

Villamosmérnök A2 (2015 tavasz)

2. ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Konvergensek-e a következő sorok? ☒ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^3}$ ☒ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^3}$
2. Legyen $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$. (a) $\mathbb{R}^+$ mely részhalmazán konvergens f_n és mi ott a határfüggvénye? (b) Egyenletesen konvergens-e a konvergencia-tartományán f_n ? (c) A konvergencia-tartomány mely részintervallumain egyenletes a konvergencia?
3. Mi a $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ hatványsor konvergencia-sugara? Mi a konvergencia-tartománya (hol konvergens)?
4. Legyen $f(x) = \sin x^2$. $f^{(42)}(0) = ?$
5. Legyen $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $v_2 = -e_2 + e_3 + 2e_4$, $v_3 = 5e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 16e_4$, $v_4 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 2e_4$, ahol $e_1, \dots, e_4$ a V vektortér egy bázisa. (a) Hány dimenziós V $\{v_1, \dots, v_4\}$ vektorok által generált altere? (b) Adja meg ennek az alternek egy bázisát, és írja fel ebben a bázisban $\{v_1, \dots, v_4\}$ -nek az ebben a bázisban nem szereplő elemeit!
6. Melyek igazak a következő állítások közül?
 - (a) Ha X, Y egy vektortér véges részhalmazai és $|X| < |Y|$, akkor $\mathcal{L}(X) \neq \mathcal{L}(Y)$. ($\mathcal{L}(X)$ jelöli az X által generált alteret.)
 - (b) Ha $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ generátorrendszere a V n -dimenziós térnek, akkor minden V -beli vektor egyértelműen áll elő az X -beli vektorok lineáris kombinációjaként.
 - (c) Egy végtelen dimenziós tér minden altere is végtelen dimenziós.
 - (d) A monoton növekvő sorozatok alterét alkotják az összes valós sorozatok terének.
 - (e) A monoton sorozatok alterét alkotják az összes valós sorozatok terének.

Villamosmérnök A2 (2015 tavasz)

2. ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^3}$

Megoldás. (a) Konvergens, mert $\sin \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergens. (7p)

(b) Divergens, mert $\cos \frac{1}{n^3} \rightarrow 1 \neq 0$. (3p)

2. Legyen $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$. (a) $\mathbb{R}^+$ mely részhalmazán konvergens f_n és mi ott a határfüggvénye? (b) Egyenletesen konvergense-e a konvergencia-tartományán f_n ? (c) A konvergencia-tartomány mely részintervallumain egyenletes a konvergencia?

Megoldás. (a) Konvergens $[1, \infty)$ -en ($(0, 1)$ -en nem, mert ott $\lim \frac{1}{x^n} = \infty$) és a határfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{ha } x > 1 \end{cases}. \quad (4p)$$

(b) Nem, mert f_n folytonos $[1, \infty)$ -en, de f nem. (2p)

(c) Minden $\delta > 0$ -ra $[1 + \delta, \infty)$ -en, mert ott $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{(1+\delta)^n} \rightarrow 0$. (4p)

3. Mi a $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ hatványsor konvergencia-sugara? Mi a konvergencia-tartománya (hol konvergens)?

Megoldás. $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^2}} = 1$ (5p). Konvergencia-tartománya: $(-1, 1)$ mert ± 1 -ben nem az, mivel n^2 és $(-1)^n n^2$ nem tart 0-hoz (5p).

4. Legyen $f(x) = \sin x^2$. $f^{(42)}(0) = ?$

Megoldás. $\sin$ -t mindenütt előállítja Taylor-sora, tehát f 0 körüli Taylor-sora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ (4p); így $f^{(4n+2)}(0) = (-1)^n \frac{(4n+2)!}{(2n+1)!} \rightsquigarrow f^{(42)}(0) = \frac{42!}{21!}$. (6p)

5. Legyen $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $v_2 = -e_2 + e_3 + 2e_4$, $v_3 = 5e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 16e_4$, $v_4 = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 2e_4$, ahol $e_1, \dots, e_4$ a V vektortér egy bázisa. (a) Hány dimenziós V $\{v_1, \dots, v_4\}$ vektorok által generált altere? (b) Adja meg ennek az alternek egy bázisát, és írja fel ebben a bázisban $\{v_1, \dots, v_4\}$ -nek az ebben a bázisban nem szereplő elemeit!

Megoldás. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tehát $\{v_1, v_2\}$ független, és $v_3 = 5v_1 - 2v_2$, $v_4 = v_1 - v_2$ miatt generátorrendszer is; így a $\{v_1, \dots, v_4\}$ által generált alter 2-dimenziós. [A jó Gauss-elimináció 4p, a dimenzió és a felírás 3-3p]

6. Melyek igazak a következő állítások közül?

(a) Ha X, Y egy vektortér véges részhalmazai és $|X| < |Y|$, akkor $\mathcal{L}(X) \neq \mathcal{L}(Y)$. ($\mathcal{L}(X)$ jelöli az X által generált alteret.)

(b) Ha $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ generátorrendszere a V n -dimenziós térnek, akkor minden V -beli vektor egyértelműen áll elő az X -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

(c) Egy végtelen dimenziós tér minden altere is végtelen dimenziós.

(d) A monoton növekvő sorozatok alterét alkotják az összes valós sorozatok terének.

(e) A monoton sorozatok alterét alkotják az összes valós sorozatok terének.

Megoldás. (a) Nem: pl. ha $v \neq 0$, akkor $X = \{v\}$ és $Y = \{2v, 3v\}$ ugyanazt az alteret generálják.

(b) Igen, mert n -dimenziós tér n elemű generátorrendszere bázisa is.

(c) Nem, pl. a (valós együtthatós) polinomok végtelen dimenziós terének n -dimenziós alterét alkotják az n -nél alacsonyabb fokszámú polinomok. Vagy: a $\{0\}$ minden vektortérnek 0-dimenziós altere.

(d) Nem, mert nem zártak -1 -el való szorzásra.

(e) Nem, pl. $a_n = n$, $b_{2n} = b_{2n+1} = -2n$ monoton sorozatok, de $a_n + b_n$ nem, mert $= 0$ ha n páros, 1 ha páratlan.