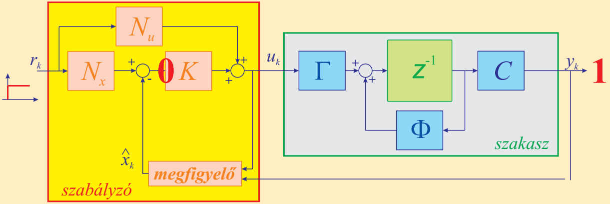
Hasonlóságok és eltérések a folytonos idejű esethez képest

1. Mindent azonos algebrai feladatra vezetünk vissza (pólusáthelyezés).
2. A stabil pólusok diszkrét időben az egységkörön belül vannak.
3. Aktuális megfigyelőt tervezünk diszkrét időben.
4. Végértéket másképpen számoljuk az alapjel figyelembe vételekor.
5. A kiterjesztett modellek alakja különbözik a két esetben.

N_x és N_u meghatározása az alapjelhez

Elgondolás

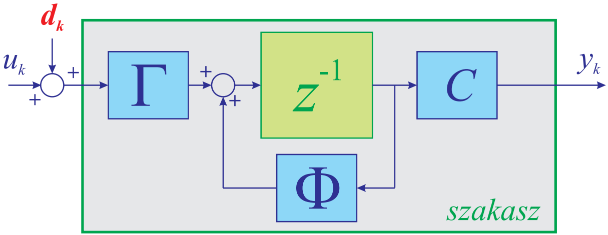
Egységugrás alapjel estén ($r_k = \varepsilon_k$) beállítjuk a végértékeket az erősítések segítségével.



Egyenletek a végértékekből

$$\begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bemeneti zavarás (terhelés)



Jellemzők

A d zavarás (disturbance) általában járulékos terhelést jelent, amely meghamisítja a beavatkozó jelet.

A zavarás diszkrét idejű modellje

1. értéke ismeretlen,
2. értéke hosszú ideig jó közelítéssel állandó ($d_{k+1} = d_k$).

Elgondolás a bemeneti zavarás kompenzálására

Megjegyzés

A konstans, de ismeretlen d_k zavarás olyan, mintha egy állapot lenne, amely befolyásolja a kimenetet, de nem ismerjük kezdeti értékét.

Felismerés

Ugyanakkor van eszközünk arra, hogy egy állapot kezdeti értékét megbecsüljük, amennyiben a kimeneten annak hatását megfigyelhetjük: (aktuális) állapotmegfigyelő.

Következtetés

Egészítsük ki (bővítsük) az állapotokat d értékével és készítsünk becslőt a bővített rendszerhez!

Állapotbecslő a bővített rendszerhez

Legyen $x_{d,k}$ a zavarásnak megfelelő állapot!

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma(x_{d,k} + u_k) = \Phi x_k + \Gamma x_{d,k} + \Gamma u_k$$
$$x_{d,k+1} = x_{d,k}$$

Átrendezve mátrixos alakba

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{d,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix}$$

Bevezetve $\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k & x_{d,k} \end{bmatrix}$ bővített állapotot ugyanez tömörebben

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}\tilde{x}_k + \tilde{\Gamma}u_k \qquad y = \tilde{C}\tilde{x}_k$$

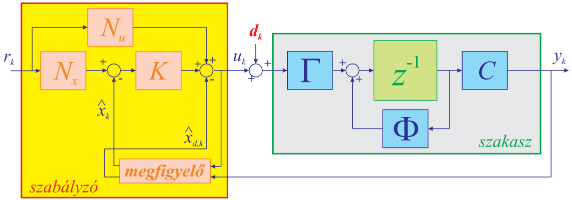
Állapotbecslő a bővített rendszerhez

Becslő

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{d,k+1} \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{d,k} \end{bmatrix} + \tilde{H}u_k + \tilde{G}y_{k+1}$$

Ackermann-képlettel

$$\tilde{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\tilde{M}_o^T)^{-1} \varphi_o(\tilde{\Phi}^T)$$



Integrátor

Miért volt jó az integrátor hatása?

1. zavarás elnyomása,
2. paraméterbizonytalanságok kiküszöbölése.

Elgondolás - most is új állapot

A kimenet integrálját is állapotként kezeljük és diszkrét időben közelítjük

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + Ty_k = x_{I,k} + TCx_k$$

(bal oldali téglalap szabály - LSR).

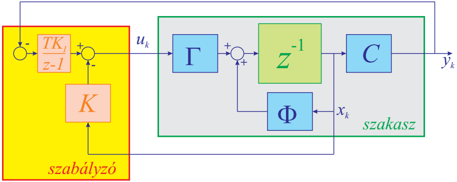
Bővített állapotegyenlet és visszacsatolás

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{I,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ TC & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix}$$

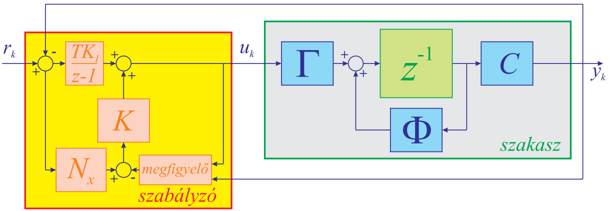
A terhelésbecslőhöz hasonlóan bevezethetjük a $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_k & x_{I,k} \end{bmatrix}$ jelölést:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k \qquad y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k$$



$$\begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_c^{-1} \varphi_c(\tilde{\Phi})$$

Integráló visszacsatolás megfigyelővel és alapjellel



Megfigyelő

Az eredeti rendszerhez tervezendő és $\hat{x}_k$-t állítja elő.

Alapjel figyelembe vétele

Az eredeti rendszerhez tervezendő, de csak az N_x csatornát használjuk fel.