ANALÍZIS(1) **I. ZÁRTHELYI** **2003. október 16.**

Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{2^{3n+1}+5^n} = ?$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+3n-5} - \sqrt{9n^2-2n+3}\right) = ?$$

Megoldás:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{2\cdot 8^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{5}{8}\right)^n} = \frac{0+0}{2+0} = 0$$

Felhasználtuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0\,,\quad \text{ha } |a|<1\,,\quad \text{illetve}\qquad \lim_{n\to\infty} n^k\,a^n = 0,\quad \text{ha } |a|<1 \text{ és } k\in\mathbb{N}^+$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+3n-5-(9n^2-2n+3)}{\sqrt{9n^2+3n-5}+\sqrt{9n^2-2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-8}{\sqrt{9n^2+3n-5}+\sqrt{9n^2-2n+3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=1} \frac{5-\frac{8}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{9-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}} = \frac{5}{6}$$

2. feladat (18 pont)

a) Írja le a rendőrelvet és a speciális rendőrelvet!

b) Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét és a fenti tételek segítségével igazolja állítását!

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1+n\,3^n}{n^2+2n-1}}\,, \qquad\qquad b_n = \sqrt[n]{n!} + 6\,n - 4$$

Megoldás:

a) **Rendőrelv:**

$$\left(\begin{array}{lcl} a_n \to A & \text{és} & a_n \le c_n \le b_n \\ b_n \to A & & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad (c_n \to A)$$

Speciális rendőrelv:

(i) $(a_n \ge b_n) \wedge (b_n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$

(ii) $(a_n \le b_n) \wedge (b_n \to -\infty) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to -\infty$

b)

$$\underbrace{\frac{3}{\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}}}_{\to 3} = \sqrt[n]{\frac{n\,3^n}{n^2+2n^2}} < a_n = \sqrt[n]{\frac{1+n\,3^n}{n^2+2n-1}} < \sqrt[n]{\frac{n\,3^n+n\,3^n}{n^2+0}} = \underbrace{\frac{\sqrt[n]{2}\cdot 3}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 3}$$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p \in \mathbb{R}^+$.

$b_n = \sqrt[n]{n!} + 6\,n - 4 > 0 + 6n - 4n = 2n \to \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

3. feladat (15 pont)

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{4n-1}{4n+7}\right)^n, \qquad b_n = (-1)^n \left(\frac{4n-1}{4n+7}\right)^{n^2}$$

a) $\overline{\lim}\, a_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = ?$

b) $\overline{\lim}\, b_n = ?\,, \qquad \underline{\lim}\, b_n = ?$

Megoldás:

a) $c_n := \left(\dfrac{4n-1}{4n+7}\right)^n = \dfrac{\left(1+\frac{-1/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{7/4}{n}\right)^n} \to \dfrac{\mathrm{e}^{-1/4}}{\mathrm{e}^{7/4}} = \mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$

Ha n páros: $a_n = c_n \to \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

Ha n páratlan: $\quad a_n = -c_n \ \to \ -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\ a_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\,, \quad \underline{\lim}\ a_n = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

b) $b_n = (-1)^n\, c_n^n\,.$ Már láttuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

$\Longrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} - 10^{-2} \ < \ c_n \ < \ \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} + 10^{-2}$, ha $n > N_1$

Ezért

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2} - 10^{-2}\right)^n}_{\to 0} \ < \ (c_n)^n \ < \ \underbrace{\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2} + 10^{-2}\right)^n}_{\to 0}, \text{ ha } n > N_1$$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lim}\ b_n = \underline{\lim}\ b_n = 0$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0\,,$ ha $|a| < 1\,.$

4. feladat (14 pont)

$$a_1 = 2\,; \qquad a_{n+1} = 2 + \sqrt{5 + a_n^2}\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\left(a_2 = 2 + \sqrt{9} = 5\,, \qquad a_3 = \ldots\right)$$

a) Mutassa meg, hogy a sorozat monoton!

b) Konvergens-e a számsorozat?

Megoldás:

a) Sejtés: (a_n) monoton növekedő. Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül
2. Tfh. $a_{n-1} < a_n$
3. Igaz-e:

$$2 + \sqrt{5 + a_{n-1}^2} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = 2 + \sqrt{5 + a_n^2}$$

2. miatt $\quad a_{n-1} < a_n \quad$ és a sorozat elemei pozitívak, tehát

$$\Longrightarrow \quad a_{n-1}^2 < a_n^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 5 + a_{n-1}^2 < 5 + a_n^2$$
$$\Longrightarrow \quad \sqrt{5 + a_{n-1}^2} \ < \ \sqrt{5 + a_n^2}$$

$\Longrightarrow \quad 2 + \sqrt{5 + a_{n-1}^2} = a_n \ < \ a_{n+1} = 2 + \sqrt{5 + a_n^2}\,,$ amit bizonyítanunk kellett.

b) Ha a sorozat konvergens, a határérték kielégíti az alábbi egyenletet:

$$2 < A = 2 + \sqrt{5 + A^2} \quad \Longrightarrow \quad A - 2 = \sqrt{5 + A^2}$$

Négyzetreemeléssel $A = -\dfrac{1}{4}$ adódik, ami ellentmondás, hiszen $A > 2$. Tehát a számsorozat divergens, a monotonitás miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

5. feladat (18 pont)

Abszolut konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{3 + \sqrt[n]{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\frac{2}{n} + 1}{n + 3}$

Megoldás:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 + \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{4}$ miatt a sor divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele (az általános tag nem tart nullához).

b) A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor nem abszolút konvergens, mert

$$|b_n| = \frac{\frac{2}{n} + 1}{n + 3} > \frac{1}{n + 3n} = \frac{1}{4n} \quad \text{és} \quad \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{divergens} \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \ \text{is divergens.}$$

De $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, mert Leibniz típusú. Ugyanis

A sor váltakozó előjelű.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + 1}{n + 3} = \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 0 \quad \text{és}$$

a_n monoton csökkenő, mivel n növelésével a számláló csökken, a nevező nő.

Így a sor feltételesen konvergens.

6. feladat (20 pont)

a) Mondja ki a numerikus sorok konvergenciájára vonatkozó majoráns kritériumot!

b) Írja le a numerikus sorok konvergenciájára tanult hányadoskritériumot és a gyökkritériumot!

c) Konvergensek-e az alábbi sorok:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!+3n-2}\ , \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n+7^{n+1}}$$

Megoldás:

a) Majoráns kritérium:

Ha $0 < a_n \le c_n \quad \forall\, n$-re és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens

b) Hányados kritérium:

1. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ \forall\ n\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
2. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1,\ \forall\ n\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

Gyökkritérium:
Ha $\forall\, n \ge N$-re $a_n > 0$ és

1. $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \Longrightarrow \sum_{N}^{\infty} a_n$ konv.
2. $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \Longrightarrow \sum_{N}^{\infty} a_n$ div.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!+3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$0 < a_n < \frac{2n+n}{n!+0} = \frac{3}{(n-1)!} = b_n$ és a majoráló $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, mert

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,(n-1)!}{n!\ 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n+7^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$0 < c_n < \frac{2^{n+2}}{0+7^{n+1}} = \frac{4}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ és a majoráló $\frac{4}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ sor konvergens

geometriai sor $(0 < q = \frac{2}{7} < 1) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens.

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

a) Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

$$a_n = \frac{(-1)^n\,(n+3)\,+\,4n}{3n+5}$$

b) Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n\,+\,2}{3^{2n}} = ?$$

Megoldás:

a) Ha n páros: $\quad a_n = \dfrac{5n+3}{3n+5} = \dfrac{5+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{5}{n}} \to \dfrac{5}{3}$

Ha n páratlan: $\quad a_n = \dfrac{3n-3}{3n+5} = \dfrac{3-\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{5}{n}} \to \dfrac{3}{3} = 1$

A sorozat divergens, mivel két torlódási pontja van.

b) A sor két konvergens geometriai sor összege, így konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n\,+\,2}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{9^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{3}}{1-(\dfrac{-1}{3})} + 2\,\frac{\dfrac{1}{9}}{1-(\dfrac{1}{9})}$$