1. Hányféleképpen lehet kitölteni egy TOTÓ szelvény 13+1 sorát, úgy, hogy az első 4 sorban legfeljebb 1 db x legyen:

   Két lehetőség van:

   –Nincs x az első 4 között, vagyis csak 2 lehetőség van (1,2): ez 2^4 lehetőség, a maradék 10 helyre mindhárom mehet: 3^{10}. Összesen $2^4 * 3^{10}$.

   –Van 1 db x, ez 4 helyen lehet, a maradék három helyre vagy 1 v. 0 kerül: $4 * 2^3$ lehetőség, és a maradék 10 helyre ismét 3^{10}-en lehetőség van. Ez összesen $4 * 2^3 * 3^{10} = 2^5 * 3^{10}$. A feladat megoldása a két lehetőség összege, azaz $2^4 * 3^{11}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fában minden pont foka páratlan, akkor az élek száma is páratlan.:

$$\sum_{v \in G(v)} d(v) = 2e$$

   2e biztos páros a d(v)-k páratlanok, így csak akkor teljesül az egyenlőség, ha páros sokat adunk össze belőlük. Vagyis páros sok csúcs van. Mivel egy fa esetén $e = n - 1$, és n páros, ezért e biztos páratlan.

3. Egy fát gyökeresnek nevezünk, ha egyik pontja meg van jelölve, mint gyökér. Hány különböző gyökeres fa adható meg n számozott ponton?

   A Cayley tétel alapján n számozott ponton n^{n-2} különböző fát lehet megadni Ezek mindegyikénél tetszőlegesen lehet választani az n csúcs közül gyökeret, így összese $n * n^{n-2} = n^{n-1}$ lehetőség van.

4. Egy gráfban bolyongásnak nevezünk egy olyan élsorozatot, amelyben nem ismétlődnek az élek(azaz egy él legfeljebb egyszer fordul elő, de egy ponton többször is átmehet). Hány élből áll a lehető leghosszabb bolyongás K_{10}-ben, a 10 pontú teljes gráfban?

   A 10 csúcsú teljes gráfban $\frac{n(n-1)}{2}$ azaz $5*9 = 45$ él van. Amit mi keresünk az egy Euler séta, tehát keressük azt a legtöbb élt tartalmazó gráfot, amiben van Euler séta. Egy gráfban akkor van Euler séta ha 0 vagy 2 páratlan fokú csúcs van. A K_{10}-ben minden csúcs fokszáma 9(ptl), tehát legalább 8 csúcs fokszámát csökkenteni kell, vagyis legalább 4 élt törölni kell. Azaz a leghoszabb bolyongás 41 élből áll.

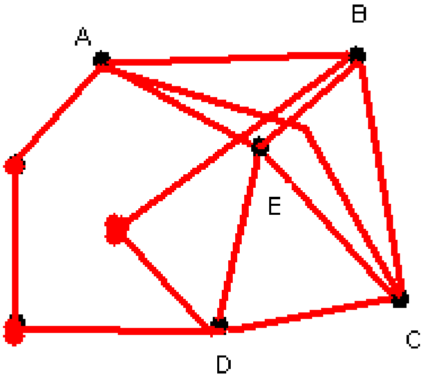
5. Legyen G egy olyan $n \geq 4$ pontú gráf. melynek bármelyik élét elhagyva lesz a maradék gráfban Hamilton kör. Bizonyítsuk be, hogy $e(G) \geq 3n/2$

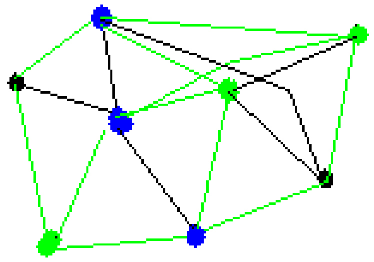
   Ahhoz, hogy egy gráfban legyen Hamilton kör, szükséges feltétel, hogy minden pont fokszáma legalább 2 legyen. Mivel a G gráf bármelyik élét elhagyva is lesz a gráfban Hamilton kör, ezért minden pont fokszáma legalább 3 kell legyen. Így:

$$\sum_{v \in v(G)} d(v) \geq 3n \Rightarrow e \geq 3n/2$$

6. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?

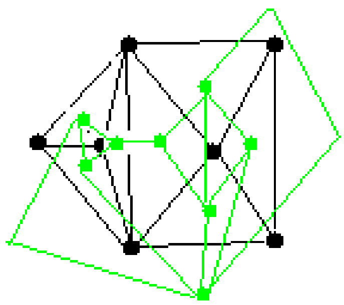
   Tartalmaz K_5-tel, illetve $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

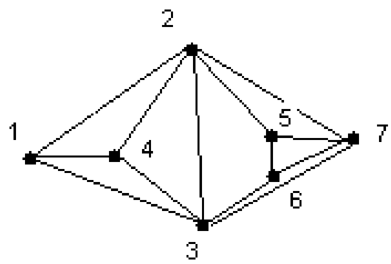




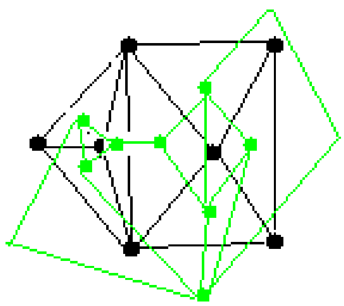
Emellett igaz, hogy nem teljesül az n+t=e+2 formula. (A háromból egy is elég)

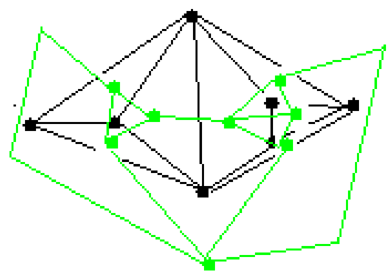
7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két gráf izomorf, de rajzolt duálisuk nem izomorf.





Találtunk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. A duálisok:





A bal oldali duálisban van 5-ödfokú csúcs, míg a másikban csak negyedfokú van. Tehát nem izomorf a duális.

8. Oldjuk meg az alábbi PERT feladatot! Mennyi a szükséges idő? Mely tevékenységek kritikusak? A gráfban a topologikus sorrend: A, B, C, D, H, L, K, J, I, E, F, G

$$t(A) = 0t(B) = t(A) + 1 = 1$$
$$t(C) = t(B) + 2 = 3$$
$$t(D) = t(C) + 2 = 5$$
$$t(H) = t(D) + 6 = 11$$
$$t(L) = t(H) + 1 = 12$$
$$t(K) = t(L) + 3 = 15$$
$$t(J) = t(K) + 1 = 16$$
$$t(I) = t(J) + 1 = 17$$
$$t(E) = max(t(A) + 3, t(I) + 1) = max(3, 18) = 18$$
$$t(F) = max(t(B) + 11, t(J) + 6, t(E) + 2) = max(12, 22, 20) = 22$$
$$t(G) = max(t(C) + 15, t(F) + 5, t(K) + 9, t(H) + 16) = max(18, 27, 24, 27) = 27$$

A tevékenységhez szükséges összidő : 27 Kritikus utak:

$$A \to B \to C \to D \to H \to L \to K \to J \to F \to G$$
$$A \to B \to C \to D \to H \to G$$

Így a kritikus tevékenységek: A, B, C, D, H, L, K, J, F, G