A2X VIZSGA

2011. JANUÁR 6.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	20	20	20	20	20	100
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1.) Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\mathbf{v}_1 := (1,2,1), \quad \mathbf{v}_2 := (2,9,0), \quad \mathbf{v}_3 := (3,3,4)$$

vektorok bázist alkotnak-e $\mathbf{R}^3$-ban.

2.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi halmaz alteret alkot-e P_2-ben (a legfeljebb másodfokú komplex együtthatós polinomok terében)

$$\mathbf{S} := \{p(z) \in P_2 | p(2) = 1\}.$$

3.) Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

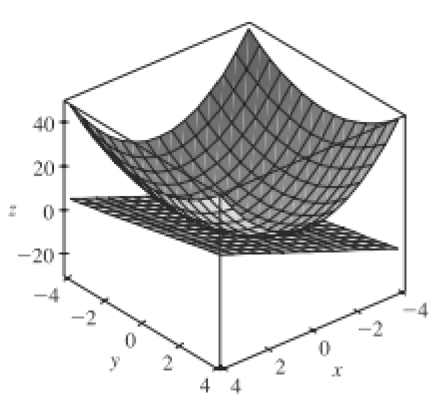
$$f(x,y) : \;= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{ha}\, x \neq 0, \\ 0 & \text{ha}\, x = 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg mindazon pontokat a síkon, ahol az f folytonos.

4.) Határozzuk meg a konvergencia tartományát az alábbi hatványsornak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n.$$

5.) Határozzuk meg a $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloid érintősíkjának az egyenletét az $(1,1,3)$ pontban.



MEGOLDÁS VÁZLAT

1.) Ha megmutatjuk, hogy lineárisan függetlenek, akkor tétel szerint **bázis** (6p). (A tér dimenziójával megegyező számú lineárisan független vektor bázist alkot.)

$$c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}\,(4p)$$

azaz

$$c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4) = (0,0,0)$$

$$(c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3) = (0,0,0)\,(4p)$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$c_1, c_2, c_3 = 0\,(4p)$$

tehát lineárisan **függetlenek** (2p).

2.) A P_2-beli $\mathbf{0}$ null-vektorra teljesül, hogy $\mathbf{0}(z) = 0$ minden $z \in \mathbf{C}$-re. Mivel $\mathbf{0}(2) = 0 \neq 1$, ezért a null-vektor nincs $\mathbf{S}$-ben, következésképpen nem altér.

3.) Az origótól különböző helyeken folytonos, mert ott folytonos függvények hányadosa. (4p)

Legyen $y := mx$. Ekkor

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}\,(2p)$$

Ezért

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0\,(4p)$$

Másrészt, legyen $x := y^2$. Ekkor

$$f(x,y) = f(y^2,y) = \frac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{1}{2}\,(2p)$$

Ezért

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \frac{1}{2}\,(4p)$$

Mivel a két határérték különbözik, ezért az f függvény nem folytonos az origóban (4p).

4.) Jelölje

$$a_n := \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Ekkor a konvergencia sugárra

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} \ (4p) \\ &= \frac{1}{\lim_n \frac{3}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}}}} \ (4p) \\ &= \frac{1}{\lim_n \frac{3}{\sqrt{\sqrt[n]{n+1}}}} \ (1p) \\ &= \frac{1}{3}. \ (1p) \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a végpontokat.

$x := -\frac{1}{3}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \ (3p) \end{aligned}$$

Mivel $\sum \frac{1}{n}$ divergens (vagy mert $1/2 < 1$), a sor divergens. (2p)

$x = \frac{1}{3}$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \ (3p)$$

Mivel az alternáló sorokra vonatkozó Leibnitz tétel feltételei teljesülnek (az $\{1/\sqrt{n+1}\}$ sorozat monoton konvergál 0-hoz), ezért a sor konvergens. (2p). Tehát a konvergencia tartomány $(-1/3,\ 1/3]$.

5.) Legyen

$$f(x, y) := 2x^2 + y^2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 4x, \\ D_2 f(x, y) &= 2y, \\ D_1 f(1, 1) &= 4, \\ D_2 f(1, 1) &= 2. \end{aligned}$$

Ezt használva a sík egyenlete

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1),$$

rendezés után

$$z = 4x + 2y - 3.$$