

HÁLÓZATOK ÉS RENDSZEREK II

2. házi feladat : Diszkrét idejű hálózatok vizsgálata

Név : **Erdős Péter** **RL0G0X** tk. : **1** törzsszám :

Javító : konzultációs idő : ábra:

Beadási határidők 1.rész : elfogadta :

2.rész :

3.rész :

Megjegyzések: Mindenkinek le kell töltenie a feladatlapot, a megadott hálózat ábráját, és a feladatlap fejlécét ki kell tölteni. Ha javítás ill.részfeladat megoldásának külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is és a feladatlapot is (az ábrával) be kell adni. Javítás esetén a hibás részt nem szabad kicserélni még akkor sem, ha valamelyik pontot előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, hogy melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra és arra, hogy a teljes megoldást részletesen le kell írni, nem elegendő csak az eredményeket közölni. A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére alkalmazhat számítógépes programokat (ANDI, DERIVE, MATLAB stb), de a megoldás elvi lépéseit akkor is részletesen le kell írni!

1. Vizsgálat az időtartományban

- 1.1. Határozza meg az ábrán vázolt diszkrét idejű hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját!
- 1.2. Határozza meg a sajátértékeket! Döntse el, hogy stabilis-e a hálózat! Ha nem stabilis, változtasson meg erősítést (esetleg többet) úgy, hogy a hálózat stabilis legyen, majd oldja meg újra az 1.1.feladatot! A hálózaton végzett módosítással nem csökkentheti a hálózat rendjét, nem teheti triviálissá a hálózatot, és nem vehet fel további komponenst! Minden további feladatot az így stabilissá tett hálózaton végezzen el!
- 1.3. Az állapotváltozós leírás ismeretében számítsa ki és ábrázolja az impulzusválaszt a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ütemre! Adja meg az impulzusválaszt analitikus alakban is!
- 1.4. A hálózat gerjesztése : $s[k] = \varepsilon[k](F + Gp^k)$. Határozza meg a választ az impulzusválasz ismeretében a $k = 0, 1, \dots, 5$ értékekre!
- 1.5. (Nem kötelező). Ellenőrizze a numerikus eredményeket az ANDI programmal!

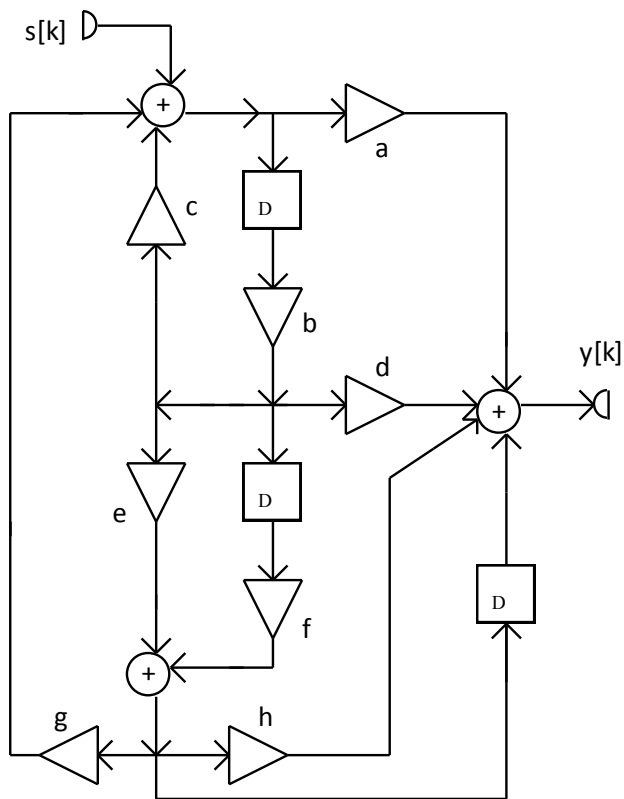
2. Vizsgálat a frekvenciatartományban

- 2.1. Határozza meg a hálózat átviteli karakterisztikáját a hálózatra felírt frekvenciatartománybeli egyenletek alapján! Adja meg és ábrázolja az amplitúdó karakterisztikát a $(-2\pi, +2\pi)$ tartományon!
- 2.2. Az $s[k] = \text{Scos}(\vartheta_0 k + \rho)$ gerjesztőjel esetére határozza meg a válasz gerjesztett összetevőjének időfüggvényét! Ábrázolja az $s[k]$ és az $y_g[k]$ jeleket a $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ értékekre! Vizsgálja meg, hogy periodikusak-e a jelek, és ha igen, adja meg a periódust! Mi a feltétele annak, hogy az $y_g[k]$ jelnek legyen fizikai tartalma?
- 2.3. Egy 6 periódusú $s[k]$ gerjesztőjel egy periódusának értékei a mellékelt táblázatban adottak. Határozza meg ezen gerjesztőjel Fourier sorának valós és komplex alakját, és ellenőrizze, hogy a Fourier sorral számított értékek valóban az adott $s[k]$ értékeket szolgáltatják!
- 2.4. Határozza meg a fenti periodikus gerjesztéshez tartozó válasz gerjesztett összetevőjének valós alakú Fourier sorát, adja meg és ábrázolja egy periódusának értékeit!
- 2.5. Az 1.3.-ban kiszámított impulzusválasz Fourier transzformálásával határozza meg az impulzusválasz komplex spektrumát, és hozza azt polinom/polinom alakra! Vesse az eredményt össze 2.1. eredményével!
- 2.6. Az átviteli karakterisztika ismeretében írja fel a hálózat rendszeregyenletét!
- 2.7. (Nem kötelező) Ellenőrizze a 2.1. és a 2.2. pont eredményeit az ANDI programmal!

3. Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

- 3.1. Határozza meg a hálózat átviteli függvényét a z-tartománybeli egyenletek felírása vagy az állapotváltozós leírás alapján! Vesse össze az eredményt az átviteli karakterisztika kifejezésével!
- 3.2. Határozza meg az átviteli függvény zérusait és pólusait! Ábrázolja a pólus - zérus elrendezést! Vizsgálja meg ennek alapján a hálózat gerjesztés- válasz stabilitását!
- 3.3. Határozza meg az átviteli függvény alapján a hálózat impulzusválaszát analitikus alakban, és vesse össze az eredményt az 1.3.-ban kapottal ! Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1, \dots, 5$ -re polinom-osztáson alapuló inverz transzformációval!
- 3.4. Határozza meg a választ analitikus alakban, ha a gerjesztő jel: $s[k] = \varepsilon[k] (F + Gp^k)$!
- 3.5. Adjon meg egy olyan kanonikus hálózatot, amelynek a vizsgálttal megegyező az átviteli függvénye, és adja meg a hálózat rendszeregyenletét!
- 3.6. A rendszeregyenlet alapján a fokozatos behelyettesítés módszerével ellenőrizze a 3.4.feladat megoldását a $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ ütemre!
- 3.7. (Nem kötelező) Adjon meg egy olyan nem zérus gerjesztést, amelyhez tartozó válasz véges idejű! Adja meg a választ is!
- 3.8. (Nem kötelező) Az ANDI program felhasználásával ellenőrizze eredményeit!

A javító megjegyzései:



Erősítések

a	b	c	d	e	f	g	h
0,9	0,5	0,7	0,6	0,8	0,8	0,9	0,7

1.4.

F	G	p
2,5	-1,5	0,5

2.2.

S	ϑ_0	ρ
5	$0,16\pi$	$0,46\pi$

2.3. s[k] értékei

k	0	1	2	3	4	5
	-2	-4	7	9	-3	1

1. Feladat

1.1.

Az állapotváltozós leírás normál alakja az eredeti hálózattal:

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 0,71x_1[k] + 0,72x_2[k] + 0x_3[k] + 1s[k] \\x_2[k+1] &= 0,5x_1[k] + 0x_2[k] + 0x_3[k] + 0s[k] \\x_3[k+1] &= 0,4x_1[k] + 0,8x_2[k] + 0x_3[k] + 0s[k] \\y[k] &= 1,219x_1[k] + 1,208x_2[k] + 1x_3[k] + 0,9s[k]\end{aligned}$$

1.2.

Sajátértékek számítása MATLAB-bal:

```
>> A = [0.71 0.72 0; 0.5 0 0; 0.4 0.8 0]; % 'A' matrix
>> eig(A) % sajátértékek számítása
... → λ1 = 0; λ2 = -0,3422; λ3 = 1,0522
```

Mivel $|\lambda_i| < 1$ nem teljesül, a rendszer nem stabil.

$c = 0,7$ értéket átírva $c = 0,3$ -ra az új állapotváltozós leírás:

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 0,51x_1[k] + 0,72x_2[k] + 0x_3[k] + 1s[k] \\x_2[k+1] &= 0,5x_1[k] + 0x_2[k] + 0x_3[k] + 0s[k] \\x_3[k+1] &= 0,4x_1[k] + 0,8x_2[k] + 0x_3[k] + 0s[k] \\y[k] &= 1,039x_1[k] + 1,208x_2[k] + 1x_3[k] + 0,9s[k]\end{aligned}$$

MATLAB segítségével újra elvégezzük a számításokat, így:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0; \lambda_2 = -0,3969 \\ \lambda_3 &= 0,9069\end{aligned}$$

Ekkor már minden sajátérték abszolútértéke kisebb, mint 1, tehát a hálózat aszimptotikusan és így gerjesztés-válasz stabil is.

1.3.

Az impulzusválasz analitikus alakban:

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(\underline{C}^T \underline{L}_1 \underline{B} \lambda_1^{k-1} + \underline{C}^T \underline{L}_2 \underline{B} \lambda_2^{k-1} + \underline{C}^T \underline{L}_3 \underline{B} \lambda_3^{k-1} \right), \text{ ahol } \underline{L}_i \text{ az A mátrix Langrange-mátrixai.}$$

L_i számítása MATLAB-bal:

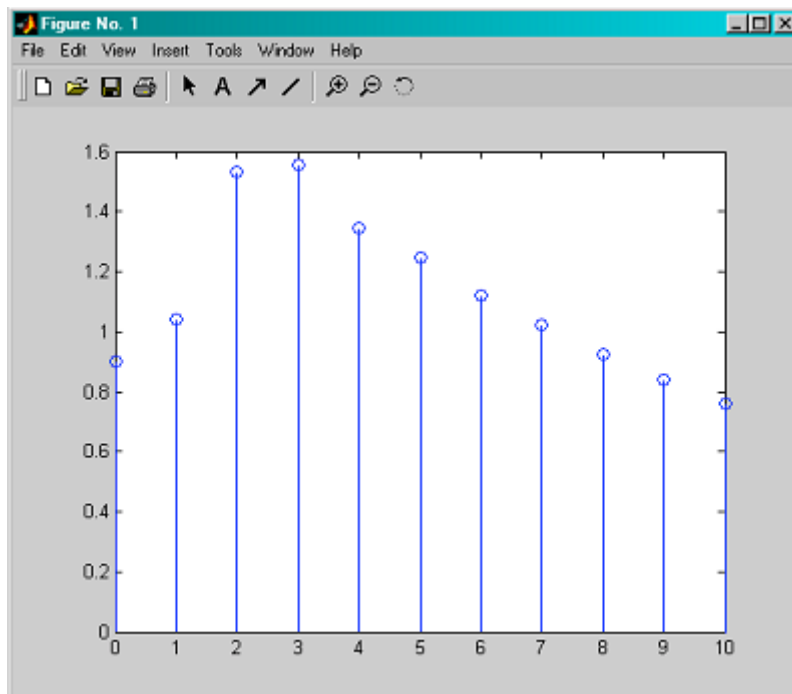
```
>> L1 = ((A-la(2)*E)*(A-la(3)*E))/((la(1)-la(2))*(la(1)-la(3)));
>> L2 = ((A-la(1)*E)*(A-la(3)*E))/((la(2)-la(1))*(la(2)-la(3)));
>> L3 = ((A-la(1)*E)*(A-la(2)*E))/((la(3)-la(1))*(la(3)-la(2)));
```

MATLAB-bal a szorzásokat elvégezve, majd behelyettesítve:

$$h[k] = 0,9\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left[0,3191 \cdot (-0,3969)^{k-1} + 1,831(0,9069)^{k-1} \right] - 1,1111\delta[k-1]$$

Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>> k = 0:10; %leptek megadása
>> hk = 1.831*0.9069.^(k-1)+0.3191*(-0.3969).^(k-1);
>> hk(1) = 0.9; %delta[k] beillesztése
>> x = hk(2); %segedvaltozo
>> hk(2) = x-1.1111; %delta[k-1] beillesztése
>> stem(k,hk) %kirajzolas
```



1.4.

A gerjesztőjel:

$$s[k] = \varepsilon[k] (2,5 - 1,5 \cdot 0,5^k)$$

A válasz:

$$y[k] = s[k] * h[k]$$

Kibontva a konvolúciót:

$$\begin{aligned} y[0] &= s[0]h[0] = 0,9 \\ y[1] &= s[0]h[1] + s[1]h[0] = 2,614 \\ y[2] &= s[0]h[2] + s[1]h[1] + s[2]h[0] = 5,2646 \\ y[3] &= s[0]h[3] + s[1]h[2] + s[2]h[1] + s[3]h[0] = 8,5296 \\ y[4] &= s[0]h[4] + s[1]h[3] + s[2]h[2] + s[3]h[1] + s[4]h[0] = 11,897 \\ y[5] &= s[0]h[5] + s[1]h[4] + s[2]h[3] + s[3]h[2] + s[4]h[1] + s[5]h[0] = 15,1636 \end{aligned}$$

2. Feladat

2.1.

A frekvenciatartománybeli egyenletek

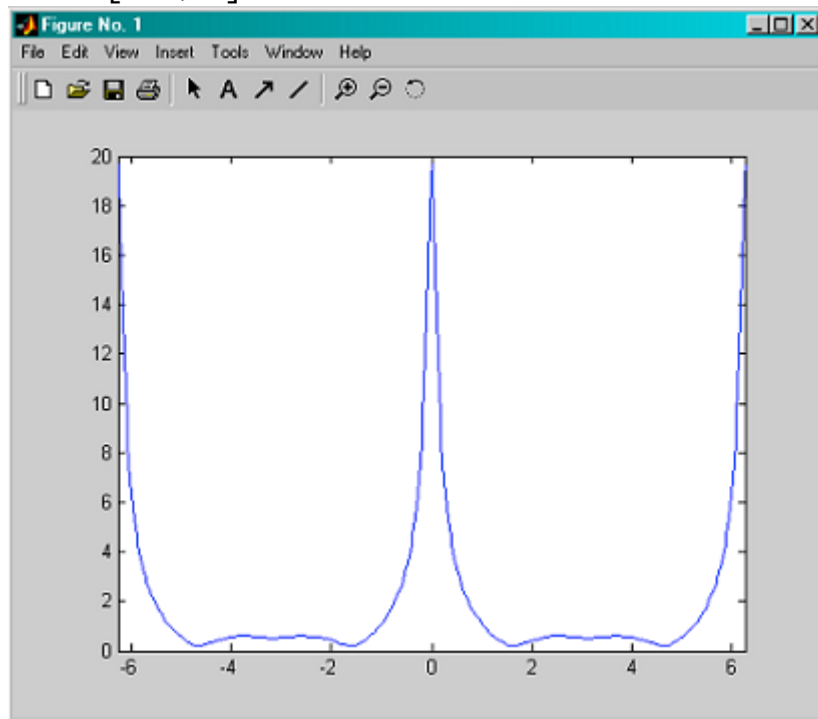
$$\begin{aligned} X_1 e^{j\vartheta} &= 0,51X_1 + 0,72X_2 + S \\ X_2 e^{j\vartheta} &= 0,5X_1 \\ X_3 e^{j\vartheta} &= 0,4X_1 + 0,8X_2 \\ Y &= 1,039X_1 + 1,208X_2 + X_3 + 0,9S \end{aligned}$$

Megoldva az egyenleteket (MAPLE9-cel), majd rendezve:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})} = \frac{0,9 + 0,58e^{-j\vartheta} + 0,68e^{-2j\vartheta} + 0,4e^{-3j\vartheta}}{1 - 0,51e^{-j\vartheta} - 0,36e^{-2j\vartheta} + 0} \xrightarrow{\text{bővítéssd}} \frac{0,9e^{3j\vartheta} + 0,58e^{2j\vartheta} + 0,68e^{j\vartheta} + 0,4}{1e^{3j\vartheta} - 0,51e^{2j\vartheta} - 0,36e^{j\vartheta} + 0}$$

(MATLAB-bal ellenőrizve: [sz,n] = ss2tf(A,B,CT,D))

Az amplitúdókarakterisztika $[-2\pi; 2\pi]$ értékekre (MATLAB-bal számítva az abszolútértéket):



2.2.

$$s[k] = 5 \cos(0,16\pi k + 0,46\pi) \Rightarrow S = 5e^{j0,46\pi}$$

Periodikus jel, a periódus: $K = 25$

Az átviteli karakterisztika fázisa és amplitúdója az adott körfrekvencián:

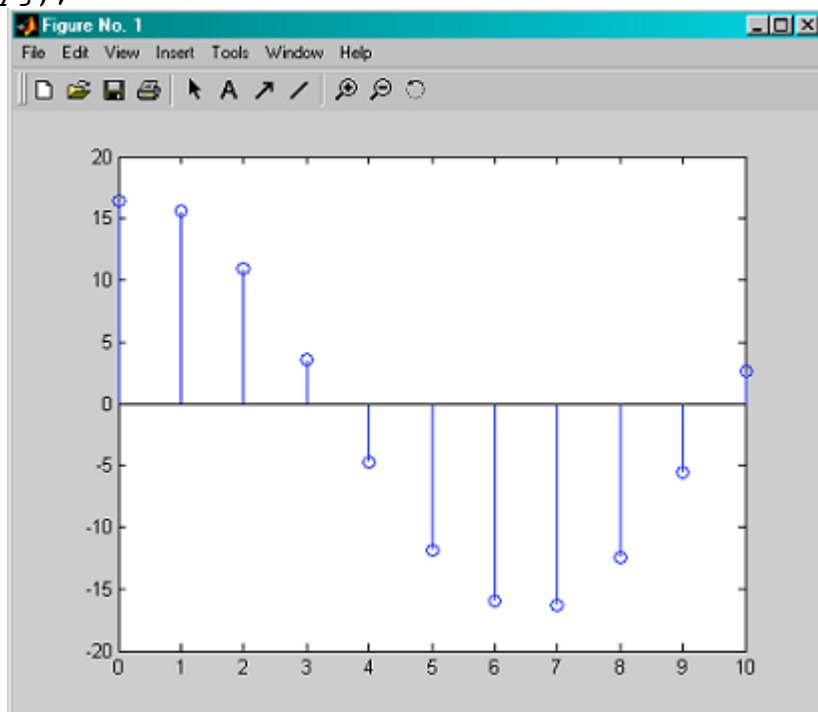
$$\arg(H(e^{j\theta_0})) = -1,5993 \text{ rad} \quad |H(e^{j\theta_0})| = 3,3344$$

Gerjesztett összetevő (komplex értékekre: $Y = S \cdot H(e^{j\theta})_{\theta=0,16\pi}$):

$$y_g[k] = 16,672 \cos(0,16\pi k - 0,1542)$$

Ábrázolva(MATLAB-bal):

```
>> k = 0:10;
>> yg = 16.672*cos(0.16*pi*k - 0.1542);
>> stem(k,yg);
```



2.3.

A periodikus jel értékei:

k	0	1	2	3	4	5
s[k]	-2	-4	7	9	-3	1

A komplex Fourier-együtthatók:

$$S_p = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jpk\vartheta_1}, \text{ ahol } K = 6 \text{ és } \vartheta_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

MATLAB-bal számolva:

```
>> sk = [-2 -4 7 9 -3 1];
>> Sp = fft(sk)
>> abs(Sp(2))
>> abs(Sp(3))
>> angle(Sp(2))
>> angle(Sp(3))
```

$$S_0 = 8$$

$$S_1 = S_5^* = -14,5 - 4,3301j = 15,1327e^{-2,8514j} \Rightarrow S_5 = 15,1327e^{2,8514j}$$

$$S_2 = S_4^* = 6,5 + 12,99j = 14,5258e^{1,1069j} \Rightarrow S_4 = 14,5258e^{-1,1069j}$$

$$S_3 = -4$$

Innen a komplex alak:

$$s[k] = \frac{1}{6} \left(8 + 15,1327e^{j(k\frac{\pi}{3} - 2,8514)} + 14,5258e^{j(k\frac{2\pi}{3} + 1,1069)} + (-4)e^{jk\pi} + 14,5258e^{j(k\frac{4\pi}{3} - 1,1069)} + 15,1327e^{j(k\frac{5\pi}{3} + 2,8514)} \right)$$

Valós alakban:

$$s[k] = 1,3333 + 5,0442 \cos(k\frac{\pi}{3} - 2,8514) + 4,842 \cos(2k\frac{\pi}{3} + 1,1069) - 0,6666 \cos(k\pi)$$

MATLAB-bal ellenőrizve:

$$\begin{aligned} s[0] &= -2,0002 & s[3] &= 8,9998 \\ s[1] &= -4,0000 & s[4] &= -2,9999 \\ s[2] &= 7,0002 & s[5] &= 1,0002 \end{aligned}$$

Tehát a közelítés helyes.

2.4.

A válasz (komplex alakban):

$$Y = S \cdot H(e^{j\frac{\pi}{3}})$$

A megfelelő értékek (az előző feladatok alapján):

p	$p\frac{\pi}{3}$	S	$H(e^{j\frac{\pi}{3}})$	Y
0	0	1,3333	19,6923	26,2557
1	$\frac{\pi}{3}$	$5,0442e^{-j2,8514}$	$0,9894e^{-j1,8632}$	$4,9512e^{-j4,7146}$
2	$\frac{2\pi}{3}$	$4,842e^{j1,1069}$	$0,4689e^{j0,0383}$	$2,2704e^{j0,0424}$
3	π	-4	0,5217	-2,0868

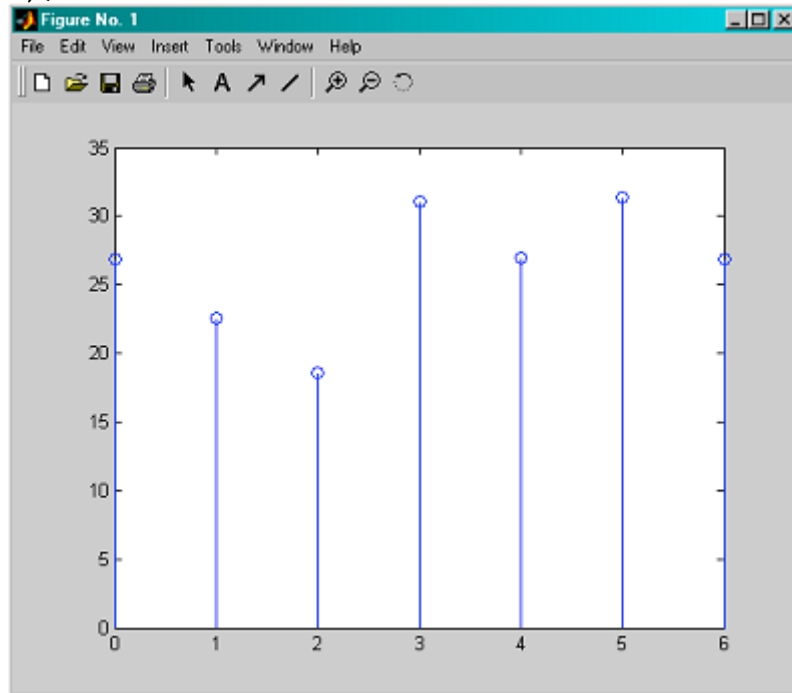
(megjegyzés: p=3-ra az átviteli karakterisztika fázisa nem 0, de 10^{-17} nagyságrendű, így elhanyagoltam)

Innen a válasz:

$$y[k] = 26,2557 + 4,9512 \cos\left(k \frac{\pi}{3} - 4,7146\right) + 2,704 \cos\left(k \frac{2\pi}{3} + 0,0424\right) - 2,0868 \cos(k\pi)$$

MATLAB-bal kirajzolva:

```
>> k = 0:6;
>> yk = 26.2557 + 4.9512*cos(k*pi/3-4.7146)+2.704*cos(k*2*pi/3+0.0424)-2.0868*cos(k*pi);
>> stem(k,yk);
```



2.5.

Az impulzusválasz:

$$h[k] = 0,9\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(0,3191 \cdot (-0,3969)^{k-1} + 1,831(0,9069)^{k-1} \right) - 1,1111\delta[k-1]$$

Ennek Fourier-transzformáltja(MAPLE9 segítségével átalakítva):

$$H(e^{j\theta}) = 0,9 + \frac{-0,3191e^{-j\theta}}{1+0,3969e^{-j\theta}} + \frac{1,831e^{-j\theta}}{1-0,9069e^{-j\theta}} - 1,1111e^{-j\theta} = \dots = \frac{0,9 + 0,58e^{-j\theta} + 0,68e^{-2j\theta} + 0,4e^{-3j\theta}}{1 - 0,51e^{-j\theta} - 0,36e^{-2j\theta}}$$

Tehát egyezik az átviteli karakterisztikával.

2.6.

A hálózat rendszeregyenlete:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{Y}{S} = \frac{\text{Hszámláló}}{\text{Hnevező}} \Rightarrow Y \cdot \text{Hnevező} = S \cdot \text{Hszámláló} \rightarrow \text{rendszeregyenlet:}$$

$$y[k] - 0,5y[k-1] - 0,36y[k-2] = 0,9s[k] + 0,58s[k-1] + 0,68s[k-2] + 0,4s[k-3]$$

3. Feladat

3.1.

z-tartománybeli egyenletek:

$$\begin{aligned}X_1 z &= 0,51X_1 + 0,72X_2 + S \\X_2 z &= 0,5X_1 \\X_3 z &= 0,4X_1 + 0,8X_2 \\Y &= 1,039X_1 + 1,208X_2 + X_3 + 0,9S\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva (MAPLE9), majd átalakítva:

$$H(z) = \frac{Y}{S} = \frac{0,9z^3 + 0,58z^2 + 0,68z + 0,4}{z^3 - 0,51z^2 - 0,36z} = H(e^{j\theta})_{e^{j\theta}=z}$$

3.2.

Pólus-zérus elrendezés MATLAB-bal:

```
>> pzmap(Hsz,Hn); %Hsz: szamlalo, Hn: nevezo  
>> roots(Hsz) %zerusok
```

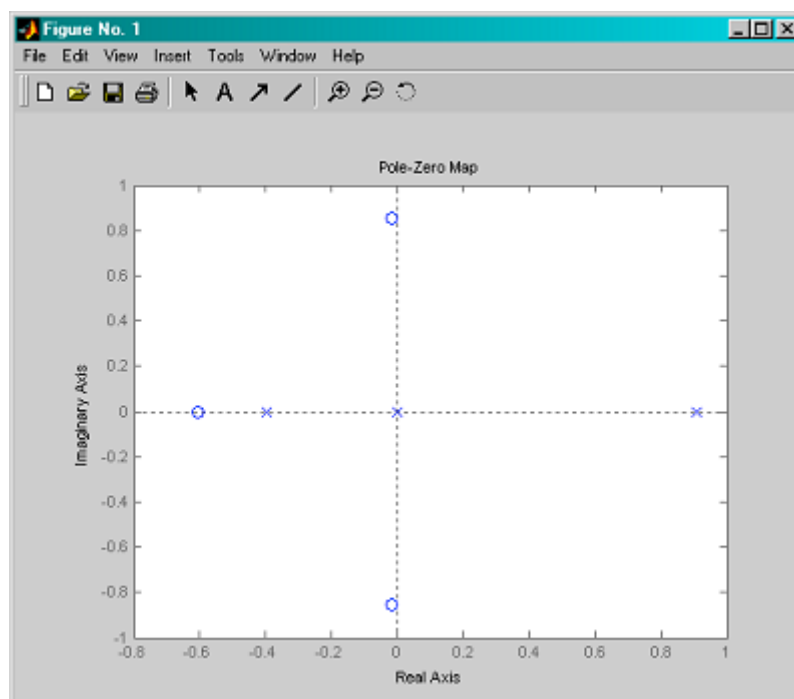
ans =

```
-0.0189 + 0.8557i  
-0.0189 - 0.8557i  
-0.6066
```

```
>> roots(Hn) %polusok
```

ans =

```
0  
0.9069  
-0.3969
```



Mivel minden pólus az egységkörön belül van, a hálózat gerjesztés-válasz stabilis.

3.3.

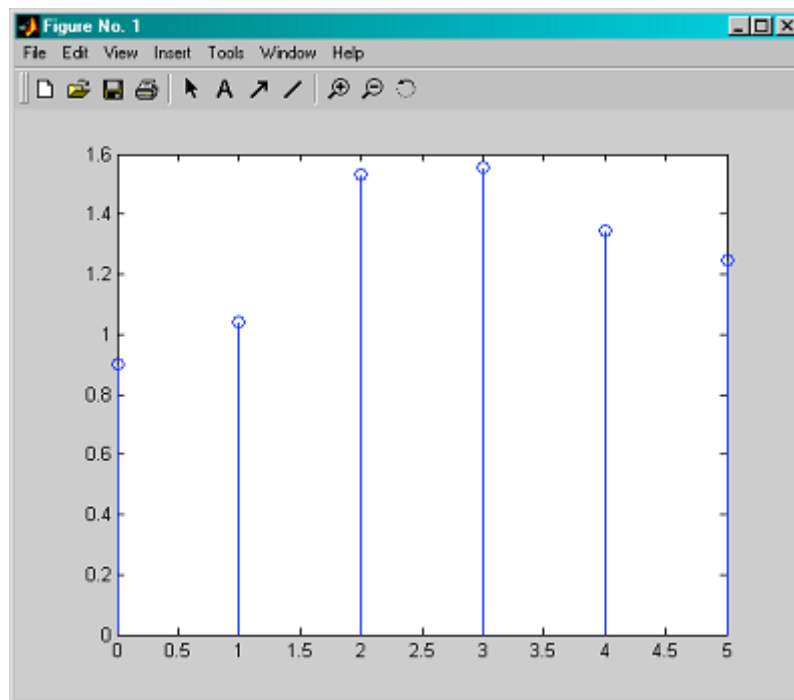
MATLAB-ot használva:

```
>> [r,p,k] = residue(Hsz,Hn)
r =
    1.8310
    0.3191
   -1.1111
p =
    0.9069
   -0.3969
     0
k =
    0.9000
```

Analitikus alakban az impulzusválasz:

$$h[k] = 0,9\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left[1,8310 \cdot 0,9069^{k-1} + 0,3191 \cdot (-0,3969)^{k-1} \right] - 1,1111\delta[k]$$

MATLAB-bal kirajzolva:



3.4.

A gerjesztés:

$$s[k] = \varepsilon[k] (2,5 - 1,5 \cdot 0,5^k)$$

Ennek z-transzformáltja:

$$S(z) = \frac{2,5}{1 - z^{-1}} - \frac{1,5}{1 - 0,5z^{-1}}$$

A válasz z-transzformáltja (MAPLE9-cel szorozva, majd rendezve és átalakítva):

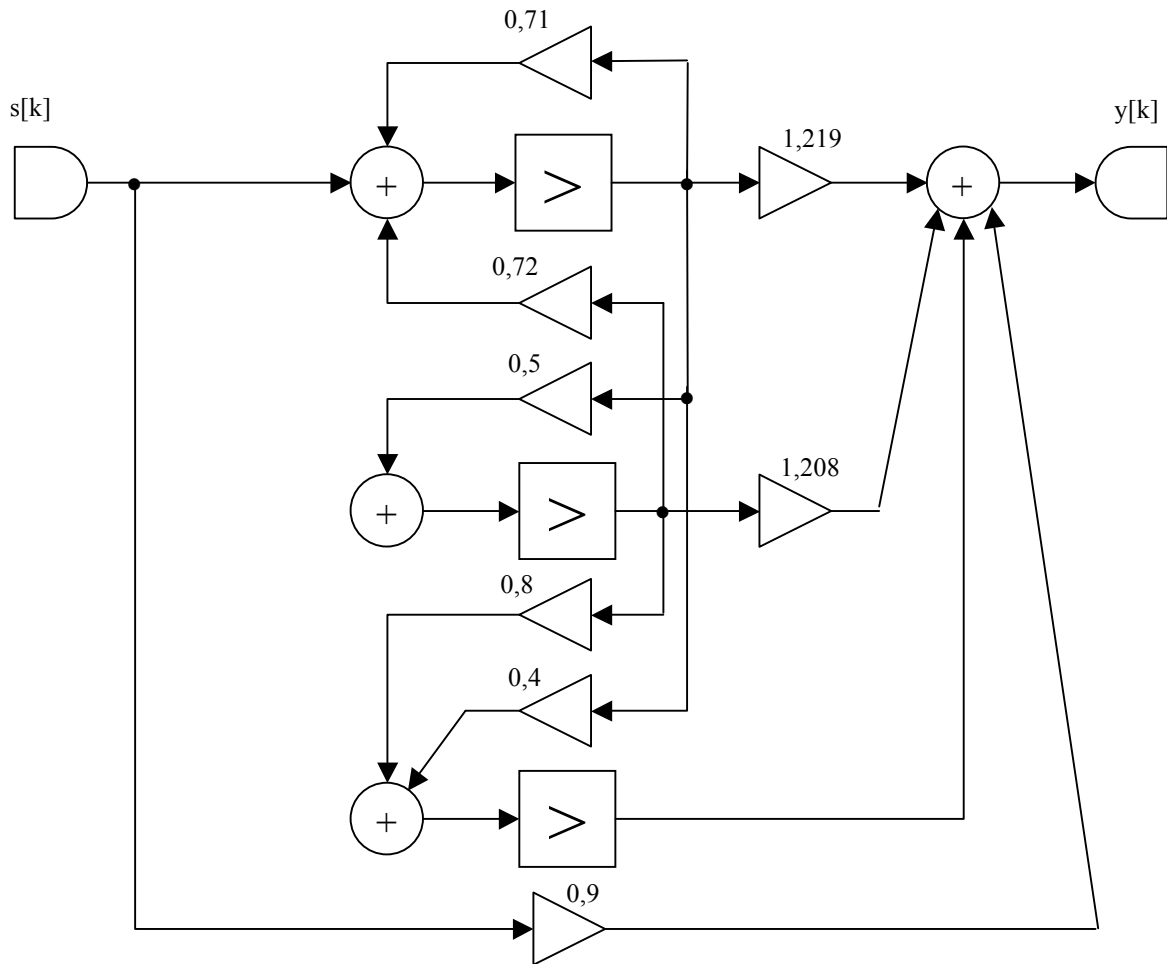
$$Y(z) = S(z)H(z) = \frac{0,9z^4 + 0,805z^3 + 0,825z^2 + 0,57z + 0,1}{z^4 - 2,01z^3 + 0,905z^2 + 0,285z - 0,18}$$

Inverz z-transzformálás (MATLAB – residue paranccsal) után:

$$y[k] = 0,9\delta[k] + \varepsilon[k-1] \left[49,2308 - 50,7309 \cdot (0,9069)^{k-1} + 4,0993 \cdot (0,5)^{k-1} + 0,0149 \cdot (-0,3969)^{k-1} \right]$$

3.5.

A kívánt kanonikus hálózat:



Mivel e hálózat átviteli függvénye megegyezik az eredetiével, ezért a rendszeregysletük is azonos:

$$y[k] - 0,5y[k-1] - 0,36y[k-2] = 0,9s[k] + 0,58s[k-1] + 0,68s[k-2] + 0,4s[k-3]$$

3.6.

A rendszeregyslet átalakítva:

$$y[k] = 0,5y[k-1] + 0,36y[k-2] + 0,9s[k] + 0,58s[k-1] + 0,68s[k-2] + 0,4s[k-3]$$

EXCEL-lel megoldva a fokozatos behelyettesítést $k = 1, 2, \dots, 8$ -ra:

