ANALÍZIS 1. | **II. ZÁRTHELYI** | **2012. november 15.**
Mérnök informatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (8 pont)
A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{4x+1}=3.$$

Legyen $\varepsilon>0$.

$$\left|\sqrt{4x+1}-3\right| =_{\mathbf{3p}} \left|\frac{4x+1-9}{\sqrt{4x+1}+3}\right| \le_{\mathbf{3p}} \frac{4|x-2|}{3}<\varepsilon,$$

ha $|x-2|<\frac{3}{4}\varepsilon$, tehát $\delta(\varepsilon)=\frac{3}{4}\varepsilon$. (**2 pont**)

---

2. feladat (27 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\,(2^x-1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^5+5x)}{\sqrt[3]{x}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{x}\right)$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

---

a) $\lim_{x\to 0}(2^x-1) =_{\mathbf{1p}} 0$, az arctg függvény korlátos (**2 pont**), így

$$\lim_{x\to 0}\,(2^x-1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{\mathbf{2p}}{=} 0.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln(x^5+5x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty$, így alkalmazható a l'Hospital szabály (**1 pont**):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^5+5x)}{\sqrt[3]{x}} \overset{l'H}{=}_{\mathbf{3p}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4+5}{x^5+5x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = 3\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}x^4}{x^5}\frac{\left(5+\frac{5}{x^4}\right)}{1+\frac{5}{x^4}} \underset{\mathbf{2p}}{=} 0$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$ (**1 pont**), de $\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{x}\right) =_{\mathbf{1p}} \frac{x-\operatorname{sh}x}{x\operatorname{sh}x}$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x-\operatorname{sh}x}{x\operatorname{sh}x} \overset{l'H}{=}_{\mathbf{3p}} \lim_{x\to 0-}\frac{1-\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x} \overset{l'H}{=}_{\mathbf{2p}} \lim_{x\to 0-}\frac{-\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x} =_{\mathbf{1p}} 0.$$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)=0$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\operatorname{tg} x)=-\infty$ (**1 pont**), de

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} =_{\mathbf{3p}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} e^{\ln(\sin x)\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\ln(\sin x)\operatorname{tg} x}.$$

A kitevőben lévő $0\cdot\infty$ típusú határértékre alkalmazható a l'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\ln(\sin x)\operatorname{tg} x =_{\mathbf{1p}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} =_{\mathbf{2p}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =_{\mathbf{1p}} 0,$$

így $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=e^0=1$.

---

3. feladat (13 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x)=\frac{|x^3-4x^2+4x|}{x^3-4x}$$

függvénynek?

A függvény folytonos függvények hányadosa, így csak a nevező zérushelyeinél van szakadása. $x^3-4x=x(x+2)(x-2)$, tehát a függvénynek az $x=0$, $x=2$, $x=-2$ pontokban van szakadása (**2 pont**).

$$\lim_{x\to0\pm}f(x)=\lim_{x\to0\pm}\frac{|x^2-4x+4|}{x^2-4}\frac{|x|}{x}=-\lim_{x\to0\pm}\frac{|x|}{x}=\mp1,$$

így a függvénynek az $x=0$ pontban véges ugrása van. (**4 pont**)

$$\lim_{x\to2\pm}f(x)=\lim_{x\to2\pm}\frac{|x|}{x^2+2x}\frac{|x-2|^2}{x-2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to2\pm}\frac{|x-2|}{x-2}|x-2|=0,$$

így a függyvénynek az $x=2$ pontban megszüntethető szakadása van. (**4 pont**)

$$\lim_{x\to-2\pm}f(x)=\lim_{x\to-2\pm}\frac{|x^3-4x^2+4x|}{x^2-2x}\frac{1}{x+2}=4\lim_{x\to-2\pm}\frac{1}{x+2}=\pm\infty,$$

így a függyvénynek az $x=-2$ pontban másodfajú szakadása van. (**3 pont**)

---

4. feladat (18 pont)
Igazolja, hogy az
$$f(x) = 4 - 3\arcsin(e^{2x} - 2)$$
függvény invertálható a teljes értelmezési tartományon, és adja meg az inverzfüggvényt, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját.

$f'(x) = -3\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{1-(e^{2x}-2)^2}} < 0$, ha $e^{2x} - 2 \in [-1, 1]$, azaz $x \in D_f = \left[0, \frac{\ln 3}{2}\right]$, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő, így invertálható (**5 pont**).

$$y = 4 - 3\arcsin(e^{2x} - 2) \Leftrightarrow \frac{4-y}{3} = \arcsin(e^{2x} - 2) \Leftrightarrow 2 + \sin\frac{4-y}{3} = e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sin\frac{4-y}{3}\right),$$
vagyis $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sin\frac{4-x}{3}\right)$ (**4 pont**), ha $x \in R_f = \left[4 - 3\cdot\frac{\pi}{2}, 4 - 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$, vagyis $D_{f^{-1}} =_{\mathbf{3p}} \left[4 - \frac{3\pi}{2}, 4 + 3\frac{3\pi}{2})\right]$, $R_{f^{-1}} =_{\mathbf{2p}} \left[0, \frac{\ln 3}{2}\right]$, és
$$\left(f^{-1}\right)'(x) =_{\mathbf{4p}} \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{3}\cos\frac{4-x}{3}}{2 + \sin\frac{4-x}{3}}.$$

---

5. feladat (11 pont)
Hol folytonos illetve differenciálható az alábbi függvény?
$$g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$
Írja fel a deriváltat, ahol létezik!

Az $x = 0$ ponton kívül a függvény differenciálható függvények kompozíciója és szorzata, vagyis differenciálható(**2 pont**), így folytonos is (**1 pont**). $x \neq 0$ esetén tehát
$$g'(x) =_{\mathbf{3p}} \sin\frac{1}{x^2} + x\cdot\frac{-2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2} = \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}.$$
$\lim_{x\to 0} x = 0$, és a sin függvény korlátos, így a függvény folytonos az $x = 0$ pontban is, hiszen $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$. (**2 pont**)
A differenciálhányados definíciója alapján:
$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2},$$

ami nem létezik ($x_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$ és $y_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}}$ sorozatok mentén különböző határértéket kapunk), így g nem differenciálható az $x = 0$ pontban (**3 pont**).

---

6. feladat (11 pont)
a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

függvény monoton növő illetve monoton csökkenő.
b) Felveszi-e a függvény a maximumát a $[0, 2]$ intervallumon? Ha igen, számolja ki a maximumot.

---

a) $D_f = \mathbb{R}$, mert a nevező mindig pozitív.

$$f'(x) =_{\mathbf{2p}} \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =_{\mathbf{1p}} \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$

4 pont

b) f folytonos függvények hányadosa, a nevező miindig pozitív, így alkalmazható a második Weierstrass tétel, mely szerint folytonos függvény korlátos és zárt intervallumon felveszi a maximumát, vagy a lokális maximumhelyen, vagy az intervallum határán (**2 pont**). A maximum értéke tehát:

$$\max(f(0), f(1), f(2)) = \max\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

2 pont

---

7. feladat (12 pont)
a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}$$

függvény konvex illetve konkáv.
b) Van-e a függvénynek inflexiós pontja? Ha igen, írja fel a függvénygörbe érintőegyeneseinek egyenletét az inflexiós pontokban.

---

a) $D_f = [0, \infty)$, és

$$f''(x) =_{\mathbf{2p}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\right)' =_{\mathbf{2p}} \left(-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4x}\right) e^{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow_{\mathbf{2p}} -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4x} > 0 \Leftrightarrow_{\mathbf{2p}} x < 1,$$

	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	infl.pont	$\cap$

3 pont

b) A függvénynek inflexiós pontja van az $x = 1$ pontban, $f(1) = e$, $f'(1) = \frac{e}{2}$, tehát az érintőegyenes egyenlete:

$$y - e = \frac{e}{2}(x - 1).$$

3 pont

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{\sin(5x^2)}, \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

---

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2)}{\sin(5x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2)}{2x^2} \cdot \dfrac{5x^2}{\sin(5x^2) \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}}$ **6 pont**

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + x^2 + x + 1 = 4$ **4 pont**

---

9. feladat (10 pont)
Írja fel az alábbi függvények deriváltjait:

$$f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x}{e^x}, \qquad g(x) = \sin(\ln(x^2 + 2x)).$$

$f'(x) = \dfrac{e^x(\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x) - e^x x \operatorname{ch} x}{e^{2x}} = \dfrac{\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x}{e^x}$ **5 pont**

$g'(x) = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x} \cos(\ln(x^2 + 2x)).$ **5 pont**